

**РОЗРОБКА ТА ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДІВ КІНЕМАТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
ДЛЯ СИНТЕЗУ ВАЖІЛЬНИХ НАПРЯМНИХ МЕХАНІЗМІВ**

В статті розглядаються питання розробки та вдосконалення методів кінематичної геометрії, що використовуються для синтезу важільних крузових та прямолінійно-напрямних механізмів. Виведено рівняння кривої, що є геометричним місцем точок, які забезпечують дотик не нижче 5-го порядку зі своїми дотичними колами, як в неявному, так і в параметричному вигляді, що дозволило вперше провести її побудову. Отримані результати можуть бути використані для розв'язання задач синтезу важільних напрямних механізмів.

Ключові слова: важільні механізми, прямолінійно-напрямні механізми, синтез, випадок Чебишева 5-го порядку, кінематична геометрія.

V.O. KHARZHEVSKIY
Khmelnitskyi National University

**DEVELOPMENT AND IMPROVEMENT OF THE METHODS OF KINEMATIC GEOMETRY FOR THE
SYNTHESIS OF THE LINKAGE PATH GENERATING MECHANISMS**

Abstract – The article is dedicated to the development and improvement of the kinematic geometry synthesis methods of the linkage path generating mechanisms on the basis on four-bar linkage which coupler point could trace both symmetric and asymmetric coupler curves. These mechanisms have wide application in machine building due to their advantages in comparison with the other types of mechanisms.

For the synthesis of the linkage path generating mechanisms methods of kinematic geometry can be applied. It is known that for the synthesis of such mechanisms special coupler plane points can be found. The case of six infinitesimally close positions is considered (the 5th order Chebyshev case). For that case, the equation of the curve which is the locus of points with 5th order of tangency with their tangent circles is obtained both in implicit and parametric forms which makes it possible to plot that curve. The obtained results were verified by constructing the symmetrical linkage for the 5th order Chebyshev case for which analytical solution is known. The results can be useful in further researches in the theory of synthesis of path generating linkage mechanisms.

Keywords: linkages, path generators, synthesis, 5th order Chebyshev case, kinematic geometry.

При проектуванні сучасних машин часто виникає задача забезпечення заданої траєкторії виконавчих органів, зокрема забезпечення прямолінійно-напрямного руху [9, 10]. Для цього можуть використовуватись різні типи механізмів, зокрема кулачкові, але, як відомо [4, 17], важільні механізми мають ряд переваг, оскільки забезпечують більшу надійність, довговічність, навантажувальну здатність. Однак синтез таких механізмів представляє собою складну задачу, для розв'язання якої використовуються наступні методи: 1) алгебраїчні методи наближення функцій за Чебишевим, що полягають у пошуку найкращого наближення функцій: знаходження таких параметрів механізмів, які забезпечують мінімальне рівномірне відхилення з максимальною кількістю вузлів інтерполяції. Фундаментальні роботи в цьому напрямку належать, зокрема, Саркісяну [12], Кіницькому [4], Гассманну [9]; 2) методи кінематичної геометрії, що засновані представниками німецької школи синтезу механізмів: Бурместером [8], Мюллером [11], Ліхтенхельдтом [6], Бейером [2]. В цьому напрямку слід відмітити також дослідження Геронімуса [3], Черкудінова [1], Відосіча, Тесара [13], а також дослідження китайських вчених Іна, Хана [14–16] та Уанга [17].

Метою роботи є розробка та вдосконалення методів кінематичної геометрії, які б дозволили розробити нові аналітичні та аналітично-числові методи синтезу важільних механізмів, шатунні криві яких мали б ділянки наближено постійної кривизни. Для розв'язання поставленої задачі, в даній роботі будемо розглядати шість нескінченно близьких положень плоскої фігури (шатунної площини механізму).

