УДК 669.1:537.5

Г.М. СОКОЛОВА
Хмельницький національний університет

МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОФАКТОРНИХ ПРОЦЕСІВ З ВЗАЄМОЗАЛЕЖНИМИ ФАКТОРАМИ ВПЛИВУ

Проаналізовані відомі методи формування математичних моделей з точки зору їхньої прийнятності для моделювання реальних фізичних процесів, вихідні фактори впливу яких пов'язані нелінійними залежностями. Запропонована методика формування математичних моделей багатофакторних процесів із взаємозалежними факторами впливу.

Ключові слова: моделювання, математична модель, взаємозалежні фактори

G.M. SOKOLOVA
Khmelnitsky National University

MODELING OF MULTIFACTORIAL PROCESSES WITH INTERDEPENDENT FACTORS OF INFLUENCE

The known methods of forming mathematical models in the terms of their suitability for modeling of real physical processes with interdependent factors are analyzed.

The method of the forming of mathematical models of multifactorial processes with interdependent factors of influence is offered. The technique is based on the known modeling methods (forming of multifactorial processes analytical models by successive exclusion of impacts, *mathematical modeling of multifactorial processes and multicomponent systems based on constructive geometry, forming of optimization models of multifactorial processes by means of descriptive geometry of multidimensional space). The offered method combines the elements of all these methods.*

The logic of the offered model algorithm makes it possible to automate the process of its formation with the software developed in any computer system.

Keywords: modeling, mathematical model, interrelated factors

Вступ

Найбільш поширеним на сьогодні способом математичного моделювання багатофакторних процесів залишається метод планування експерименту (ПЕ), який дозволяє отримувати моделі процесів, використовуючи факторне планування та регресійний аналіз. Втім, вказаний метод має багато недоліків, чи не основним з яких є постулат апріорної відомості істинної структури регресійної моделі. На нього спирається уся традиційна теорія ПЕ, хоча при проведенні прикладних досліджень у переважній більшості випадків вказати цю структуру неможливо. Іншою, не менш серйозною проблемою є відсутність у традиційній методології ПЕ засобів роботи з нестандартними областями факторного простору. Усі плани розраховані на роботу у деякій стандартній його області, якою є гіперпаралелепіпед або гіперкуля, що далеко не завжди спостерігається у реальних задачах [1].

Остання проблема тісно пов'язана із вимогою незалежності факторів досліджуваного процесу, що є обов'язковою умовою застосування методу ПЕ, яка далеко не завжди може бути дотримана на практиці, результатом чого є ігнорування впливу окремих факторів і, як наслідок, недостатня точність, а інколи й абсолютна неприйнятність отриманих математичних моделей.

Аналіз джерел за темою дослідження

Серед існуючих методів математичного моделювання багатофакторних процесів, що дозволяють прогнозувати їхні результати залежно від взаємозалежних факторів впливу, варто виділити описані у роботах [2] та [3]. Перший надає можливість на базі конструктивної геометрії формувати аналітичні залежності, які пов'язують результуючий параметр з усім комплексом вихідних факторів – як незалежних, тобто таких, значення яких може бути встановлене на будь-якому рівні незалежно від рівнів інших факторів, так і тих, значення яких виступають функцією вказаних незалежних факторів. Таким чином, кінцева модель виявляється штучно переобтяженою, оскільки встановлення залежності результатів досліджуваного процесу від показників, які уже містять у собі інформацію про вплив незалежних факторів, було б цілком достатнім. Другий зі згаданих методів дозволяє будувати графічні моделі багатофакторних процесів із використанням методологічного апарату нарисної геометрії багатовимірного простору. При всій простоті та наочності цього методу його застосування варто визнати надто трудомістким, а точність доволі відносною, оскільки вона визначається точністю побудов та вимірювань.

Постановка завдання

Оскільки у реальних процесах значення вихідних факторів можуть бути взаємопов'язаними, а їх ігнорування може як знижувати точність розроблюваної моделі, так і абсолютно її нівелювати, постає задача розробки методики формування моделей багатофакторних процесів із взаємозалежними факторами впливу. Пропонована методика базується на відомих способах моделювання [2–4], органічно поєднуючи їхні елементи.

