

УДК 534.1(075.8)

Ю.С. КРУТИЙ, Н.Г. СУРЬЯНИНОВ, А.Э. ЧАЙКОВСКИЙ
Одесская государственная академия строительства и архитектуры**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУД ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ
ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ
ЭЙЛЕРА-БЕРНУЛЛИ С УЧЕТОМ НЕУПРУГОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ**

Рассматриваются вынужденные поперечные колебания шарнирно опертой балки Эйлера-Бернулли с учетом внутреннего неупругого сопротивления. Вычислены максимальные значения безразмерных амплитуд изгибающих моментов, инвариантные относительно размерных параметров балки. Для балки с любыми размерными параметрами вычисление максимальных амплитуд, соответствующих заданным частотам вынужденных колебаний, сводится лишь к умножению на соответствующий размерный множитель уже вычисленных инвариантных безразмерных значений. На примере железобетонной балки проведен сравнительный анализ точных значений амплитуд для динамических изгибающих моментов, вычисленных по авторской методике, с аналогичными вычислениями в программных комплексах SCAD, ANSYS. Уточнены значения амплитуд в окрестности резонансных частот.

Ключевые слова: балка Эйлера-Бернулли, поперечные колебания, частоты вынужденных колебаний, резонанс, амплитуды изгибающих моментов.

Y.S. KRUTII, N.G. SURYANINOV, A.E. CHAIKOVSKY
Odessa State Academy of Construction and Architecture**DISTRIBUTION OF THE AMPLITUDE OF THE BENDING MOMENT AT THE FORCED TRANSVERSE
VIBRATIONS BEAMS EULER-BERNOULLI WITH ALLOWANCE FOR INELASTICITY RESISTANCE**

Are considered the forced transverse vibrations of simply supported Euler-Bernoulli beam, taking into account the internal elastic resistance. Calculate the maximum value of the dimensionless amplitude of the bending moments that are invariant with respect to the dimensional parameters of the beam. For beams with any dimensional parameters calculation of the maximum amplitudes corresponding to set the frequency of forced vibrations, reduces to multiplication by appropriate dimensional factor already calculated invariant dimensionless values. For example, reinforced concrete beam, a comparative analysis of accurate amplitude values for dynamic bending moments computed by the author's method, with similar calculations in software systems SCAD, ANSYS. Refined values of the amplitudes in the vicinity of the resonance frequencies.

Keywords: Euler-Bernoulli beam, transverse vibrations, frequency of forced oscillations, resonance, the amplitude of the bending moments.

Введение. Влияние сопротивления на колебательные процессы имеет важнейшее прикладное значение. В отличие от расчета свободных колебаний, заключающегося в определении собственных частот и форм колебаний, а также вынужденных колебаний вдали от резонанса, которые производятся без учета трения, исследование колебаний вблизи резонанса требует учета сил сопротивления.

Рассеяние энергии при колебаниях может быть обусловлено внешним и внутренним трением. Внешнее сопротивление связано с сопротивлением среды, в которой происходят колебания, трением между поверхностями скольжения в сочленениях элементов, а также в опорах. Внутренне трение вызвано рассеянием энергии в самом материале за счет его несовершенной упругости. Влияние этих видов трения неодинаково и зависит от многих факторов: особенностей колебательной системы, материала, из которого изготовлены элементы системы, от параметров внешней среды, от формы колебаний. В большинстве случаев из двух видов сопротивлений, внутреннее неупругое сопротивление оказывает большее влияние на характер колебаний механических систем. А когда в роли внешней среды выступает воздух, вклад внутреннего неупругого сопротивления становится и вовсе доминирующим. Поэтому исследование колебаний механических систем с учетом внутреннего неупругого сопротивления является особенно актуальным.

Анализ исследований и публикаций. Первым наличие внутреннего трения в материале обнаружил Ш. Кулон при проведении опытов с крутильными весами. Экспериментальными исследованиями установлено, что упругие материалы не строго следуют закону Гука даже при деформациях, не выходящих за пределы упругости [1]. Этим и объясняются внутренние потери энергии при колебаниях.

О важности учета внутреннего трения в материале говорят исследования многих ученых, проведенные в начале XX века. Опыты Л.Ж. Гюи над внутренними потерями в материале при крутильных колебаниях металлических проволок показали совершенно незначительную роль трения воздуха по сравнению с потерями в самом металле. Установлено, что на долю внутреннего рассеяния энергии в материале приходится не менее двух третей всех потерь при колебаниях.

