конструкцій з кінематично спряженими поверхнями / М. М. Ткачук // Вісник Нац. техн. ун-ту "ХПІ" : зб. наук. пр. Темат. вип.: Машинознавство та САПР. – Харків : НТУ "ХПІ", 2011. – № 22. – С. 123–140.

2. Большая Энциклопедия Нефти Газа. Фактическая площадь – контакт [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.ngpedia.ru/id264327p1.html.

3. Дёмкин Н.Б. Приближённый расчёт характеристик контакта деталей машин : дис. … к.т.н. : 01.02.06 / Дёмкин Н.Б. – К., 1974. – С. 3–11.

4. Грязев В.М. Выбор метода определения фактической площади контакта поверхностей взаимодействующих деталей / В.М. Грязев // Известия. ТулГу. Технические науки. 2013. – Вып. 10. – С. 26–27.

5. Методы исследования состояния поверхностного слоя [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://lib.chdu.edu.ua/pdf/monograf/4/4.pdf.

6. Физика и механика полимеров. Основные положения теории трения твердых тел [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://proizvodim.com/osnovnye-polozheniya-teorii-treniya-tverdyx-tel.html.

7. Шалапко Ю. І. Процеси фретинг-зношування та фретинг-втоми в номінально-нерухомих з'єднаннях деталей машин / Ю. І. Шалапко // Трибофатика : пр. симп., 23–27 верес. 2002 р., Тернопіль. – Т., 2002. – Т. 1. – С. 279–283.

8. Дацюк Ю.Р. Система мікрофотографування з використанням цифрової камери [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.lnu.edu.ua/faculty/geology/phis_geo/Datsyuk/sci.html.

9. Тіт В.А. Фретинг-корозія як один з основних видів зношування в гідромашинах, та її наслідки / В. А. Тіт // Проблеми тертя та зношування. – 2011. – № 56. – С. 142–146.

Рецензія/Peer review : 11.11.2015 р. Надрукована/Printed :4.12.2015 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Ковтун В.В.

УДК 534.1(075.8)

Ю.С. КРУТІЙ
Одеська державна академія будівництва та архітектури

ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВИМУШЕНИХ ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНЯ З ДОВІЛЬНИМИ НЕПЕРЕРВНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглядаються вимушені поздовжні коливання стержня з довільною неперервною поздовжньою жорсткістю і довільною неперервною інтенсивністю розподіленої маси при гармонічному навантаженні, з урахуванням сил опору. Знайдено точний розв'язок відповідного диференціального рівняння коливань в частинних похідних. Як наслідок, в аналітичному вигляді отримано формули для динамічного переміщення та динамічної поздовжньої сили в довільному перерізі стержня.

Ключові слова: стрижень, безперервні параметри, поздовжні коливання, безперервна маса, безперервна жорсткість, точне рішення.

Y. S. KRUTII
Odessa State Academy of construction and architecture

THE EXACT SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF FORCED LONGITUDINAL VIBRATIONS OF A ROD WITH ARBITRARY CONTINUOUS PARAMETERS

We consider forced longitudinal vibrations of a core with any continuous longitudinal rigidity and any continuous intensity of distributed mass with a harmonic load, taking into account the forces of resistance. The exact solution of the corresponding differential equation of the vibrations in partial derivatives was found. As a result, an analytical look of formulas for the dynamic displacement and dynamic longitudinal force in any section of the core were derived.

Keywords: rod, continuous parameters, longitudinal oscillations, continuous mass, continuous rigidity, the exact solution.

Вступ. Серед коливальних систем особливої уваги заслуговують стержні зі змінними параметрами. Такі стержні часто застосовуються в літакобудуванні, суднобудуванні, містобудуванні, при будівництві телевізійних веж, димових труб, опор ліній електропередач і т.п. Тому дослідження коливань таких об’єктів є важливою науковою та практичною проблемою.

Однак в процесі досліджень часто виникають проблеми, зумовлені складністю побудови точних розв’язків відповідних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. З одного боку, зрозуміло, що саме точні розв'язки таких рівнянь несуть в собі інформацію якісного характеру і формують найбільш повну картину даного явища. З іншого боку, точні розв’язки в теорії коливань являють собою рідкісний виняток.

Отже тут ми стикаємось із відомою математичною проблемою – відсутністю універсального методу прямого інтегрування звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Але відсутність методу не означає, що такі рівняння взагалі не мають аналітичного розв'язку, як це стверджується в роботі [4]. Прикладом наявності аналітичного розв’язку може слугувати публікація [3]. В якості ще одного прикладу виступає дана робота.