Виклад основного матеріалу

Нехай масив експериментальних даних задано матрицею M_1, де A, B, C, D, E – вихідні фактори впливу, причому C, D, E – нелінійно залежать від A та B, а R – цільова функція.

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & R_1 \\ A_1 & B_1 & C_2 & D_2 & E_2 & R_2 \\ A_1 & B_1 & C_3 & D_3 & E_3 & R_3 \\ A_1 & B_2 & C_4 & D_4 & E_4 & R_4 \\ A_1 & B_2 & C_5 & D_5 & E_5 & R_5 \\ A_1 & B_2 & C_6 & D_6 & E_6 & R_6 \\ A_1 & B_3 & C_7 & D_7 & E_7 & R_7 \\ A_1 & B_3 & C_8 & D_8 & E_8 & R_8 \\ A_1 & B_3 & C_9 & D_9 & E_9 & R_9 \\ A_2 & B_1 & C_{10} & C_{10} & E_{10} & R_{10} \\ A_2 & B_1 & C_{11} & D_{11} & E_{11} & R_{11} \\ A_2 & B_1 & C_{12} & D_{12} & E_{12} & R_{12} \\ A_2 & B_2 & C_{13} & D_{13} & E_{13} & R_{13} \\ A_2 & B_2 & C_{14} & D_{14} & E_{14} & R_{14} \\ A_2 & B_2 & C_{15} & D_{15} & E_{15} & R_{15} \\ A_2 & B_3 & C_{16} & D_{16} & E_{16} & R_{16} \\ A_2 & B_3 & C_{17} & D_{17} & E_{17} & R_{17} \\ A_2 & B_3 & C_{18} & D_{18} & E_{18} & R_{18} \\ A_3 & B_1 & C_{19} & D_{19} & E_{19} & R_{19} \\ A_3 & B_1 & C_{20} & D_{20} & E_{20} & R_{20} \\ A_3 & B_1 & C_{21} & D_{21} & E_{21} & R_{21} \\ A_3 & B_2 & C_{22} & D_{22} & E_{22} & R_{22} \\ A_3 & B_2 & C_{23} & D_{23} & E_{23} & R_{23} \\ A_3 & B_2 & C_{24} & D_{24} & E_{24} & R_{24} \\ A_3 & B_3 & C_{25} & D_{25} & E_{25} & R_{25} \\ A_3 & B_3 & C_{26} & D_{26} & E_{26} & R_{26} \\ A_3 & B_3 & C_{27} & D_{27} & E_{27} & R_{27} \end{pmatrix}.$$

Необхідно створити модель, що дозволить розраховувати значення R_x цільової функції при заданій комбінації взаємопов'язаних факторів C, D, E: $C = C_x$, $D = D_x$, $E = E_x$.

Варто зауважити, що формування моделі з використанням у якості вихідних факторів впливу виключно залежних показників, що по суті є функцією незалежних факторів, має сенс лише в тому випадку, коли між вказаними величинами існує однозначний зв'язок, тобто кожній унікальній комбінації незалежних факторів відповідає лише одна комбінація залежних факторів.

Створення моделі відбувається у кілька етапів.

1. Визначення залежностей $f_{1i} = E(C)$ та $f_{2i} = E(D)$.

Для визначення вказаних залежностей досліджувані фактори (при рівних значеннях факторів, від яких вони залежать) представляються як координати точок, через які необхідно провести деяку лінію і скласти її рівняння. Ця задача може бути вирішена у два способи [2]:

1) проведенням через заданий масив точок з певною точністю наближення апроксимуючої кривої $y = \varphi(x)$; у якості критерію точності апроксимації, як правило, приймається мінімум суми квадратів відхилення розрахункових значень апроксимуючої функції від експериментальних даних;

2) проведенням через заданий масив точок інтерполяційної кривої $y = f(x)$, інцидентної кільком точкам A_i заданого масиву.

У прикладі, що розглядається, доцільно обрати другий спосіб, оскільки кількість вузлів інтерполювання дорівнюватиме трьом, а отже залежність з високим степенем точності може бути описана поліномом другого порядку.

