

УДК 519.688 : 621.3.088.3

О.В. ОСАДЧУК, А.Ю. САВИЦЬКИЙ, О.С. ЗВ'ЯГІН
Вінницький національний технічний університет**ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МЕТОДІВ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ
ГЕНЕРАТОРНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН**

Розглянуто можливість застосування і запропоновано математичний апарат, що може бути застосований для обробки сигналів автогенераторних перетворювачів фізичних величин, що працюють за методом частотної модуляції, при цьому девіація частоти залежить від інтенсивності дії вимірювального параметру. Показано, що для забезпечення нівелювання дії адитивної похибки у каналі передавання сигналу високостабільного генератора достатньо застосування апроксимуючого полінома другого порядку.

Ключові слова: генераторний перетворювач, адитивна похибка, шум, визначений інтеграл, точність вимірювання.

O.V. OSADCHUK, A.YU. SAVYTSKYI, O.S. ZVIAHIN
Vinnytsia National Technical University**METHODS OF INTEGRAL SIGNAL PROCESSING GENERATING PHYSICAL QUANTITY CONVERTERS**

The application of the proposed mathematical tools, that can be used for signal processing self-generating transducers of physical quantities, is considered. Its operating mechanism is based on frequency modulation, when the frequency deviation depends on the intensity of exposure measurement parameter. It is shown that the action for levelling additive errors in the channel the signal generator is highly stable enough to use approximating second order polynomial.

Keywords: self-oscillator transducer, additive error, noise, definite integral, measurement accuracy.

Розвиток інформаційно-вимірювальної техніки тісно пов'язаний із застосуванням сучасної елементної бази та методів обробки інформації на основі сучасних методів обробки даних.

В роботі [1] показано переваги частотних методів вимірювання кількісних ознак фізичних величин, що можуть бути перетворені в електричні, серед яких можна виділити високу точність та чутливість вимірювання, високу завадостійкість передавання (частотно-модульованого) ЧМ сигналу до амплітудних шумів. Якщо розглянути еквівалентну схему реалізації даного метода вимірювання (рис. 1), видно, що його практична реалізація пов'язана з врахуванням зміни частоти автогенератора джерела сигналу як «в малому», так і в «великому» періоді за теорією стійкості Ляпунова. Іншим місцем виникнення похибки може стати відрізок між частотним детектором та індикаторним пристроєм.

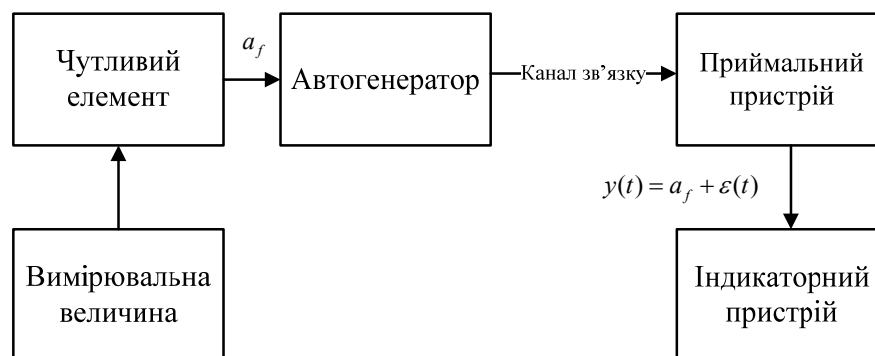


Рис. 1. Структурна схема реалізації частотного метода вимірювання

В режимі довгострокової нестабільності частоти автогенератора, миттєву частоту на його виході, так і на приймальній частині вимірювального каналу, не можна вважати випадковою величиною, і за умови сталості параметрів оточуючого середовища, дана зміна частоти може бути представлена аналітично з точністю, достатньою для практичного застосування.

В режимі короткострокової нестабільності миттєва частота сигналу генератора є величиною випадковою, оскільки ансамбль параметрів, що впливають на частоту автогенератора також можна вважати випадковою величиною: температура навколишнього середовища і переходів транзисторів, напруги живлення, напруженості електромагнітного поля, тощо. Іншим важливим параметром, що впливає на частоту сигналу є власне динамічні характеристики досліджуваного об'єкта. Тому сконцентруємо увагу на підвищення точності вимірювання з врахуванням зміни частоти генератора, що виникає внаслідок короткострокових змін напруги живлення, температури, електромагнітної обстановки, а також дії адитивної похибки в тракці протектованого сигналу.