Стаття присвячена невирішеній до цього часу проблемі – побудові точного розв'язку диференціального рівняння вимушених поздовжніх коливань стержня з довільними неперервно-розподіленими параметрами та з урахуванням сил опору, що є актуальною науковою та практичною проблемою. Також актуальність роботи полягає в тому, що на прикладі вказаного рівняння розкривається суть нового методу прямого інтегрування звичайних диференціальних рівнянь зі змінними неперервними коефіцієнтами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблемі коливання стержнів присвячено велику кількість робіт, що зумовлено її актуальністю та практичною значимістю. Серед сучасних публікацій варто відзначити роботи [1, 5, 7–17]. При цьому значна увага приділяється коливанням стержнів зі змінними неперервними параметрами [1, 5, 12, 14, 15]. Всупереч тому, що точні розв’язки мають безсумнівну перевагу, вони зустрічаються всього для декількох видів стержнів. Фактично мова йде про випадки, коли коефіцієнти відповідних диференціальних рівнянь змінюються за біноміальними законами [1, стор. 344, 361; 8, стор. 627; 12, стор. 86]. Тоді сам розв'язок виражається через функції Бесселя. Для загального випадку констатується, що аналітичні розв’язки невідомі [1, стор. 344], або відзначається, що знайти їх не представляється можливим [15, стор. 265]. Тому переважно дослідження ґрунтуються на різного роду наближених методах.

Отже аналіз сучасних публікацій свідчить про актуальність розробки універсального методу інтегрування диференційних рівнянь зі змінними неперервними коефіцієнтами та побудови точних розв’язків для конкретних рівнянь коливань.

Постановка завдання. Будемо розглядати вимушені поздовжні коливання стержня. Відповідна розрахункова схема зображена на рис. 1.

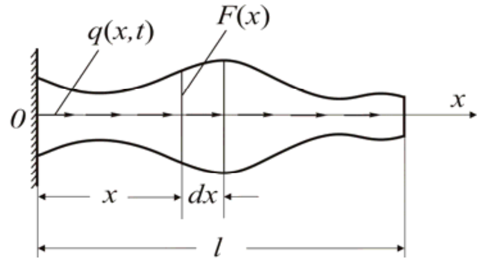

Рис. 1. Розрахункова схема стержня при поздовжніх коливаннях

Відомо [1, 14], що диференціальне рівняння вимушених поздовжніх коливань стержня з урахуванням сил опору в загальному випадку записується так

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)F(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p(x,t)-r(x,t)=q(x,t)\,, \tag{1}$$

де $E(x)F(x)-$ поздовжня жорсткість в точці x;

$E(x)-$ модуль пружності матеріалу стержня;

$F(x)-$ площа поперечного перерізу стержня;

$m(x)=\rho(x)F(x)-$ інтенсивність розподіленої маси в точці x;

$\rho(x)-$ щільність матеріалу стержня;

$p(x,t)-$ інтенсивність сил зовнішнього опору;

$r(x,t)-$ інтенсивність сил внутрішнього опору;

$q(x,t)-$ інтенсивність повздовжнього динамічного навантаження;

$u(x,t)-$ невідома функція – поздовжнє переміщення перерізу з координатою x в момент часу t.

Надалі вважаємо, що діюче на стержень динамічне навантаження є гармонічним, тобто $q(x,t)=q(x)\sin\theta t$, де $q(x)-$ довільна неперервна амплітудна функція; $\theta-$ частота змушувальної сили.

Для зовнішнього тертя приймаємо гіпотезу, за якою сила опору пропорційна масі стержня і швидкості [1, стор. 269], а внутрішнє тертя будемо враховувати за гіпотезою Кельвіна – Фойхта [1, стор. 270], згідно якій сила внутрішнього опору пропорційна швидкості деформації. В такому випадку рівняння (1) приймає вигляд

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)F(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha m(x)\frac{\partial u}{\partial t}-\beta\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(E(x)F(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=q(x)\sin\theta t\,. \tag{2}$$

де $\alpha,\beta-$ сталі коефіцієнти зовнішнього і внутрішнього тертя відповідно.

Ставиться завдання:

- знайти точний розв'язок диференціального рівняння (2) з довільними неперервно-розподіленими параметрами $E(x)F(x),\ m(x),\ q(x)$;
- отримати точні формули для динамічного переміщення та динамічної поздовжньої сили;
- розкрити суть методу прямого інтегрування звичайних диференціальних рівнянь з неперервними коефіцієнтами.