У випадку встановлення залежностей $f_{1i} = E(C)$ координатами інтерполяції будуть:

при $A = A_1$, $B = B_1$: (C_1, E_1), (C_2, E_2), (C_3, E_3);

при $A = A_1$, $B = B_2$: (C_4, E_4), (C_5, E_5), (C_6, E_6);

при $A = A_1$, $B = B_3$: (C_7, E_7), (C_8, E_8), (C_9, E_9) і т. д.

Таким, чином у результаті буде отримано дев'ять поліномів другого порядку, коефіцієнти яких можуть бути подані у вигляді матриці $M_2 = m \times n$, де в загальному випадку m – кількість отриманих рівнянь; n – кількість коефіцієнтів апроксимуючої чи інтерполяційної функції.

Коефіцієнти можуть бути обчислені у системі MathCAD за допомогою спеціальних вбудованих у неї функцій: *regress* (*VX, VY, n*), якщо залежність є поліноміальною, або *genfit*, якщо залежність описується функцією довільного виду.

Аналогічним чином визначається матриця M_3 коефіцієнтів залежності $f_{2i} = E(D)$; $M_3 = m \times n$.

2. За знайденими залежностями знаходяться значення, які приймає фактор E залежно від решти факторів при $C = C_x$ (вектор-стовпець M_4) та при $D = D_x$ (вектор-стовпець M_5).

$$M_4 = \begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \\ \dots \\ E'_9 \end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix} E'_{10} \\ E'_{11} \\ \dots \\ E'_{18} \end{pmatrix}.$$

3. Визначення залежностей $f_{3i} = R(E)$.

Вказані залежності встановлюються за принципом, описаним у п. 1. У результаті буде отримана матриця коефіцієнтів $M_6 = m \times n$.

4. За знайденими у п. 3 залежностями обчислюється значення параметра R при значеннях фактора E, заданих матрицями M_4 та M_5, тобто при $C = C_x$ та $D = D_x$. У результаті будуть отримані матриці M_7 та M_8.

$$M_7 = \begin{pmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ \dots \\ R'_9 \end{pmatrix}; \qquad M_8 = \begin{pmatrix} R'_{10} \\ R'_{11} \\ \dots \\ R'_{18} \end{pmatrix}.$$

5. З урахуванням проведених перетворень спрощена матриця вихідних даних прийме вигляд:

$$M_9 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & E'_1 & E'_{10} & R'_1 & R'_{10} \\ A_1 & B_2 & E'_2 & E'_{11} & R'_2 & R'_{11} \\ A_1 & B_3 & E'_3 & E'_{12} & R'_3 & R'_{12} \\ A_2 & B_1 & E'_4 & E'_{13} & R'_4 & R'_{13} \\ A_2 & B_2 & E'_5 & E'_{14} & R'_5 & R'_{14} \\ A_2 & B_3 & E'_6 & E'_{15} & R'_6 & R'_{15} \\ A_3 & B_1 & E'_7 & E'_{16} & R'_7 & R'_{16} \\ A_3 & B_2 & E'_8 & E'_{17} & R'_8 & R'_{17} \\ A_3 & B_3 & E'_9 & E'_{18} & R'_9 & R'_{18} \end{pmatrix}$$

6. Визначення залежностей $f_{4j} = R(E)$ при $C = C_x$ та $f_{5j} = R(E)$ при $D = D_x$.

Вказані залежності встановлюються за принципом, описаним у п. 1.

Значення фактора E та параметра R, які вони приймають при $C = C_x$ є елементами матриць M_4 та M_7 відповідно, отже координати інтерполяції для $f_{4j} = R(E)$:

при $A = A_1$: (E'_1, R'_1), (E'_2, R'_2), (E'_3, R'_3);

при $A = A_2$: (E'_4, R'_4), (E'_5, R'_5), (E'_6, R'_6);

при $A = A_3$: (E'_7, R'_7),(E'_8, R'_8),(E'_9, R'_9).

Аналогічно за елементами матриць M_5 та M_8 визначаються координати інтерполяції для $f_{5j} = R(E)$ при $D = D_x$:

при $A = A_1$: (E'_{10}, R'_{10}), (E'_{11}, R'_{11}), (E'_{12}, R'_{12});

при $A = A_2$: (E'_{13}, R'_{13}), (E'_{14}, R'_{14}), (E'_{15}, R'_{15});

при $A = A_3$: (E'_{16}, R'_{16}), (E'_{17}, R'_{17}), (E'_{18}, R'_{18}).