Несмотря на сложный характер рассеяния энергии в материале В. Фойгт, исходя из аналогии сил внутреннего трения в упругих телах с трением внутри жидкости, полагает, что силы внутреннего трения пропорциональны первой степени скорости колебаний и представляет его в виде вязкого трения. При исследовании установившихся гармонических колебаний известен еще один подход, при котором демпфирование учитывается пропорционально скорости деформации, деленной на частоту колебаний [2]. В этом случае оно пропорционально амплитуде колебаний.

Оба указанных способа применялись и применяются сейчас многими исследователями. Внутреннее трение, пропорционально скорости задавали и основоположники прикладной теории колебаний А. Н. Крылов [3] и С. П. Тимошенко [4]. Из более поздних исследований, связанных с учетом двух видов трения

при колебаниях отметим основополагающие работы Я.Г. Пановко [5] и Е.С. Сорокина [6].

Из современных исследований, связанных с учетом переменной массы при разных видах трения укажем на публикации В.П. Ольшанского и С.В. Ольшанского. В [7] в функциях Куммера получено решение уравнения свободных колебаний осциллятора, масса которого изменяется по экспоненциальному закону. Учтено влияние вязкого трения и реактивной силы. Эти же авторы [8] рассмотрели нестационарные колебания механической системы линейно-переменной массы с комбинированным трением.

Вопрос о колеблющихся судовых стержневых конструкциях с учетом сопротивления внешней среды различной плотности рассмотрен в [9]. Здесь учтены присоединенные массы жидкости, значительное внимание уделено учету сопротивления внешней и внутренней среды. Рассмотрено математическое моделирование колебаний на основе метода модуль-элементов. Выполнено экспериментально-численное моделирование задач по определению сопротивления внешней и внутренней среды. В частности, определены коэффициенты сопротивления судовых систем, колеблющихся в воздухе, в воде, в дизельном топливе и в машинном масле.

Проблеме влияния внутреннего трения и способа возбуждения на вынужденные колебания системы посвящена работа Н.Н. Берендеева [10]. Приводятся результаты метода исследования в рамках натурального эксперимента на лабораторном стенде и в рамках виртуального компьютерного эксперимента.

Цель работы заключается в следующем:

1. Вычисление максимальных амплитуд динамических изгибающих моментов при вынужденных колебаниях балки произвольной длины с произвольной постоянной жесткостью и погонной массой и с учетом сил внутреннего неупругого сопротивления.

2. Сравнение вычисленных точных значений максимальных амплитуд с аналогичными вычислениями в современных программных комплексах SCAD, ANSYS на примере железобетонной балки.

Изложение основного материала исследования. Рассмотрим вынужденные гармонические колебания шарнирно опертой балки с учетом сил внутреннего неупругого сопротивления. Общая схема колебаний представлена на рис. 1. На рис. 2 изображена схема усилий, действующих при колебаниях на элемент балки.