Результати. Розв'язок рівняння (2) будемо шукати з узагальненим розподілом змінних

$$u(x,t)=u_1(x)\sin\theta t+u_2(x)\cos\theta t\,, \tag{3}$$

де $u_1(x),u_2(x)-$ невідомі функції, залежні тільки від змінної x. Тоді для динамічної поздовжньої сили за відомою формулою [1]

$$N(x,t)=E(x)F(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)$$

будемо мати

$$N(x,t)=N_1(x)(\sin\theta t+\beta\theta\cos\theta t)+N_2(x)(\cos\theta t-\beta\theta\sin\theta t)\,, \tag{4}$$

де

$$N_j(x)=E(x)F(x)u_j'(x)\ (j=1,2)\,. \tag{5}$$

Як видно, динамічні параметри стержня $u(x,t),\ N(x,t)$ повністю будуть визначатися функціями $u_j(x), N_j(x)\ (j=1,2)$, які назвемо *складовими* для своїх динамічних параметрів.

Здійснивши в рівнянні (2) підстановку (3) та зібравши там подібні при тригонометричних функціях, маємо

$$\left[(E(x)F(x)u_1'(x))'+\theta^2 m(x)u_1(x)+\alpha\theta m(x)u_2(x)-\beta\theta(E(x)F(x)u_2'(x))'+q(x)\right]\sin\theta t+$$
$$+\left[(E(x)F(x)u_2'(x))'+\theta^2 m(x)u_2(x)-\alpha\theta m(x)u_1(x)+\beta\theta(E(x)F(x)u_1'(x))'\right]\cos\theta t=0.$$

Отримане рівняння повинно задовольнятись для любого значення t, що можливо тільки у випадку рівності нулю множників при функціях $\sin\theta t$ і $\cos\theta t$. В підсумку приходимо до системи диференціальних рівнянь

$$-\begin{pmatrix}1 & -\beta\theta\\ \beta\theta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(E(x)F(x)u_1'(x))'\\ (E(x)F(x)u_2'(x))'\end{pmatrix}=\theta m(x)\begin{pmatrix}\theta & \alpha\\ -\alpha & \theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(x)\\ u_2(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q(x)\\ 0\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Матриці, що фігурують в запису системи, єдиним перетворенням подібності приводяться до діагонального виду:

$$S^{-1}\begin{pmatrix}1 & -\beta\theta\\ \beta\theta & 1\end{pmatrix}S=\begin{pmatrix}1+i\beta\theta & 0\\ 0 & 1-i\beta\theta\end{pmatrix};\quad S^{-1}\begin{pmatrix}\theta & \alpha\\ -\alpha & \theta\end{pmatrix}S=\begin{pmatrix}\theta-i\alpha & 0\\ 0 & \theta+i\alpha\end{pmatrix},$$

де $S=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$, $i-$ уявна одиниця. Внаслідок цього, після заміни

$$\begin{pmatrix}u_1(x)\\ u_2(x)\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}z(x)\\ \overline{z(x)}\end{pmatrix}$$

система (6) зводиться до двох самостійних рівнянь

$$(1+i\beta\theta)(E(x)F(x)z'(x))'+\theta(\theta-i\alpha)m(x)z(x)=-\frac{q(x)}{2}\,, \tag{7}$$

$$(1-i\beta\theta)\left(E(x)F(x)\overline{z(x)}'\right)'+\theta(\theta+i\alpha)m(x)\overline{z(x)}=-\frac{q(x)}{2} \tag{8}$$

відносно нових невідомих функцій

$$z(x)=\frac{u_1(x)+iu_2(x)}{2},\ \ \overline{z(x)}=\frac{u_1(x)-iu_2(x)}{2}\,. \tag{9}$$

Важливо зазначити, що будь-яке з двох рівнянь (7), (8) можна отримати комплексним спряженням іншого. Отже, якщо $z(x)-$ розв'язок першого рівняння, то розв'язком другого буде $\overline{z(x)}$, і навпаки. Тому в подальшому є сенс розглядати тільки одне з цих рівнянь.