Нехай за умови сталості вимірювального параметру об'єкта сигнал частотного детектора $a_f(t)$ є квазістаціонарною величиною a_f , а сумарна по всіх каскадах помилка відображення частоти є «білим

шумом», що описується функцією $\varepsilon(t)$. Тоді в кожен момент часу сигнал, що є сигналом частоти та шуму, що є функцією частотної нестабільності можна описати $y(t) = a_f + \varepsilon(t)$. Для реалізації приймача вимірювальної системи (рис. 1) застосуємо ефект накопичення за рахунок застосування інтегральної обробки сигналу, що буде спостерігатись протягом деякого часу досліджень T_D . При цьому на виході інтегратора формується сигнал:

$$Y(t) = \int_0^{T_D} y(t)dt = \int_0^{T_D} [a_f + \varepsilon(t)]dt = a_f T_C + \int_0^{T_D} \varepsilon(t)dt .$$

При цьому співвідношення сигнал/завада буде визначати похибку від дії адитивної завади після перетворення частота/амплітуда на проміжку частотний детектор-індикаторний пристрій:

$$n = \frac{P_{a_f}}{P_n} = \frac{(a_f \cdot T_D)^2}{D \int_0^{T_D} \xi(t)dt}$$

де P_{a_f} і P_n – потужності сигналу і завади відповідно.

За умови, що вимірювальна система відповідає теоремі Котельникова, можна навести наступні властивості даної системи:

- методика розрахунку є справедливою для систем, в яких інформаційний сигнал є квазіпостійним, або періодичним (в т.ч. імпульсним);
- інформаційний сигнал, як і сигнал завади можна представити у вигляді суми відліків з відповідною частотою дискретизації;
- дисперсія суми випадкових величин (відліків завади) також буде випадковою величиною.

На основі наведених вище тверджень можна записати наступні вирази:

$$\int_0^{T_D} \varepsilon(t)dt \cong \sum_{i=1}^k \varepsilon(t_i)\tau_0 ,$$

де $k = T_D / \tau_0$; τ_0 – є періодом автокореляційної функції завади.

Дисперсія завади на виході інтегратора визначається за виразом:

$$D \left[\int_0^{T_D} \varepsilon(t)dt \right] \cong D \left[\sum_{i=1}^k \varepsilon(t_i)\tau_0 \right] \approx \tau_0^2 \cdot D \left[\sum_{i=1}^k \varepsilon(t_i) \right] = \varepsilon_0 \cdot n \cdot D(\varepsilon) = T_D \cdot \tau_0 \cdot D(\varepsilon) .$$

Зменшення впливу завади визначається з співвідношення сигнал/завада на вході та виході інтегратора:

$$\frac{P_{a_f, \text{вих}}}{P_{n, \text{вих}}} \cong \frac{(a_f \cdot T_D)^2}{T_D \cdot \tau_0 \cdot D(\varepsilon)} = \frac{T_D \cdot a_f^2}{\tau_0 \cdot D(\varepsilon)} = \frac{T_D}{\tau_0} \cdot \frac{P_{a_f, \text{вх}}}{P_{n, \text{вх}}} .$$

Як видно з останнього виразу, вигравш у відношенні сигнал/завада збільшується із збільшенням часу інтегрування (спостереження) та частоти автокореляційної функції завади.

При цьому, для виконання системою теореми Котельникова, виникає проблема забезпечення швидкодії інтегратора з одночасним забезпеченням необхідної точності вимірювання. В роботі [2] зазначалась можливість застосування криволінійної апроксимації таблично заданої функції відрізком дуги (рис. 2), що по суті є криволінійним уточненням відомого метода трапецій. При цьому, на відміну від формули Сімсона, усувається необхідність заміни відрізка шуканої прямої двома параболою з точками перетину в середині даного відрізка, оскільки дана точка може бути знайдена з певною ймовірністю.