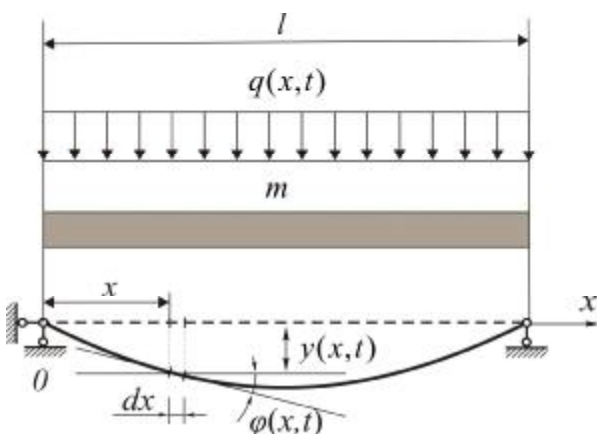


Рис. 1. Вынужденные поперечные колебания стержня

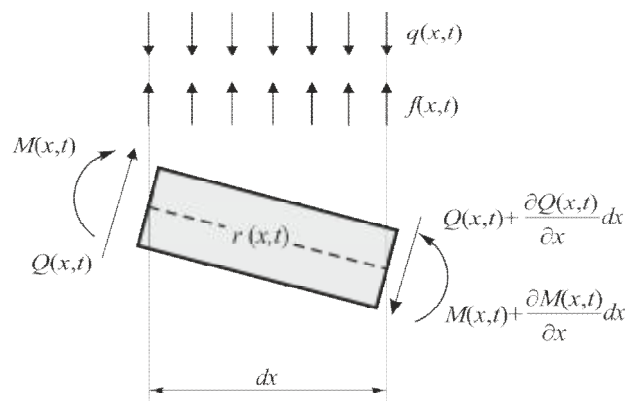


Рис. 2. Схема усилий, действующих на элемент стержня

Здесь приняты следующие обозначения:

$q(x,t) = q \sin qt$ – внешняя динамическая нагрузка, где q – постоянная амплитуда, q – частота возмущающей силы;

m – интенсивность распределенной массы (погонная масса) стержня;

$y(x,t)$ – поперечное перемещение точки оси стержня с координатой x в момент времени t (динамический прогиб);

$j(x,t)$ – динамический угол поворота;

$M(x,t)$ – динамический изгибающий момент;

$Q(x,t)$ – динамическая поперечная сила;

$r(x,t)$ – интенсивность сил внутреннего сопротивления;

$f(x,t) = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ – интенсивность сил инерции, возникающих в процессе колебаний (сила Даламбера).

Полагая, согласно скорректированной гипотезе Кельвина – Фойгта [11, 12],

$$r(x,t) = \frac{g}{q} EI \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4},$$

уравнение вынужденных колебаний балки запишем в виде [11, 12]

$$EI \left(1 + \frac{g}{q} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q \sin qt, \quad (1)$$

где g – коэффициент неупругого сопротивления (безразмерная постоянная величина для данного материала); EI – изгибная жесткость балки. К данному уравнению присоединим также заданные граничные условия:

$$y(0, t) = 0; M(0, t) = 0; y(l, t) = 0; M(l, t) = 0. \quad (2)$$

В связи с отсутствием в научной литературе точного решения уравнения (1), для исследования вынужденных колебаний балки с учетом внутреннего сопротивления до настоящего времени, как правило, применялись приближенные методы. Исключением может служить публикация М. Abu-Hilal [13], где определение динамического прогиба балки основывается на методе функций Грина.

В работе [14] найдено точное решение уравнения (1) и полностью определены динамические параметры балки. В частности получены формулы для прогибов и изгибающих моментов

$$y(x, t) = y_1(x) \sin qt + y_2(x) \cos qt, \quad (3)$$

$$M(x, t) = M_1(x) (\sin qt + g \cos qt) + M_2(x) (\cos qt - g \sin qt), \quad (4)$$

где $y_k(x)$, $M_k(x)$ ($k = 1, 2$) – так называемые составляющие функции своих параметров. Эти функции, с учетом граничных условий (2) в точке $x = 0$, определяются формулами [14]:

$$y_k(x) = (-1)^{k+1} \left(j_1(0) l X_{2,k}(x) - \frac{Q_1(0) l^3}{EI} X_{4,k}(x) \right) + j_2(0) l X_{2,3-k}(x) - \frac{Q_2(0) l^3}{EI} X_{4,3-k}(x) + (-1)^{k+1} \frac{ql^4}{(1+g^2)EI} (X_{5,k}(x) + (-1)^k g X_{5,3-k}(x)); \quad (5)$$

$$M_k(x) = (-1)^k \left(\frac{j_1(0) EI}{l} X_{4,k}^*(x) - Q_1(0) l X_{2,k}(x) \right) - \frac{j_2(0) EI}{l} X_{4,3-k}^*(x) + Q_2(0) l X_{2,3-k}(x) + (-1)^k \frac{ql^2}{1+g^2} (X_{3,k}(x) + (-1)^k g X_{3,3-k}(x)), \quad (6)$$

где

$$X_{n,1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{l} \right)^{n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^{2k} \cos kd}{(4k+n-1)!} \left(\frac{x}{l} \right)^{4k+n-1}, \quad X_{n,2}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^{2k} \sin kd}{(4k+n-1)!} \left(\frac{x}{l} \right)^{4k+n-1} \quad (n = 2, 3, 4, 5), \quad (7)$$

$$X_{4,1}^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{2k+2} \cos(k+1)d}{(4k+3)!} \left(\frac{x}{l} \right)^{4k+3}, \quad X_{4,2}^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{2k+2} \sin(k+1)d}{(4k+3)!} \left(\frac{x}{l} \right)^{4k+3}, \quad (8)$$

$$L = \frac{q}{\sqrt[4]{1+g^2}} l^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}, \quad d = \arctg g \quad \left(0 \leq d < \frac{\pi}{2} \right). \quad (9)$$

При этом важно заметить, что параметры L , d и все функции (7), (8) являются безразмерными.