На рис. 1 зображено шарнірний чотириланковий механізм, що характеризується довжиною кривошипа $r = l_{OA}$, шатуна $b = l_{AB}$, коромисла $c = l_{BC}$, а також положенням шатунної точки, що характеризується довжиною другого плеча шатуна $k = l_{BD}$ та кутом його злому Ω . Відстань між осями нерухомих шарнірів прийнята сталою та рівною одиниці ($d = 1$), оскільки інші значення можна отримати масштабуванням всіх інших параметрів схеми. Розглянемо загальний випадок визначення точок шатунної площини цього механізму, що забезпечують дотик 5-го порядку зі своїм колом кривизни (шестикратний вузол інтерполяції).

Як відомо, при дослідженні механізмів рух точки у нерухомій системі координат xOy зручно представляти у параметричній формі:

$$x = x(\varphi_1); y = y(\varphi_1), \quad (1)$$

де φ_1 – параметр (узагальнена координата), що в даному випадку є кутом повороту кривошипа, який змінюється в межах від 0 до 2π . Оскільки нас цікавить форма шатунної кривої, яку описує точка D механізму, необхідно спочатку визначити координат цієї точки, що не представляє ускладнень та розглянуто, зокрема, у [5]. Точка D механізму описує деяку шатунну криву, яка в кожній точці має певну

кривизну, що, звичайно, змінюється зі зміною точкою D свого положення. В кожний момент часу, можна знайти іншу точку M , що є миттєвим центром кривизни шатунної кривої (рис. 1). Коло, проведене з цього центру до шатунної точки називається колом кривизни. Запишемо рівняння кола радіусом R з центром в точці M :