Виберемо для подальшого розгляду рівняння (7), яке перепишемо так

$$(E(x)F(x)z'(x))'+\lambda^2 m(x)z(x)=-\frac{q(x)}{2(1+i\beta\theta)}\,, \tag{10}$$

де $\lambda^2=\theta^2\dfrac{1-i\,\alpha/\theta}{1+i\beta\theta}$. Запишемо також систему диференціальних рівнянь, рівносильну даному рівнянню

$$\frac{dZ(x)}{dx}=P(x)Z(x)-f(x)\,. \tag{11}$$

В цій системі вектор невідомих, матриця коефіцієнтів та вектор правої частини мають вигляд:

$$Z(x)=\begin{pmatrix}z(x)\\ E(x)F(x)z'(x)\end{pmatrix};\ P(x)=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{E(x)F(x)}\\ -\lambda^2 m(x) & 0\end{pmatrix};\ f(x)=\frac{q(x)}{2(1+i\beta\theta)}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Для побудови точного розв'язку рівняння (10) застосуємо метод прямого інтегрування, суть якого вперше було викладено в роботі [3]. Згідно з цим методом, розглянемо три нескінченних системи поки що невідомих функцій $a_{n,0}(x),\ a_{n,k}(x)\ (n=1,2,3)\ (k=1,2,3,...)$, які вважаємо неперервними разом зі своїми першою та другою похідними. Дотримуючись термінології, що була прийнята в [3], функції $a_{n,0}(x)$ будемо називати *початковими*, а $a_{n,k}(x)$ – *твірними*.

Створимо за допомогою введених функцій та їх похідних ряди по степеням параметра $-\lambda^2$:

$$U_n(x) = a_{n,0}(x) - \lambda^2 a_{n,1}(x) + \lambda^4 a_{n,2}(x) - \lambda^6 a_{n,3}(x) + \cdots ; \tag{12}$$

$$U'_n(x) = a'_{n,0}(x) - \lambda^2 a'_{n,1}(x) + \lambda^4 a'_{n,2}(x) - \lambda^6 a'_{n,3}(x) + \cdots ; \tag{13}$$

$$\begin{aligned}(E(x)F(x)U'_n(x))' &= (E(x)F(x)a'_{n,0}(x))' - \lambda^2 (E(x)F(x)a'_{n,1}(x))' + \\ &+ \lambda^4 (E(x)F(x)a'_{n,2}(x))' - \lambda^6 (E(x)F(x)a'_{n,3}(x))' + \cdots .\end{aligned} \tag{14}$$

Поки припускаємо, що всі ряди рівномірно збігаються на відрізку $x \in [0, l]$.

Функції перших двох систем $a_{n,0}(x), a_{n,k}(x)\ (n = 1,2)\ (k = 1,2,3,...)$ знайдемо із умови, що $U_n(x)\ (n = 1,2)$ задовольняє однорідному рівнянню, яке відповідає (10), тобто

$$(E(x)F(x)U'_n(x))' + \lambda^2\, m(x)U_n(x) = 0\ (n = 1,2) . \tag{15}$$

Функції третьої системи $a_{3,0}(x), a_{3,k}(x)\ (k = 1,2,3,...)$ будемо шукати із умови, що $U_*(x) = -\dfrac{1}{2(1 + i\beta\theta)} U_3(x)$ задовольняє неоднорідному рівнянню (10), тобто

$$(E(x)F(x)U'_3(x))' + \lambda^2\, m(x)U_3(x) = q(x) . \tag{16}$$

Підставляючи в (15), (16) замість $U_n(x), (E(x)F(x)\,U'_n(x))'\ (n = 1,2,3)$ відповідні їм ряди (12), (14), приходимо до наступних рівностей, що повинні задовольнятись для любого значення параметра $-\lambda^2$:

$$(E(x)F(x)a'_{n,0}(x))' + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \lambda^{2k} \left[(E(x)F(x)a'_{n,k}(x))' - m(x)a_{n,k-1}(x) \right] = 0\ (n = 1,2) ;$$

$$(E(x)F(x)a'_{3,0}(x))' - q(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \lambda^{2k} \left[(E(x)F(x)a'_{3,k}(x))' - m(x)a_{3,k-1}(x) \right] = 0 .$$

Прирівнюючи в цих рівностях до нуля всі коефіцієнти при степенях $-\lambda^2$, включаючи нульову степінь, будемо мати:

$$(E(x)F(x)a'_{n,0}(x))' = 0\ (n = 1,2) ; \tag{17}$$

$$(E(x)F(x)a'_{3,0}(x))' = q(x) ; \tag{18}$$

$$(E(x)F(x)a'_{n,k}(x))' = m(x)a_{n,k-1}(x)\ (n = 1,2,3)\ (k = 1,2,3,...) . \tag{19}$$