Составляющие функции (5), (6) представимы также в комплексной форме [14]:

$$y_1(x) + iy_2(x) = (j_1(0) + ij_2(0)) l X_2(x) - (Q_1(0) + iQ_2(0)) \frac{l^3}{EI} X_4(x) + \frac{q}{(1+ig)} \frac{l^4}{EI} X_5(x); \quad (10)$$

$$M_1(x) + iM_2(x) = -(j_1(0) + ij_2(0)) \frac{EI}{l} K^2 X_4(x) + (Q_1(0) + iQ_2(0)) l X_2(x) - \frac{q}{(1+ig)} l^2 X_3(x), \quad (11)$$

где $X_n(x) = X_{n,1}(x) - iX_{n,2}(x)$ ($n = 2, 3, 4, 5$), $K^2 X_4(x) = X_{4,1}^*(x) - iX_{4,2}^*(x)$.

Неизвестные начальные параметры $j_1(0)$, $j_2(0)$, $Q_1(0)$, $Q_2(0)$ определим из граничных условий (2) в точке $x = l$. Указанные граничные условия на основании формул (3), (4) равносильны равенствам $y_1(l) = 0$, $y_2(l) = 0$, $M_1(l) = 0$, $M_2(l) = 0$, а их реализация, с помощью формул (10), (11), приводит к системе уравнений:

$$X_2(l)(j_1(0) + ij_2(0)) - \frac{l^2}{EI} X_4(l)(Q_1(0) + iQ_2(0)) = -\frac{ql^3}{(1+ig)EI} X_5(l);$$

$$-\frac{EI}{l} K^2 X_4(l)(j_1(0) + ij_2(0)) + l X_2(l)(Q_1(0) + iQ_2(0)) = \frac{ql^2}{1+ig} X_3(l).$$

Отсюда находим комплексные начальные параметры:

$$j_1(0) + ij_2(0) = \frac{ql^3}{(1+ig)EI} \frac{X_3(l)X_4(l) - X_2(l)X_5(l)}{X_2^2(l) - K^2 X_4^2(l)}; \quad (12)$$

$$Q_1(0) + iQ_2(0) = \frac{ql}{1+ig} \frac{X_2(l)X_3(l) - K^2 X_4(l)X_5(l)}{X_2^2(l) - K^2 X_4^2(l)}. \quad (13)$$

Для определения искомых начальных параметров $j_1(0), j_2(0), Q_1(0), Q_2(0)$ выделим действительные и мнимые слагаемые в правых частях формул (12), (13). В результате получим

$$j_k(0) = \frac{ql^3}{EI(1+g^2)} H_k, \quad Q_k(0) = \frac{ql}{1+g^2} S_k \quad (k=1,2),$$

где H_k, S_k – безразмерные константы, вычисляемые по формулам:

$$H_1 = \frac{a_1c_1 + a_2c_2 + g(a_2c_1 - a_1c_2)}{c_1^2 + c_2^2}; \quad H_2 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2 - g(a_1c_1 + a_2c_2)}{c_1^2 + c_2^2};$$

$$S_1 = \frac{b_1c_1 + b_2c_2 + g(b_2c_1 - b_1c_2)}{c_1^2 + c_2^2}; \quad S_2 = \frac{b_2c_1 - b_1c_2 - g(b_1c_1 + b_2c_2)}{c_1^2 + c_2^2};$$

$$a_1 = X_{4,1}(l)X_{3,1}(l) - X_{4,2}(l)X_{3,2}(l) - X_{2,1}(l)X_{5,1}(l) + X_{2,2}(l)X_{5,2}(l);$$

$$a_2 = X_{2,1}(l)X_{5,2}(l) + X_{2,2}(l)X_{5,1}(l) - X_{4,1}(l)X_{3,2}(l) - X_{4,2}(l)X_{3,1}(l);$$