Математичний апарат запропонованої методики інтегрування наведено нижче:

$$r_n = \sqrt{\left(\frac{(t_n^2 - t_{n-1}^2) + (y^2(t_n) - y^2(t_{n-1})) - 2ht_{n-1}}{2h} \right)^2 + y^2(t_{n-1})}$$

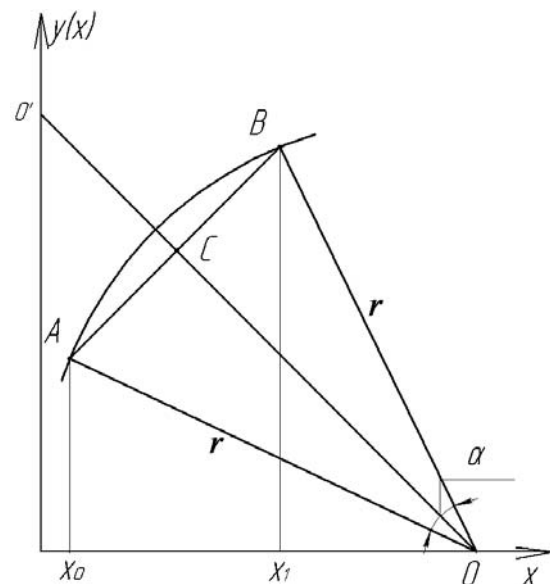


Рис. 2. Графічна інтерпретація застосування

$$\sin \alpha_n = \sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{(t_n - t_{n-1})^2 + (a_{f,n} - a_{f,n-1})^2}{2r_n^2} \right)^2 \right]};$$

$$\alpha_n = |\arcsin(\sin \alpha_n)|; S_{\text{segm},n} = \frac{r_n^2}{2} \left(\pi \frac{\alpha_n}{180^\circ} - \sin \alpha_n \right).$$

Площа, обмежена графіками функцій $t = t_0, t = t_n, y(t)$ замінюється інтегральною сумою:

$$\int_{t_0}^{t_n} y(t) dt = \sum_{i=1}^m S_{\text{trap},i} + \sum_{i=1}^m S_{\text{segm},i};$$

$$\sum_{i=1}^m S_{\text{trap},i} = h \left(\frac{y(t_0) + y(t_n)}{2} + y(t_1) + y(t_2) + \dots \right);$$

$$\sum_{i=1}^m S_{\text{segm},i} = \sum_{i=1}^m \frac{r_i^2}{2} \left(\pi \frac{\alpha_i}{180^\circ} - \sin \alpha_i \right).$$

Проведемо дослідження похибки інтегрування за допомогою запропонованої методики. Точність чисельного інтегрування залежить від степеня інтегровального полінома. Так, при заміні вихідної функції $y(t)$ відрізком прямої лінії (метод дотичних, метод трапецій) [2] похибка інтегрування визначається

залишковим членом [3]: $R(t) = \frac{(t_n - t_{n-1})^3}{12} y''(\zeta)$, де $\zeta \in [x_{n-1}; x_n]$ точка середини відрізка відліку.

При цьому загальна похибка вимірювання буде сумою похибок для кожного відліку:

$$R(t)_\Sigma = \sum_{i=1}^n \frac{(t_i - t_{i-1})^3}{12} y''(\zeta_{i-1}).$$

Застосування чисельного інтегрування поліномами більш високого порядку дозволяє зменшити похибку інтегрування. При цьому залишковий член інтегральної рівності буде складати:

$$R(t) = \left(\frac{t_n - t_{n-1}}{2} \right)^5 \frac{y^{(IV)}(\zeta)}{90}.$$

Аналогічно для цього випадку сумарна похибка чисельного інтегрування буде визначатися за виразом:

$$R(t)_\Sigma = \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - t_{i-1}}{2} \right)^5 \frac{y^{(IV)}(\zeta_{i-1})}{90}.$$

Нехай в режимі «малого» часу деякий вимірювальний параметр залишається сталим, або повільно змінюється, при цьому частота задавального генератора вимірювальної установки є високо стабільною, описується функцією a_f , а також присутній «білий шум» $\varepsilon(t)$, в результаті дії якого детектувальна частина вимірювальної системи реєструє дані, що описуються функцією $y(t)$, що відрізняється від a_f . При цьому спостереження ведеться на проміжку часу $[0;1]$.

Спочатку знайдемо аналітично інтеграл даної функції: $\int_0^1 y(t) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} = 0,78539816$.

Для застосування чисельних методів інтегрування даної функції, запишемо таблицю даних.