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2. \quad (2)$$

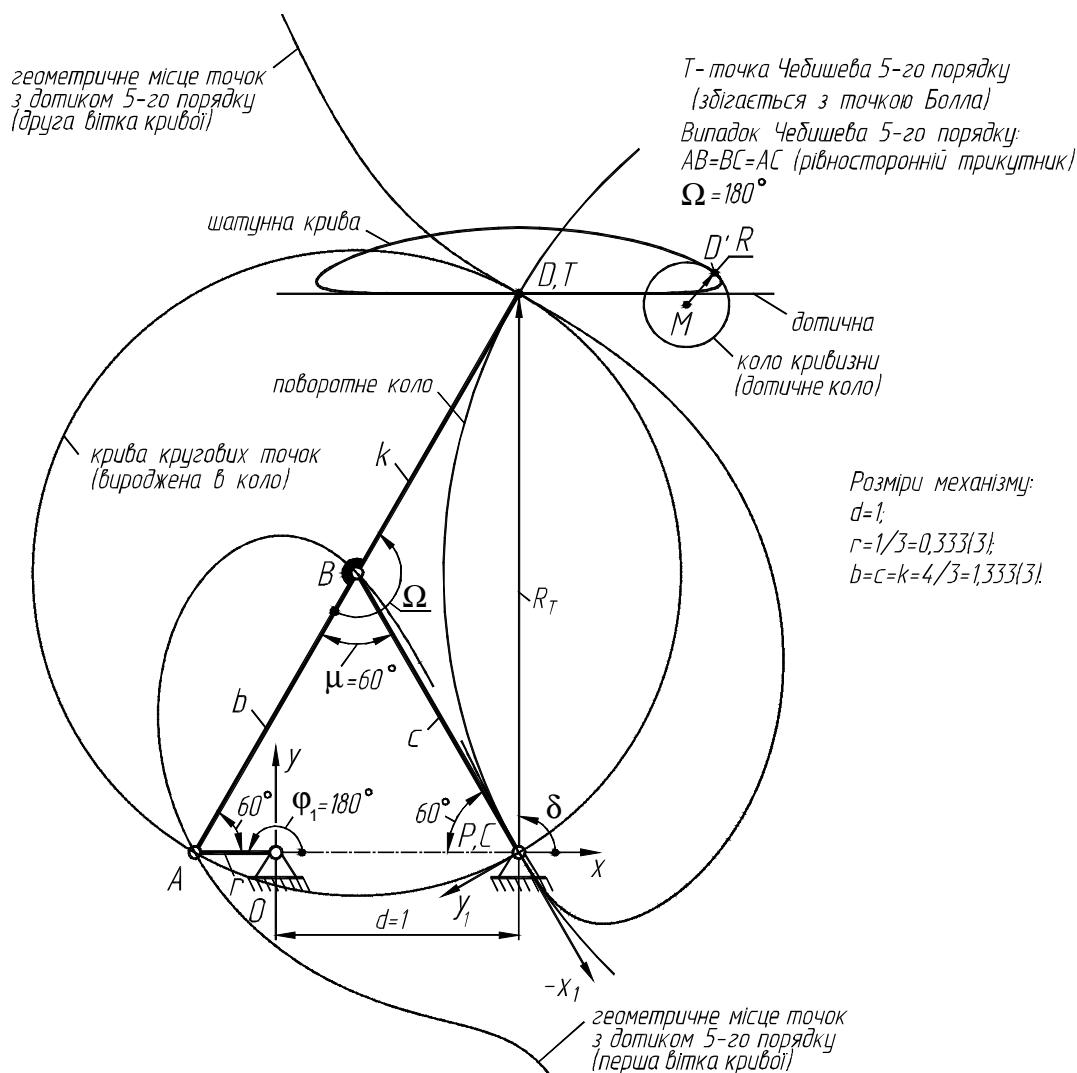


Рис. 1. Прямолінійно-напрямний шарнірний чотириланковий механізм, випадок Чебишева 5-го порядку (шатунна крива є симетричною)

Умова дотику цього кола до кривої (1) буде наступною:

$$x'_D(x_D - x_M) + y'_D(y_D - y_M) = 0, \quad (3)$$

де $x'_D = \frac{dx_D}{d\phi_1}$; $y'_D = \frac{dy_D}{d\phi_1}$ – похідні від координат шатунної точки D механізму (аналог швидкостей точки D).

Для того, щоби довільне коло, що описується рівнянням (2) було колом кривизни кривої (1), повинна виконуватись ще наступна умова [1]:

$$x''_D(x_D - x_M) + y''_D(y_D - y_M) + x'^2_D + y'^2_D = 0, \quad (4)$$

де $x''_D = \frac{d^2x_D}{d\phi_1^2}$; $y''_D = \frac{d^2y_D}{d\phi_1^2}$ – другі похідні від переміщення точки D механізму (аналог прискорення точки D).

З рівнянь (3) та (4) можна визначити співвідношення, що пов'язують координати шатунної точки D механізму та координати відповідного їй центра кривизни траєкторії M [1]:

$$x_D - x_M = \frac{y'_D (x'^2_D + y'^2_D)}{x'_D y''_D - x''_D y'_D}; y_D - y_M = \frac{-x'_D (x'^2_D + y'^2_D)}{x'_D y''_D - x''_D y'_D}; \quad (5)$$

Диференціюючи тричі рівняння (5), отримаємо [1]:

$$x^V_D (x_D - x_M) + y^V_D (x_D - x_M) + 5(x^IV_D x^IV_D + y^IV_D y^IV_D) + 10(x''_D x'''_D + y''_D y'''_D) = 0, \quad (6)$$

де $x^IV_D, y^IV_D, x^V_D, y^V_D$ – похідні високих порядків від переміщення шатунної точки D механізму по узагальненій координаті φ_1 . Аналітичні вирази для визначення перших чотирьох похідних для випадку шарнірного чотириланкового механізму наведено автором в роботі [7], розрахунок можна провести також чисельно, наприклад з використанням Mathcad [5]. Якщо підставити у рівняння (6) вирази (5), отримаємо рівняння геометричного місця точок, які мають дотик 5-го порядку зі своїми дотичними колами [1]:

$$(x'^2 + y'^2)(x^V y' - x' y^V) + [5(x^IV x^IV + y^IV y^IV) + 10(x'' x''' + y'' y''')] (x' y'' - x'' y') = 0, \quad (7)$$

де $x = x_D(t), y = y_D(t)$ – координати шатунної кривої, заданої параметрично. Причому слід відзначити, що рівняння (7) визначає геометричне місце точок з дотиком 5-го порядку, але цю властивість мають тільки ті точки, що, крім цього, мають відповідно рівність похідних зі своїм колом кривизни в цій точці до 4-го порядку включно. Таким чином, рівняння (7) є необхідною, але не достатньою умовою дотику 5-го порядку траєкторії деякої шатунної точки зі своїм колом кривизни.