$$b_1 = X_{2,1}(l)X_{3,1}(l) - X_{2,2}(l)X_{3,2}(l) - X_{4,1}^*(l)X_{5,1}(l) + X_{4,2}^*(l)X_{5,2}(l);$$

$$b_2 = X_{4,1}^*(l)X_{5,2}(l) + X_{4,2}^*(l)X_{5,1}(l) - X_{2,1}(l)X_{3,2}(l) - X_{2,2}(l)X_{3,1}(l);$$

$$c_1 = X_{2,1}^2(l) - X_{2,2}^2(l) - X_{4,1}^*(l)X_{4,1}(l) + X_{4,2}^*(l)X_{4,2}(l); \quad c_2 = X_{4,1}^*(l)X_{4,2}(l) + X_{4,2}^*(l)X_{4,1}(l) - 2X_{2,1}(l)X_{2,2}(l).$$

Подставляя найденные значения начальных параметров в формулу (6), будем иметь:

$$M_k(x) = \frac{ql^2}{1+g^2} M_k^*(x) \quad (k=1,2), \quad (14)$$

где $M_k^*(x)$ – безразмерные функции, которые имеют вид

$$M_k^*(x) = (-1)^k (H_1 X_{4,k}^*(x) - S_1 X_{2,k}(x)) - H_2 X_{4,3-k}(x) + S_2 X_{2,3-k}(x) + (-1)^k (X_{3,k}(x) + (-1)^k g X_{3,3-k}(x)).$$

Для исследования колебаний более удобной будет формула, в которых явно выделена амплитудная функция. Преобразуя равенство (4) к нужному виду, с учетом представлений (14), окончательно получим:

$$M(x,t) = \text{Am} M(x,t) \sin(qt + c_M(x)),$$

$$\text{Am} M(x,t) = \frac{ql^2}{1+g^2} M(x), \quad M(x) = \sqrt{(M_1^*(x) - gM_2^*(x))^2 + (M_2^*(x) + gM_1^*(x))^2}, \quad c_M(x) = \arctg \frac{M_2^*(x) + gM_1^*(x)}{M_1^*(x) - gM_2^*(x)}.$$

Как видно, формула для амплитуды содержит безразмерный множитель $M(x)$, не зависящий от нагрузки. Этот множитель с точностью до размерного коэффициента $\frac{ql^2}{1+g^2}$ определяет главную форму для динамического изгибающего момента. Функцию $M(x)$ также можно трактовать, как безразмерную амплитуду.

Максимальное значение амплитуды, очевидно, будут достигаться в середине балки, то есть

$$\max \text{Am} M(x,t) = \frac{ql^2}{1+g^2} M\left(\frac{l}{2}\right). \quad (15)$$

Таким образом, для определения максимальной амплитуды, необходимо вычислить соответствующее значение безразмерной амплитуды в середине балки. При этом особый интерес будут представлять вычисления в резонансных зонах, когда частота вынужденных колебаний q будет находиться в окрестности частот свободных колебаний балки.

Как известно [11], для частот свободных колебаний балки без учета сопротивлений имеет место формула

$$w_j = \frac{K_j}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (j=1,2,3,\dots), \quad (16)$$

где K_j – безразмерные коэффициенты свободных колебаний. Для случая шарнирно опертой балки $K_j = (jp)^2$.

В качестве частот вынужденных колебаний q зададим следующие значения:

- на промежутке $0 < q \leq w_1$ полагаем $q = k \frac{w_1}{10}$ ($k=1,2,3,\dots,10$);
- на промежутке $w_1 < q \leq w_2$ полагаем $q = w_1 + k \frac{w_2 - w_1}{10}$ ($k=1,2,\dots,10$);
- на промежутке $w_2 < q \leq w_3$ полагаем $q = w_2 + k \frac{w_3 - w_2}{10}$ ($k=1,2,3,\dots,10$);

- на промежутке $w_3 < q < w_4$ полагаем $q = w_3 + k \frac{w_4 - w_3}{10}$ ($k = 1, 2, 3$).