Таблиця 1

Таблична форма функції $y(t) = \frac{1}{1+t^2}$ на відрізку $[0;1]$

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
a_f	0,98658	1,046299	0,960282	1,038233	0,866296	0,69013	0,722998	0,873740	0,633156	0,542688	0,3944
$\varepsilon(t)$	-0,0012	-0,00079	-0,00037	0,000039	0,000452	0,000865	0,001278	0,001691	0,002104	0,002517	0,00293
$y(t)$	-0,01342	0,0562	-0,00126	0,1208	0,00423	-0,10987	-0,0123	0,2026	0,0234	-0,0098	-0,1056

При цьому, оскільки інтервал кореляції «білого шуму» дорівнює 0, то автокореляційна функція дорівнює дисперсії. В нашому випадку $R(0) = \sigma^2(\varepsilon(t)) = 0,008083143$. Тому, у випадку звичайного детектування похибка вимірювання, що виникає внаслідок дії адитивної завади радіотракту, дорівнює подвійній дисперсії «білого шуму» і в нашому випадку дорівнює $\varepsilon_f = 0,016166287$.

Зменшити дану похибку можна за рахунок використання інтегрального приймання. Оскільки функція задана своїми дискретними значеннями, то розрахунок її визначеного інтеграла можна провести за одним з відомих чисельних методів.

Застосуємо метод прямолінійної апроксимації таблично заданої функції і використаємо формулу трапецій для заданого інтеграла. Отримаємо наступний результат:

$$\int_0^1 y(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} = 0,784981497.$$

За допомогою викладеної методики уточнення метода трапецій на основі криволінійної апроксимації отримаємо наступний результат розрахунку:

$$\int_0^1 y(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} = 0,785502089859107.$$

Розглянемо похибку розрахунку визначеного інтеграла на проміжку часу $[0;1]$, для цього оцінимо залишковий член кожної з розглянутих формул.

Функція $y(t) = \frac{1}{1+t^2}$ є похідною функції $z = \arctgt$. Знайдемо похідні даної функції через похідні оберненої функції. Отримаємо: $t = \operatorname{tg} z$, $z' = \frac{1}{t'} = \cos^2 z$, $z'' = -2 \cos z \sin z \cdot z' = -2 \cos^3 z \sin z$.

Запишемо дані похідні в дещо іншому виді: $z' = \cos z \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$, $z'' = \cos^2 z \sin 2\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$.

Використавши метод математичної індукції, отримаємо наступне твердження:

$$z^{(n)} = (n-1)! \cos^n z \sin^n\left(z + \frac{\pi}{2}\right).$$

Тому залишковий член формули трапеції буде мати вигляд:

$$|R(t)| \leq \frac{2}{12 \cdot 100} = \frac{1}{600} \approx 0,00166.$$

Для формули Сімпсона і для уточненого метода трапецій залишковий член інтегральної суми буде визначатись за виразом:

$$|R(t)| \leq \frac{4!}{2^5 \cdot 90 \cdot 5^4} = \frac{24}{180 \cdot 10^4} \approx 0,0000133.$$

При цьому порівнюючи залишковий член інтегрального ряду, бачимо, що застосування чисельного інтегрування за запропонованою методикою, як і за методом Сімпсона, дає можливість отримання інструментальної похибки вимірювання порядку 10^{-4} . Це дає змогу застосовувати дані методи для реалізації мікропроцесорних засобів вимірювання і контролю параметрів фізичних величин.

Висновки

Застосування частотного метода перетворення для вимірювання різних фізичних величин має перевагу відносно параметричного завдяки більшій захищеності каналу передавання ЧМ сигналу відносно АМ. Однак, на ділянках АМ на продетектований сигнал діють флуктуаційні завади у вигляді «білого шуму». При цьому, якщо результати вимірювання є дискретною функцією, застосування інтегральної обробки сигналу за відомими формулами чисельного інтегрування дозволяє знизити рівень шумів на порядок (при застосуванні формули трапеції), або навіть на два порядки при застосуванні запропонованої методики інтегрування на основі криволінійної апроксимації вихідного сигналу.

Література

1. Осадчук В.С. Реактивні властивості транзисторів і транзисторних схем / Осадчук В.С., Осадчук О.В. – Вінниця : «Універсум-Вінниця», 1999. – 275 с. – ISBN 966-7199-67-3.
2. Осадчук О.В. Обробка вимірювального сигналу сенсора за допомогою параболічної інтерполяції / О.В. Осадчук, А.Ю. Савицький, О.С. Звягін // Вісник Хмельницького національного університету. – 2015. – № 2. – С. 153–158.
3. Березин И.С. Методы вычислений / Березин И.С., Жидков Н.П. – М. : Государственное издательство физико математической литературы, 1962. – 464 с.