Як видно, рівняння (7) пов'язує в неявному вигляді похідні високих порядків від координат точок кривої, що задана в параметричному вигляді та, очевидно, не може бути використане для безпосереднього аналітичного розв'язання задач синтезу механізмів. Проте це рівняння може бути використано, зокрема, для перевірки: якщо шатунна точка D разом зі своїми похідними по узагальненій координаті φ_1 до 5-го порядку включно, задовольняють рівнянню (7), тобто належать відповідному геометричному місцю точок, то ця точка при виконанні додаткових вимог, зазначених вище, може забезпечити дотик 5-го порядку своєї рулетки (шатунної кривої, яку вона викреслює) з колом кривизни. Зокрема, як відомо, цій умові задовольняють точки Чебишева 5-го порядку, точки Бурместера 5-го порядку, а також рухомі шарніри шарнірного чотириланкового механізму [3]. Рівняння (7) будемо використовувати для подальшого виводу формул.

Розглянемо рух шатунної площини механізму та пов'язаної з нею рухомої системи координат $x_1 P_1$ у нерухомій системі координат xOy , що пов'язана з механізмом (рис. 1). Позначимо x_0, y_0 – координати рухомого початку координат:

$$x_0 = x_0(\varphi), y_0 = y_0(\varphi), \quad (8)$$

де φ – задана функція часу. Нехай початок рухомої системи координат збігається в даний момент з полюсом P миттєвого обертання шатунної площини, тоді $x'_0 = 0, y'_0 = 0$. Вирази для обчислення похідних високих порядків, що входять у (7), можна представити у наступній формі [1]:

$$\begin{aligned} x' &= -\omega y; x'' = x''_0 - \omega^2 x; \\ y' &= \omega x; y'' = y''_0 + \omega^2 y. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x''' &= x'''_0 - (\omega^3 y - 3\omega x); x^IV = x^IV_0 - (\omega^4 y - 6\omega^2 x); \\ y''' &= y'''_0 + (\omega^3 x - 3\omega y); y^IV = y^IV_0 + (\omega^4 x - 6\omega^2 y). \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x^V &= x^V_0 - (\omega^5 y - 15\omega^3 x - 10\omega^2 y); \\ y^V &= y^V_0 - (\omega^5 x - 15\omega^3 y - 10\omega^2 x). \end{aligned} \quad (11)$$

де $\omega = d\varphi/dt$ – кутова швидкість плоскої фігури (в даному випадку – шатунної площини шарнірного чотириланкового механізму), рух якої ми розглядаємо в системі координат xOy . Для зручності запису, похідні за часом від координат позначаємо штрихами, а похідні від кутової швидкості – точками ($\dot{\omega}, \ddot{\omega}$ та $\dddot{\omega}$).

Таким чином, щоби траєкторія деякої точки мала дотик 5-го порядку зі своїм колом кривизни, необхідною умовою є те, щоби ця точка лежала на кривій, рівняння якої ми отримаємо з рівняння (7) при підстановці в нього значень x', x'', x''', x^IV, x^V та y', y'', y''', y^IV, y^V з рівнянь (9)–(11). Далі розглянемо виведення рівняння цієї кривої. Для цього спочатку визначимо значення виразів, що входять у (7):

$$(x'^2 + y'^2) = \omega^2 (x^2 + y^2); \quad (12)$$

$$(x^V y' - x' y^V) = \omega(x_0^V x + y_0^V y) - 5\omega(x^2 + y^2)(\omega^3 - 2\omega^3 + 2\omega^3); \quad (13)$$

$$(x' x^{IV} + y' y^{IV}) = \omega(x_0^{IV} x + y_0^{IV} y) + \omega(x^2 + y^2)(\omega^3 - 6\omega^2 + \omega^3); \quad (14)$$