Отже, для знаходження початкових та твірних функцій маємо диференціальні рівняння. Виписуючи фундаментальну систему функцій однорідного рівняння (17) та частинний розв'язок неоднорідного рівняння (18), визначаємо початкові функції

$$a_{1,0}(x) = 1,\ a_{2,0}(x) = \int_0^x \frac{1}{E(x)F(x)} dx,\ a_{3,0}(x) = \int_0^x \frac{1}{E(x)F(x)} \int_0^x q(x)dxdx . \tag{20}$$

Перед інтегруванням рівняння (19) задамо граничні умови

$$a_{n,k}(0) = E(0)F(0)a'_{n,k}(0) = 0 \quad (n = 1,2,3)\ (k = 1,2,3,...) . \tag{21}$$

Тоді для твірних функцій знаходимо

$$a_{n,k}(x) = \int_0^x \frac{1}{E(x)F(x)} \int_0^x m(x)a_{n,k-1}(x)dxdx\ (n = 1,2,3)\ (k = 1,2,3,...) . \tag{22}$$

Таким чином, знайдено рекурентну формулу, яка дозволяє кожній початковій функції $a_{n,0}(x)$ поставити у відповідність свою нескінченну систему твірних функцій $a_{n,k}(x)$. Для таких функцій рівності (15), (16) задовольняються за побудовою.

Формулу (22) можна також представити в розгорнутому вигляді

$$a_{n,k}(x) = \int_0^x \frac{1}{E(x)F(x)} \int_0^x m(x) \ldots \int_0^x \frac{1}{E(x)F(x)} \int_0^x m(x)a_{n,0}(x)\ dxdx\ \ldots\ dxdx . \tag{23}$$

Кількість інтегралів в даній формулі, без врахування інтегралів, через які визначені початкові функції, дорівнює $2k$.

Доведемо тепер, що ряд (12) рівномірно збігається. Вводячи позначення

$$g_1 = \max\nolimits_{x\in[0,l]} m(x)\ ,\ \ g_2 = \max\nolimits_{x\in[0,l]} \frac{1}{E(x)F(x)},\ \ h_n = \max\nolimits_{x\in[0,l]} \left| a_{n,0}(x) \right| ,$$

за допомогою (23) отримаємо оцінки

$$\left| a_{n,k}(x) \right| \le h_n (g_1 g_2)^k \left| \int_0^x \int_0^x \ldots \int_0^x \int_0^x dxdx \ldots dxdx \right| = h_n (g_1 g_2)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\ \ (k = 1,2,3,...) .$$

Тоді для ряду із модулів будемо мати

$$\left|a_{n,0}(x)\right| + \left|\lambda^2 a_{n,1}(x)\right| + \left|\lambda^2 a_{n,1}(x)\right| + \cdots \le h_n \left(1 + g_1 g_2 \lambda^2 \frac{x^2}{2!} + (g_1 g_2)^2 \lambda^4 \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) = h_n \ \mathrm{ch}\sqrt{g_1 g_2}\lambda x \ .$$

Отже, с точністю до множника h_n, в ролі мажоранти тут виступає елементарна функція $\mathrm{ch}\sqrt{g_1 g_2}\lambda x$. Тим самим доведено, що ряд (12) збігається абсолютно і рівномірно на відрізку $x \in [0, l]$.

Абсолютна і рівномірна збіжність ряду (13) доводиться аналогічно. Збіжність ряду (14) взагалі не потребує доведення, оскільки він згідно з тотожностями (15), (16) відрізняється від ряду (12) тільки множником та скалярним доданком. Як наслідок, ряди (12), (13) можна почленно диференціювати, а це означає, що вибрані раніше позначення $U_n'(x)$ і $(E(x)F(x)\,U_n'(x))'$ для рядів (13) і (14) законні.

Кожному із розв'язків $U_n(x)\,(n = 1,2)$ однорідного рівняння, що відповідає (10), поставимо у відповідність вектор

$$\Phi_n(x) = \begin{pmatrix} U_n(x) \\ E(x)F(x)U_n'(x) \end{pmatrix} (n = 1,2). \tag{24}$$

Безпосередньою підстановкою легко впевнитись, що такі вектори будуть розв'язками однорідної системи диференціальних рівнянь, що відповідає системі (11). Тоді матриця, складена із цих векторів

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} U_1(x) & U_2(x) \\ E(x)F(x)U_1'(x) & E(x)F(x)U_2'(x) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

також буде задовольняти вказаній системі.