Отримані коефіцієнти залежностей можуть бути представлені матрицями M_{10} та M_{11}:

$$M_{10} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{21} & k_{22} & k_{32} \\ k_{31} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix} \qquad M_{11} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{21} & l_{22} & l_{32} \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix}$$

7. Визначення залежностей $f_{6g} = R(E)$ при заданій комбінації $C = C_x$ та $D = D_x$.

Згідно з п. 6 залежність $R(E)$ при $A = A_1$ та $C = C_x$ описується поліномом:

$$R(E) = k_{11} + k_{21} \cdot E' + k_{21} \cdot E'^2. \quad (1)$$

Відповідно при $A = A_1$ та $D = D_x$:

$$R(E) = l_{11} + l_{21} \cdot E' + l_{21} \cdot E'^2. \quad (2)$$

Очевидно, що значення, яке приймає фактор E при $A = A_1$, $C = C_x$ та $D = D_x$, можна знайти, прирівнявши вирази (1) та (2). Позначимо його E_1''.

Аналогічно знаходяться значення E_2'' (при $A = A_2$, $C = C_x$ та $D = D_x$) та E_3'' (при $A = A_3$, $C = C_x$ та $D = D_x$).

Значення параметра R_1'' може бути знайдено шляхом підстановки E_1'' у рівняння (1) або (2). За тим самим принципом обчислюються значення R_2'' та R_3''.

Таким чином, визначені координати інтерполяції для встановлення залежності $f_{6g} = R(E)$ при комбінації факторів $C = C_x$ та $D = D_x$: (E_1'', R_1''), (E_2'', R_2''), (E_3'', R_3''). Коефіцієнти інтерполяційного полінома представлені вектор-рядком $M_{13} = (m_1 \quad m_2 \quad m_3)$, тобто отримана залежність матиме вигляд:

$$R = m_1 + m_2 \cdot E + m_3 \cdot E^2.$$

Звідси при $E = E_x$:

$$R_x = m_1 + m_2 \cdot E_x + m_3 \cdot E_x^2.$$

Наведений алгоритм формування математичної моделі може бути повністю автоматизований (наприклад, у системі MathCAD), що дозволить визначати значення цільової функції при заданій комбінації взаємозалежних факторів впливу без проведення проміжних розрахунків.

Висновки

Запропонована методика формування математичних моделей багатофакторних процесів із взаємозалежними факторами впливу. Методика базується на відомих способах моделювання (побудова аналітичних моделей багатофакторних процесів шляхом послідовного виключення факторів, математичне моделювання багатофакторних та багатопараметричних процесів у багатокомпонентних системах на базі конструктивної геометрії, побудова графічних оптимізаційних моделей багатофакторних процесів засобами нарисної геометрії багатовимірного простору) і органічно поєднує їхні елементи. Логіка наведеного алгоритму побудови моделі дозволяє автоматизувати процес її формування за допомогою програмного продукту, розробленого у будь-якій обчислювальній системі.

Література

1. Лапач С. Н. Основные проблемы построения регрессионных моделей / С. Н. Лапач, С. Г. Радченко // Математичні машини і системи. – 2012. – № 4. – С. 125–133.

2. Вертинская Н. Д. Математическое моделирование многофакторных и многопараметрических процессов в многокомпонентных системах на базе конструктивной геометрии : лекции / Н. Д. Вертинская. – Иркутск : Изд-во Иркутского государственного технического университета, 2009. – 169 с.

3. Чижик М. А. Алгоритмы конструирования графических оптимизационных моделей многофакторных процессов / М. А. Чижик, К. С. Яковенко, В. Я. Волков // Омский научный вестник. – 2012. – № 1. – С. 17–20.

4. Пастух І. М. Методика обробки даних багатофакторних моделей / І. М. Пастух // Вісник ТУП. – 2002. – № 6. – С. 42–46.

Рецензія/Peer review : 11.1.2016 р. Надрукована/Printed : 11.2.2016 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Пастух І.М.