$$(x'' x''' + y'' y''') = 3\omega^3(x^2 + y^2)(\omega^3 - \omega^3) + [(\omega^3 - \omega^3)y_0'' - 3\omega^3 x_0'' + \omega^3 y_0''' - \omega^2 x_0''']x - \\ - [(\omega^3 - \omega^3)x_0'' + 3\omega^3 y_0'' + \omega^3 x_0''' + \omega^2 y_0''']y + x_0'' x_0''' + y_0'' y_0'''; \quad (15)$$

$$(x' y'' - x'' y') = \omega^3(x^2 + y^2) - \omega(x_0'' x + y_0'' y). \quad (16)$$

Далі підставимо значення виразів (12)–(16) у рівняння (7). Не наводячи подальші проміжні перетворення та спрощення, запишемо рівняння кривої, що представляє собою геометричне місце точок, які забезпечують дотик 5-го порядку зі своїм кругом кривизни:

$$\omega^3(x^2 + y^2) \left[x_0^V x + y_0^V y - 5(\omega^3 + 2\omega^3 - 2\omega^3)(x^2 + y^2) \right] + \\ + \left[5\omega \left[(\omega^3 - 6\omega^2 + \omega^3)(x^2 + y^2) + (y_0^{IV} x - x_0^{IV} y) \right] + 10 \left[n_3(x^2 + y^2) + n_1 x - n_2 y + n_4 \right] \right] \times \\ \times \left[\omega^3(x^2 + y^2) - \omega(x_0'' x + y_0'' y) \right] = 0, \quad (17)$$

де коефіцієнти n_1, n_2, n_3 та n_4 , що входять у (17) визначаються наступним чином:

$$n_1 = (\omega^3 - \omega^3)y_0'' - 3\omega^3 x_0'' + \omega^3 y_0''' - \omega^2 x_0'''; \quad n_3 = 3\omega^3(x^2 + y^2)(\omega^3 - \omega^3); \\ n_2 = (\omega^3 - \omega^3)x_0'' + 3\omega^3 y_0'' + \omega^3 x_0''' + \omega^2 y_0'''; \quad n_4 = x_0'' x_0''' + y_0'' y_0'''. \quad (18)$$

Для проведення подальших досліджень, доцільно провести деякі спрощення базових формул. Відповідно до рекомендацій [1], система координат $x_1 P y_1$ вибрана таким чином, що прискорення полюса миттєвого обертання шатунної площини буде змінюватись лише по осі y , тому $x_0'' = 0$, оскільки прискорення точки, що збігається з полюсом P , направлено по нормалі до полюсної дотичної, тобто по осі y_1 . Крім того, відповідно до рекомендацій [1], в подальших дослідженнях доцільно приймати кутову швидкість ω шатунної площини сталою та рівною одиниці ($\omega = 1$). Враховуючи вищезазначене, рівняння (17) можна записати наступним чином:

$$(x^2 + y^2)(x_0^V x + y_0^V y) + 5 \left[(y_0^{IV} - 2x_0'' - 2y_0'')x - (x_0^{IV} + 2y_0'')y + 2y_0'' y_0''' \right] (x^2 + y^2 - y_0'' y) = 0. \quad (19)$$

Таким чином, рівняння (19) може бути використано при проведенні синтезу кругових та прямолінійно-важільних напрямних механізмів методами кінематичної геометрії, відповідно до умов наявності дотику 5-го порядку шатунної кривої з колом кривизни (круговий напрямний механізм) або з дотичною прямою (прямолінійно-направний механізм).

Не дивлячись на те, що рівняння (19) може бути використане для проведення розрахунків, його не можна використати для графічної побудови даної кривої, оскільки воно записане в неявному вигляді. Для цього необхідно вивести її параметричне рівняння, що буде розглянуто нижче.