Знайдемо значення матриці $\Lambda(x)$ в точці $x = 0$. Для цього спочатку виведемо формулу для вектора $\Phi_n(0)\ (n = 1,2)$. Вважаючи $x = 0$ в формулах (12), (13) та враховуючи граничні умови (21), отримуємо

$$\Phi_n(0) = \begin{pmatrix} U_n(0) \\ E(0)F(0)U_n'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,0}(0) \\ E(0)F(0)a_{n,0}'(0) \end{pmatrix} (n = 1,2).$$

Звідси, врахувавши (20), знаходимо $\Phi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Phi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ і, як наслідок,

$$\Lambda(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Зважаючи на нерівність $\left|\Lambda(0)\right| = 1 \ne 0$ заключаємо, що вектори (24) лінійно незалежні [6, стор. 186], тобто матриця (25) являє собою фундаментальну матрицю системи. Як відомо [2, стор. 405], фундаментальна матриця, яка задовольняє умові (26), знаходиться однозначно і називається матрицантом.

За допомогою частинного розв'язку $U_*(x)$ рівняння (10) створимо вектор

$$\Psi_*(x) = \begin{pmatrix} U_*(x) \\ E(x)F(x)U_*'(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2(1+i\beta\theta)} \begin{pmatrix} U_3(x) \\ E(x)F(x)U_3'(x) \end{pmatrix},$$

який буде частинним розв'язком системи (11), в чому легко переконатись безпосередньою перевіркою. Для цього вектора, враховуючи (21), та приймаючи до уваги, що $a_{3,0}(0) = E(0)F(0)a_{3,0}'(0) = 0$, знаходимо

$$\Psi_*(0) = -\frac{1}{2(1+i\beta\theta)} \begin{pmatrix} U_3(0) \\ E(0)F(0)U_3'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись тепер відомою формулою [6, стор. 185], легко виписати загальний розв'язок системи (11)

$$Z(x) = \Lambda(x)Z(0) + \Psi_*(x). \tag{27}$$

З іншого боку, враховуючи (5), (9), для вектора $Z(x)$ можемо записати

$$Z(x) = \begin{pmatrix} z(x) \\ E(x)F(x)z'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1(x) + iu_2(x) \\ N_1(x) + iN_2(x) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Переписуючи тепер матричну рівність (27) в розгорнутому вигляді та враховуючи при цьому (28), приходимо до формул:

$$u_1(x) + iu_2(x) = (u_1(0) + iu_2(0))U_1(x) + (N_1(0) + iN_2(0))U_2(x) - \frac{U_3(x)}{1+i\beta\theta}; \tag{29}$$

$$N_1(x) + iN_2(x) = E(x)F(x)\left((u_1(0) + iu_2(0))U_1'(x) + (N_1(0) + iN_2(0))U_2'(x) - \frac{U_3'(x)}{1+i\beta\theta}\right). \tag{30}$$

Таким чином, знайдено комплексні функції, дійсною частиною яких є складові $u_1(x), N_1(x)$, а в ролі уявної частини виступають складові $u_2(x), N_2(x)$. Відповідно з цим будемо розрізняти *дійсні* та *уявні складові* динамічних параметрів.

Виходячи з рівності $U_n(x) = \mathrm{Re}U_n(x) + i\,\mathrm{Im}U_n(x)\ (n = 1,2,3)$, відокремимо в правих частинах формул (29), (30) дійсну і уявну частину. В підсумку, для дійсних складових динамічних параметрів отримаємо:

$$u_1(x) = u_1(0)\,\mathrm{Re}U_1(x) + N_1(0)\,\mathrm{Re}U_2(x) - \\ -u_2(0)\,\mathrm{Im}U_1(x) - N_2(0)\,\mathrm{Im}U_2(x) - \frac{\mathrm{Re}U_3(x) + \beta\theta\,\mathrm{Im}U_3(x)}{1+\beta^2\theta^2}; \tag{31}$$

$$N_1(x) = E(x)F(x)\begin{pmatrix} u_1(0)\,\mathrm{Re}U_1'(x) + N_1(0)\,\mathrm{Re}U_2'(x) - \\ -u_2(0)\,\mathrm{Im}U_1'(x) - N_2(0)\,\mathrm{Im}U_2'(x) - \dfrac{\mathrm{Re}U_3'(x) + \beta\theta\,\mathrm{Im}U_3'(x)}{1+\beta^2\theta^2} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Для уявних складових динамічних параметрів будемо мати

$$u_2(x) = u_2(0)\,\mathrm{Re}U_1(x) + N_2(0)\,\mathrm{Re}U_2(x) + \\ +u_1(0)\,\mathrm{Im}U_1(x) + N_1(0)\,\mathrm{Im}U_2(x) - \frac{\mathrm{Im}U_3(x) - \beta\theta\,\mathrm{Re}U_3(x)}{1+\beta^2\theta^2}; \tag{33}$$