Подставляя здесь вместо частот w_1, w_2, w_3, w_4 их значения (16), получим представление

$$q = \frac{K^*}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (17)$$

где K^* – безразмерный коэффициент вынужденных колебаний, для которого будем иметь

$$K^* = \begin{cases} 0,1kp^2, & \text{когда } q = k \frac{w_1}{10} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 10); \\ (1+0,3k)p^2, & \text{когда } q = w_1 + k \frac{w_2 - w_1}{10} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 10); \\ (4+0,5k)p^2, & \text{когда } q = w_2 + k \frac{w_3 - w_2}{10} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 10); \\ (9+0,7k)p^2, & \text{когда } q = w_3 + k \frac{w_4 - w_3}{10} \quad (k = 1, 2, 3). \end{cases}$$

При этом для параметра L , определенного первой из формул (9), с учетом (17), получаем

$$L = \frac{K^*}{\sqrt[4]{1+g^2}}.$$

В табл. 1 представлены результаты вычислений безразмерных амплитуд в середине балки, соответствующие различным значениям коэффициента вынужденных колебаний K^* . Особенно отметим, что данные значения инвариантны относительно размерных величин l, EI, m, q и зависят только от способа закрепления концов балки. По сути, они характеризуют саму природу явления.

На рис. 1 изображен график зависимости безразмерной амплитуды изгибающего момента от коэффициента вынужденных колебаний балки. Как видно, максимумы амплитуды достигаются, когда значения коэффициента колебаний равны p^2 и $9p^2$, что в свою очередь соответствует частотам свободных колебаний w_1 и w_3 .

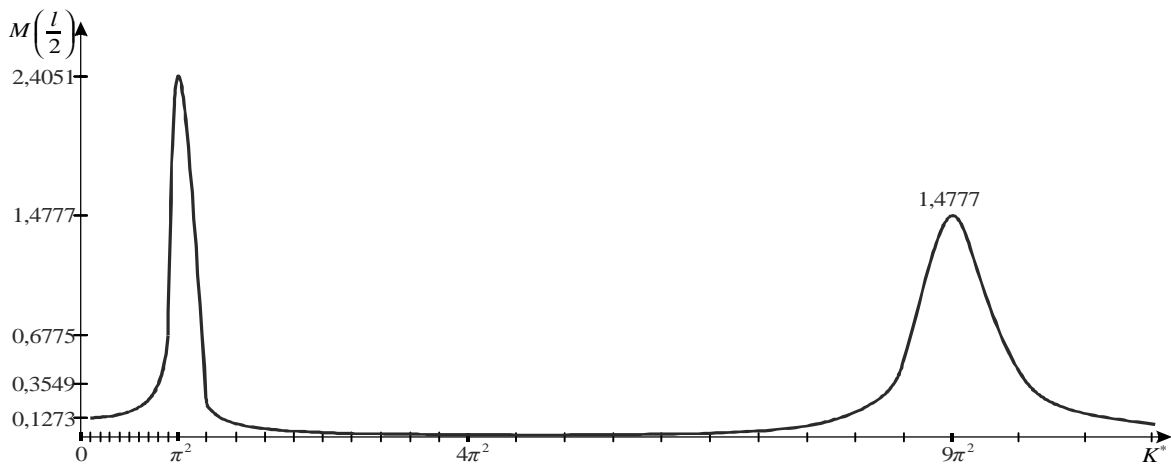


Рис. 3. Зависимость безразмерной амплитуды от коэффициента колебаний

Таким образом, согласно формулам (17), (15), вычисление максимальных значений амплитуд динамических изгибающих моментов при вынужденных поперечных колебаниях балки, вызванных внешней динамической нагрузкой $q(x,t) = q \sin qt$, сводится лишь к умножению значений K^* , $M\left(\frac{l}{2}\right)$ из табл. 1 на

соответствующие размерные множители $\frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$, $\frac{ql^2}{1+g^2}$.

Пример. Найдем распределение амплитуд динамических изгибающих моментов в однопролётной железобетонной балке при заданных выше значениях частот вынужденных колебаний. Схема армирования балки приведена на рис. 4. На рис. 5 приведено поперечное сечение балки.

Балка выполнена из бетона класса В20, армирована симметричными каркасами с рабочей арматурой $\text{Æ} 28$ мм из стали класса А400С. Коэффициент неупругого сопротивления для данного материала равен $g = 0,089$. Сила инерции, возникающая при работе оборудования, принимается равной $q = 20$ кН/м, погонная масса балки $m = 2,5$ кНс²/м², изгибная жесткость $EI = 79615,11$ кНм².