Використовуючи точку P (полюс миттєвого обертання шатунної площини) в якості початку системи координат, проведемо радіус-вектор R_T під кутом δ , який буде змінюватись в межах від 0 до 2π . Тоді будь-яка точка кривої геометричного місця точок, що забезпечують дотик 5-го порядку зі своїми дотичними колами, буде визначатись двома параметрами – радіус-вектором R_T та кутом δ (рис. 1), причому справедливою є наступна залежність:

$$y = x \operatorname{tg} \delta. \quad (20)$$

Для спрощення подальших розрахунків, введемо наступні позначення:

$$u_1 = y_0^{IV} - 2x_0'' - 2y_0''; \quad u_2 = x_0^{IV} + 2y_0''; \quad u_3 = 2y_0'' y_0'''. \quad (21)$$

Якщо підставити рівняння (20) у (19), тоді рівняння (19), з врахуванням введених позначень (21) запишеться наступним чином:

$$x^3(1 + \operatorname{tg}^2 \delta) \left(x_0^V + y_0^V \operatorname{tg} \delta \right) + 5(u_1 x - u_2 x \operatorname{tg} \delta + u_3) \left(x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 \delta - y_0'' x \operatorname{tg} \delta \right) = 0. \quad (22)$$

Розкриємо дужки у (22) та згрупуємо коефіцієнти при x^3, x^2 та x . Упускаючи проміжні перетворення та проведені спрощення, рівняння (19) буде представлено в такому вигляді:

$$\frac{x^3}{\cos^2 \delta} \left[(y_0^V - 5u_2) \operatorname{tg} \delta + x_0^V + 5u_1 \right] + 5x^2 \left[\operatorname{tg}^2 \delta (u_2 y_0'' + u_3) - u_1 y_0'' \operatorname{tg} \delta + u_3 \right] - 5x y_0'' u_3 \operatorname{tg} \delta = 0. \quad (23)$$

Як видно, рівняння (23) представляє собою поліном 3-го степеня, у якого відсутній вільний член. Тоді очевидно, що одним з його коренів є $x = 0$. Геометричний зміст цього кореня полягає у тому, що крива геометричного місця точок, що мають дотик 5-го порядку зі своїми дотичними колами, має проходити через полюс миттєвого обертання P шатунної площини механізму, оскільки він і є початком рухомої системи координат $x_1 P y_1$. В цьому можна переконатись, підставивши значення координат цієї точки $(0; 0)$ у рівняння цієї кривої, записане в неявному вигляді (17).

Скоротивши рівняння (23) на x , воно перетвориться на квадратне, розв'язки якого запишуться так:

$$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{k_2^2 + 4k_1 k_3 - k_2}}{2k_1}, \quad (24)$$

де коефіцієнти k_1, k_2, k_3 :

$$k_1 = \frac{1}{\cos^2 \delta} \left[(y_0^V - 5u_2) \operatorname{tg} \delta + x_0^V + 5u_1 \right]; \quad k_2 = 5x^2 \left[\operatorname{tg}^2 \delta (u_2 y_0'' + u_3) - u_1 y_0'' \operatorname{tg} \delta + u_3 \right]; \quad k_3 = 5x y_0'' u_3. \quad (25)$$

Таким чином, рівняння (20), (24) та (25) визначають координати x та y кривої (19), яка представляє собою геометричне місце точок, що забезпечують дотик 5-го порядку зі своїми дотичними колами, залежно від параметра δ . Використовуючи параметричне представлення кривої (19) та змінюючи значення параметра δ від 0 до 2π , можна провести її графічну побудову. Проаналізувавши вирази (24), очевидно, що ця крива складається з двох віток, оскільки рівняння (23), крім кореня $x = 0$, має 2 розв'язки.