$$N_2(x) = E(x)F(x)\begin{pmatrix} u_2(0)\,\mathrm{Re}U_1'(x) + N_2(0)\,\mathrm{Re}U_2'(x) + \\ +u_1(0)\,\mathrm{Im}U_1'(x) + N_1(0)\,\mathrm{Im}U_2'(x) - \dfrac{\mathrm{Im}U_3'(x) - \beta\theta\,\mathrm{Re}U_3'(x)}{1+\beta^2\theta^2} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Для повної визначеності осталось відокремити в явному вигляді дійсні і уявні частини для функцій $U_n(x)\ (n = 1,2,3)$. Для цього представимо число λ^2 в тригонометричній формі. Виходячи з тригонометричної форми запису чисел $1 - i\alpha/\theta$ та $1 + i\beta\theta$, для числа λ^2 будемо мати

$$\lambda^2 = \theta^2\frac{1 - i\alpha/\theta}{1 + i\beta\theta} = \theta^2\sqrt{\frac{1+(\alpha/\theta)^2}{1+\beta^2\theta^2}}(\cos\gamma - i\sin\gamma),$$

де $\gamma = \mathrm{arctg}\,\alpha/\theta + \mathrm{arctg}\,\beta\theta$. Тоді за формулою Муавра

$$\lambda^{2k} = \theta^{2k}\left(\frac{1+(\alpha/\theta)^2}{1+\beta^2\theta^2}\right)^{\frac{k}{2}}(\cos k\gamma - i\sin k\gamma). \tag{35}$$

В результаті, виходячи з (12), (35), приходимо до необхідної форми запису

$$U_n(x) = a_{n,0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\lambda^{2k}a_{n,k}(x) = \\ = a_{n,0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\Theta^{2k}\cos k\gamma\, a_{n,k}(x) - i\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\Theta^{2k}\sin k\gamma\, a_{n,k}(x)\ (n = 1,2,3), \tag{36}$$

де $\Theta = \theta\sqrt[4]{\dfrac{1+(\alpha/\theta)^2}{1+\beta^2\theta^2}}$.

Таким чином, формулами (3), (4), (31)– (34), (36) повністю визначені динамічні параметри стержня. Зокрема, знайдено точний розв'язок рівняння (2). Довільні константи в формулах (31) – (34) представлені у вигляді начальних значень дійсних та уявних складових динамічних параметрів (*початкові параметри*). Вказані константи при розв'язанні конкретних задач знаходяться із граничних умов на кінцях стержня.

Наприкінці вкажемо на рівносильну форму запису формул (3), (4):

$$u(x,t) = u(x)\sin(\theta t + \delta_u(x)),\ u(x) = \sqrt{u_1^2(x) + u_2^2(x)},\ \delta_u(x) = \mathrm{arctg}\frac{u_2(x)}{u_1(x)};$$

$$N(x,t) = N(x)\sin(\theta t + \delta_N(x)),$$

$$N(x) = \sqrt{(N_1(x) - \beta\theta N_2(x))^2 + (N_2(x) + \beta\theta N_1(x))^2},$$

$$\delta_N(x) = \mathrm{arctg}\frac{N_2(x) + \beta\theta N_1(x)}{N_1(x) - \beta\theta N_2(x)}.$$

Під час дослідження коливань такі формули зручніші, оскільки в них явно виділені амплітудні функції своїх динамічних параметрів.

Висновки. В роботі знайдено точний розв'язок диференціального рівняння вимушених поздовжніх гармонічних коливань стержня з довільними неперервними параметрами та з урахуванням сил опору. В аналітичному вигляді отримано формули для динамічних коливань та динамічних внутрішніх зусиль, що відкриває перспективу створення нового методу дослідження поздовжніх коливань стержня. Для цього достатньо вказати ефективний метод чисельної реалізації знайдених точних формул, чому планується присвятити наступну статтю.

Подальші перспективи також пов'язані із можливим застосуванням нового методу прямого інтегрування до інших диференціальних рівнянь механіки зі змінними неперервними коефіцієнтами.

Литература

1. Василенко М.В. Теорія коливань і стійкості руху / М.В. Василенко, О.М. Алексейчук. – К. : Вища шк., 2004. – 525 с.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Гантмахер Ф.Р. – М. : Наука, 1988. – 552 с.

3. Крутий Ю.С. Точное решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной переменной массой / Ю.С. Крутий // Строит. мех. и расчет сооруж. – 2011. – № 5. – С. 47–53.