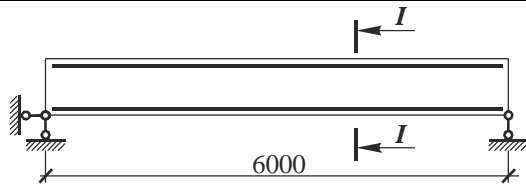


Рис. 4. Схема армирования балки

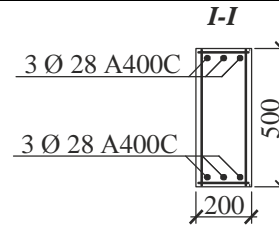


Рис. 5. Поперечное сечение балки

При таких расчетных данных, первые четыре частоты свободных колебаний балки без учета сопротивлений, согласно формуле (16), будут равны:

$$w_1 = 48,9243 \text{ c}^{-1}; \quad w_2 = 195,6974 \text{ c}^{-1}; \quad w_3 = 440,3191 \text{ c}^{-1}; \quad w_4 = 782,7895 \text{ c}^{-1}.$$

Для вычисления искомых амплитуд динамических изгибающих моментов, соответствующих заданным частотам q по предлагаемому методу, умножим значения, фигурирующие в первом и втором столбцах табл. 1 на размерные коэффициенты $\frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = 4,9571 \text{ c}^{-1}$, $\frac{ql^2}{1+g^2} = 714,3417 \text{ кНм}$.

Полученные результаты содержатся во втором и третьем столбцах табл. 1. Здесь же для сравнения приведены результаты расчетов для заданной балки методом конечных элементов с помощью программных комплексов SCAD [15] и ANSYS [16].

Таблица 1

Максимальные значения безразмерной амплитуды		Амплитудные значения динамических изгибающих моментов для железобетонной балки			
K^*	$M\left(\frac{l}{2}\right)$	Частоты вынужденных колебаний $q, \text{ c}^{-1}$	Авторский метод	ПК SCAD	ПК ANSYS
1	2	3	4	5	6
$0,1p^2$	0,1273	4,8924	90,9253	90,9522	90,9393
$0,2p^2$	0,1314	9,7849	93,8317	93,9293	93,8732
$0,3p^2$	0,1387	14,6773	99,0997	99,3327	99,1469
$0,4p^2$	0,1505	19,5697	107,5237	107,9913	107,9006
$0,5p^2$	0,1689	24,4622	120,6560	121,5289	120,9934
$0,6p^2$	0,1984	29,3546	141,7073	143,3023	142,1433
$0,7p^2$	0,2496	34,2470	178,2878	181,2372	180,0014
$0,8p^2$	0,3549	39,1395	253,5188	258,8177	256,4465
$0,9p^2$	0,6775	44,0319	483,9551	480,7953	480,9984
p^2	2,4051	$w_1 = 48,9243$	1718,0604	1010,4179	1210,1123
$1,3p^2$	0,1990	63,6016	142,1391	129,6805	134,4555
$1,6p^2$	0,0892	78,2789	63,7346	60,3975	60,9702
$1,9p^2$	0,0549	92,9562	39,2225	37,5742	38,3356
$2,2p^2$	0,0387	107,6336	27,6720	26,6322	26,7447
$2,5p^2$	0,0296	122,3109	21,1552	20,4000	20,8733
$2,8p^2$	0,0239	136,9882	17,0872	16,4796	16,8341
$3,1p^2$	0,0201	151,6655	14,3863	13,8524	14,0050
$3,4p^2$	0,0175	166,3428	12,5275	12,0169	12,0405
$3,7p^2$	0,0157	181,0201	11,2321	10,7005	10,9666
$4p^2$	0,0145	$w_2 = 195,6974$	10,3462	9,7447	9,8888
$4,5p^2$	0,0134	220,1595	9,5737	8,7060	9,0403
$5p^2$	0,0135	244,6217	9,6099	8,1607	8,7641
$5,5p^2$	0,0149	269,0839	10,6242	7,9992	8,7445
$6p^2$	0,0184	293,5461	13,1375	8,2008	11,2345
$6,5p^2$	0,0257	318,0082	18,3243	8,8305	13,1477
$7p^2$	0,0406	342,4704	28,9882	10,0893	19,2345