Для перевірки правильності виведених формул та рівнянь, розглянемо відомий частковий випадок розв'язку задачі синтезу важільного прямолінійно-напрямого механізму з дотиком 5-го порядку, а саме – механізму з симетричною формою шатунної кривої [1], що характеризується певним співвідношенням між розмірами ланок (рис. 1). Теоретично, точка Чебишева 5-го порядку для цього механізму повинна визначитись як точка перетину кривої (19) з поворотним колом, що представляє собою геометричне місце точок перегинів (або розпрямлення) своїх рулетт, рівняння якого має наступним вигляд [1]:

$$\omega^2 (x^2 + y^2) - (x_0'' x + y_0'' y) = 0; \quad (26)$$

Приклад побудови обох віток кривої (19) для такого механізму з використанням виведених в роботі рівнянь показано на рис. 1. Як і слід було очікувати, визначена крива геометричного місця точок з дотиком 5-го порядку проходить через точку T (положення якої визначалась аналітично відомими методами [1]), а також збігається в даному випадку з точкою Болла, яка визначається як перетин поворотного кола з кривою кругових точок, що є геометричним місцем точок, що забезпечують дотик не нижче 3-го порядку зі своїми дотичними колами. Тобто проведена перевірка підтверджує правильність розроблених в роботі теоретичних положень.

Таким чином, в роботі проведено розробку та вдосконалення методів кінематичної геометрії щодо визначення геометричного місця точок шатунної площини шарнірного чотириланкового механізму, які забезпечують дотик 5-го порядку зі своїми дотичними колами, причому як в неявному, так і в параметричному вигляді, що дозволило вперше провести побудову цієї кривої. Отримані результати підтверджуються відомим частковим розв'язком задачі синтезу симетричного прямолінійно-напрямого механізму для випадку Чебишева 5-го порядку та можуть бути використані для розв'язання інших задач синтезу в загальному вигляді як для прямолінійно-напряглих, так і для кругових напрямних механізмів, що планується продовжити в подальших дослідженнях.

Література

1. Артоболевский И. И. Синтез плоских механизмов / И. И. Артоболевский, Н. И. Левитский, С. А. Черкудинов. – М. : Физматгиз, 1959. – 1084 с.
2. Бейер Р. Кинематический синтез механизмов. Основы теории метрического синтеза механизмов / Р. Бейер. – М. : Машгиз, 1959. – 318 с.
3. Геронимус Я. Л. Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов / Я. Л. Геронимус. – М. : Гос. издательство физ.-мат. литературы, 1962. – 400 с.
4. Киницкий Я.Т. Шарнирные механизмы Чебышева с выстоем выходного звена / Я. Т. Киницкий. – К. : Вища школа, 1990. – 232 с.
5. Киницкий Я.Т. Теорія механізмів і машин в системі Mathcad : навч. посібник / Я.Т. Киницкий, В.О. Харжевський, М.В. Марченко. – Хмельницький : ХНУ, 2014. – 295 с.
6. Лихтенхельдт В. Синтез механизмов / В. Лихтенхельдт. – М. : Наука, 1964. – 228 с.
7. Харжевський В.О. Методика визначення особливих точок Чебишева для синтезу важільних прямолінійно-напряглих механізмів / В.О. Харжевський // Вісник Хмельницького національного

університету. – 2015. – № 3. – С. 34–41.

8. L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig, 1888. 297 p.
9. V. Gassmann, Synthese von Geradföhrungen mit ebenen Viereckengetrieben, Hamburg, Universität der Bundeswehr Diss., 2000. 102 p.
10. J. McCarthy, G. Soh, Geometric Design of Linkages, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 2011, 448 p.
11. R. Müller, Beiträge zur Theorie des ebenen starren Gelenkvierecks, Festschrift Herzogl. Techn. Hochschule Carola Wilhelmina Braunschweig, 1897, S. 41–84.
12. Y.L. Sarkissyan, Approximations in Synthesis of Mechanisms, State Engineering University of Armenia Proceedings, series “Mechanics, Machine Science, Machine-building”, Issue 15, №2, 2012, pp. 9–21.
13. J. Vidosic, D. Tesar, Selection of four-bar mechanisms having required approximate straight-line outputs. Part I. The general case of the Ball-Burmester point, Journal of mechanisms, 2(1), 1967, pp. 23–44.
14. L. Yin, J. Han, Synthesis research of straight-line mechanisms by analyzing solution regions, Journal of University of Science and Technology, Beijing, 33(2), 2011, pp. 237–243.
15. L. Yin, J. Han, C. Mao, J. Huang, T. Yang, Synthesis method based on solution regions for planar four-bar straight-line linkages, Journal of Mechanical Science and Technology 26 (10), 2012, pp. 3159–3167.
16. L. Yin, J. Han, J. Huang, T. Yang, "A General Method for Synthesizing Straight-Line Linkage with Ball and Burmester Points", Applied Mechanics and Materials, Vols 215-216, 2012, pp. 138–141.
17. D. Wang, W. Wang, Kinematic Differential Geometry and Saddle Synthesis of Linkages, John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2015. 450 p.