4. Погребицкая А.М. К вопросу эффективности метода ВКБ–Галеркина в дифференциальных уравнениях с переменными коэффициентами / А.М. Погребицкая // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 1. – С. 82–87.

5. Трубачев С.И. Колебания стержней переменного сечения / С.И. Трубачев, О.Н. Алексейчук // Механіка гіроскоп. систем. – 2010. – Вип. 21 – С. 123–127.

6. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Федорюк М.В. – М. : Наука, 1985. – 448 с.

7. Baddour N. (Ed.) Recent Advances in Vibrations Analysis. In Tech, 2011. 236 p.

8. Balakumar Balachandran, Magrab E.B. Vibrations. 2th Edition. Cengage Learning, 2008. 736 p.

9. Buchacz A., Żółkiewski S. Longitudinal vibrations of mechanical systems with the transportation effect. J. Achievements Mater. Manufact. Eng. 2009. 32, No. 1. p. 29–36.

10. Ebrahimi F. (Ed.) Advances in Vibration Analysis Research. In Tech, 2011. 456 p.

11. Lai H.-L., Hsu J.-C., Chen C.-K. An innovative eigenvalue problem solver for free vibration of Euler-Bernoulli beam by using the Adomian Decomposition Method. Comput. Math. Appl. 2008. 56, No.12. p. 3204–3220.

12. Leissa A.W., Qatu M.S. Vibrations of continuous systems. McGraw-Hill, 2011. 507 p.

13. Mao Q., Pietrzko S. Free vibration analysis of stepped beams by using Adomian decomposition Method. Appl. Math. Comput. 2010. 217, No.7. p. 3429–3441.

14. Rao S.S. Mechanical Vibrations. 5th Edition. Pearson Education, 2010. 1104 p.

15. Sinha A. Vibration of Mechanical Systems. Cambridge University Press, 2010. 324 p.

16. Wang C.Y., Wang C.M. Structural Vibration: Exact Solutions for Strings, Membranes, Beams, and Plates. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2014. 290 p.

17. Yavari A., Sarkani S., Reddy J.N. On nonuniform Euler - Bernoulli and Timoshenko beams with jump discontinuities: application of distribution theory. Int. J. Solids Struct. 2001. 38, No. 46. p. 8389–8406.

Рецензія/Peer review : 17.11.2015 р. Надрукована/Printed :4.12.2015 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Параска Г.Б.

УДК 621.7: 519.85

О.В. ПЕТРОВ, С.І. СУХОРУКОВ, М.В. ТРОФИМЧУК, В.А. ПОДОЛЯК
Вінницький національний технічний університет

ЗАСОБИ АВТОМАТИЗАЦІЇ РОЗРАХУНКІВ ПАРАМЕТРІВ ЗАТИСКНИХ ПРИСТРОЇВ ДЛЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОПЕРАЦІЙ МЕХАНІЧНОЇ ОБРОБКИ

В роботі представлені комп'ютерні програми, які дозволяють розраховувати величину сили закріплення та вихідне зусилля у затискних пристроях гвинтового, ексцентрикового та комбінованого типів, що використовуються під час проектування верстатних пристосувань. Розглянуті програми мають зручний інтерфейс, містять великий набір схем різання та закріплення заготовок, а також довідникові дані, що підвищує ефективність опрацювання вхідних даних та отримання значень конструктивних параметрів верстатних пристосувань.

Ключові слова: механічна обробка, заготовка, затискний пристрій, комп'ютерна програма.

O.V. PETROV, S.I. SUKHORUKOV, M.V. TROFYMCHUK, V.A. PODOLYAK
Vinnytsia National Technical University, Ukraine

AUTOMATION TOOLS FOR CALCULATING PARAMETERS OF CLAMPING DEVICES FOR MACHINING PROCESSES

Abstract – The paper presents software that enables computation of the holding force value and output force in clamping devices of screw, eccentric and combined types, which are used for designing machine-tool accessories. The presented software has user-friendly interface, a wide range of cutting and workpiece holding schemes as well as reference data, which increases the efficiency of initial data processing and obtaining the values of design parameters of machine-tool accessories.

Keywords: machining process, workpiece, clamping device, software.

Вступ

Під час виконання будь-якої технологічної операції використовується різноманітне оснащення, наприклад: пристосування, допоміжні інструменти, транспортне і завантажувальне оснащення та ін. Без застосування технологічного оснащення у виробництві обійтися практично неможливо. Причому це