Продовження табл. 1

1	2	3	4	5	6
$7,5p^2$	0,0743	366,9326	53,0482	12,4926	28,4332
$8p^2$	0,1664	391,3947	118,8766	17,5011	45,3221
$8,5p^2$	0,5122	415,8569	365,9139	29,3634	91,3576
$9p^2$	1,4777	$w_3 = 440,3191$	1055,5845	34,2026	111,3787
$9,7p^2$	0,4294	474,5661	306,7364	14,5283	76,3744
$10,4p^2$	0,1530	508,8132	109,3148	8,1972	41,3222
$11,1p^2$	0,0841	543,0602	60,0516	5,5962	26,8564

Выводы. Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что резкое возрастание амплитудных значений динамических изгибающих моментов происходит в резонансных областях, соответствующих собственным частотам с нечетными индексами, а эти частоты соответствуют симметричным формам колебаний. При несимметричных колебаниях данный эффект отсутствует. Значения, полученные авторским методом, следует считать точными, поскольку они получены путем точного решения исходного дифференциального уравнения методом прямого интегрирования. Этим значениям в большей степени соответствуют результаты расчета методом конечных элементов в пакете ANSYS, чем в SCAD, что объясняется более совершенной конечно-элементной дискретизацией исходной модели и типом конечного элемента, используемого в ANSYS.

Литература

1. Лурье И. А. Крутильные колебания в дизельных установках / И. А. Лурье. – М.-Л. : Военмориздат, 1940. – 220 с.
2. Панов Д. Ю. О крутильных колебаниях стержня при наличии упругого гистерезиса / Д. Ю. Панов // ПММ. – Вып. 1. – Т. IV. – 1940. – С. 65–78.
3. Крылов А. Н. Собрание трудов. Т. X: Вибрация судов / А. Н. Крылов. – М.-Л. : Изд-во АН СССР, 1948. – 402 с.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М. : Наука, 1967. – 444 с.
5. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / Я.Г. Пановко. – М. : Физматгиз, 1960. – 193 с.
6. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем / Е. С. Сорокин. – М. : Изд-во литер. по строительству, архитектуре и строит. механике, 1960. – 131 с.
7. Ольшанский В.П. Нестационарные колебания осциллятора переменной массы с учетом вязкого трения / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. – Вып. № 3 (75). – С. 18–27.
8. Ольшанский В.П. Нестационарные колебания механической системы линейно-переменной массы с комбинированным трением / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2013. – № 4 (1041). – С. 324–333.
9. Тарануха Н. А. Исследование колебаний судовых стержневых конструкций с учетом сопротивления внешней среды различной плотности / Н. А. Тарануха, О. В. Журбин, И. Н. Журбина // Комсомольск-на-Амуре: «Ученые записки КнАГТУ». – Вып. 3. – 2015. – С. 82–94.
10. Берендеев Н.Н. Исследование влияния внутреннего трения и способа возбуждения на вынужденные колебания системы / Н.Н. Берендеев // Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2012. – 50 с.
11. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М. : Дрофа, 2004. – 591 с.
12. Василенко М.В. Теорія коливань і стійкості руху : підручник / Василенко М.В., Алексейчук О.М. – К. : Вища шк., 2004. – 525 с.
13. Abu-Hilal M. Forced vibration of Euler-Bernoulli beams by means of dynamic Green functions. Journal of Sound and Vibration 267 (2003). – pp. 191–207.
14. Krutiy Yu. S. Forced harmonic oscillations of the Euler-Bernoulli beam with resistance forces: Odeskyi Politechnichniy Universytet. Pratsi. Machine building, process metallurgy, materials science / Yu. S. Krutiy // Pratsi OPU. – 2015. – № 3(47). – P. 9–16.
15. Карпиловский В.С. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD / В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко и др. – М. : Издательство СКАД СОФТ, 2011. – 656 с.
16. Дашенко А.Ф. ANSYS в задачах инженерной механики / А.Ф. Дашенко, Д.В. Лазарева, Н.Г. Сурьянинов / под ред. Н. Г. Сурьянинова. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Одесса. – Пальмира, 2011. – 505 с.

Рецензія/Peer review : 9.11.2015 р.

Надрукована/Printed : 24.2.2016 р.

Стаття рецензована редакційною колегією