References

1. I. Artobolevskij, N. I. Levitskij, S. A. Cherkudinov, Sintez ploskih mehanizmov, M.: Fizmatgiz, 1959. 1084 s.
2. R. Bejer, Kinematicheskij sintez mekhanizmov. Osnovy teorii metriceskogo sinteza mekhanizmov, M.: Mashgiz, 1959. 318 s.
3. Ja. L. Geronimus, Geometricheskij apparat teorii sinteza ploskih mehanizmov, M.: Gos. izdatel'stvo fiz.-mat. literatury, 1962. 400 s.
4. Ja.T. Kinickij, Sharnirnye mehanizmy Chebysheva s vystoem vyhodnogo zvena, K.: Vishha shkola, 1990. 232 s.
5. Ya.T. Kinytskyi, V.O. Kharzhevskiy, M.V. Marchenko, Teoriya mekhanizmiv i mashyn v systemi Mathcad: navch. posibnyk, Khmelnytskyi: KhNU, 2014. 295 s.
6. V. Likhtenkhel'dt, Sintez mekhanizmov, M.: Nauka, 1964. 228 s.
7. V.O. Kharzhevskiy, Metodyka vyznachennya osoblyvykh tochk Chebysheva dlya syntezy vazhilnykh pryamoliniynopryamykh mekhanizmiv, Herald of Khmelnytsky National University, Technical sciences. 2015. Volume 224. Issue 3. pp. 34–41.
8. L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig, 1888. 297 p.
9. V. Gassmann, Synthese von Geradföhrungen mit ebenen Viereckengetrieben, Hamburg, Universität der Bundeswehr Diss., 2000. 102 p.
10. J. McCarthy, G. Soh, Geometric Design of Linkages, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 2011, 448 p.
11. R. Müller, Beiträge zur Theorie des ebenen starren Gelenkvierecks, Festschrift Herzogl. Techn. Hochschule Carola Wilhelmina Braunschweig, 1897, S. 41–84.
12. Y.L. Sarkissyan, Approximations in Synthesis of Mechanisms, State Engineering University of Armenia Proceedings, series “Mechanics, Machine Science, Machine-building”, Issue 15, №2, 2012, pp. 9–21.
13. J. Vidosic, D. Tesar, Selection of four-bar mechanisms having required approximate straight-line outputs. Part I. The general case of the Ball-Burmester point, Journal of mechanisms, 2(1), 1967, pp. 23–44.
14. L. Yin, J. Han, Synthesis research of straight-line mechanisms by analyzing solution regions, Journal of University of Science and Technology, Beijing, 33(2), 2011, pp. 237–243.
15. L. Yin, J. Han, C. Mao, J. Huang, T. Yang, Synthesis method based on solution regions for planar four-bar straight-line linkages, Journal of Mechanical Science and Technology 26 (10), 2012, pp. 3159–3167.
16. L. Yin, J. Han, J. Huang, T. Yang, "A General Method for Synthesizing Straight-Line Linkage with Ball and Burmester Points", Applied Mechanics and Materials, Vols 215-216, 2012, pp. 138–141.
17. D. Wang, W. Wang, Kinematic Differential Geometry and Saddle Synthesis of Linkages, John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2015. 450 p.

Рецензія/Peer review : 2.7.2015 р. Надрукована/Printed :28.6.2015 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Кіницький Я.Т.