УДК 685.34.02

М.І. ІГНАТИШИН, Р.В. РОСУЛ
Мукачівський державний університет
А.Б. ДОМБРОВСЬКИЙ
Хмельницький національний університет

ВИЗНАЧЕННЯ РЕЛАКСАЦІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ РЕОЛОГІЧНОЇ МОДЕЛІ ШКІРИ НЕПРЯМИМ МЕТОДОМ

В роботі розглянуто застосування системи нелінійних рівнянь для визначення параметрів реологічної моделі шкіри непрямим методом. Основним результатом даної роботи є перевірка адекватності реологічної моделі системі, що моделюється. Перевірка здійснюється шляхом розрахунку релаксаційних параметрів системи, α_1 *та* α_2 *за умовними даними. Якщо в даному часовому інтервалі система нелінійних рівнянь має розв'язок, то модель адекватно описує систему, якщо ні, – модель необхідно міняти. Розглянута нами реологічна модель, котра адекватно описує систему на ділянках від 0 до 10 секунд. Подальше дослідження передбачає побудову дослідної установки для реалізації описаної вище математичної моделі експерименту.*

Ключові слова: реологічна модель, нелінійні рівняння.

M.I. IGNATISHIN, R.V. ROSUL
Mukachevo State University
A.B. DOMBROWSKI
Khmelnytsky National University

DETERMINATION OF RELAXATION SKIN MODEL PARAMETERS RHEOLOGICAL INDIRECT METHOD

In this work the application of non-linear equations to determine the parameters of rheological models leather indirect method. The main result of this work is to verify the adequacy of rheological model system that simulated. Testing is done by calculating the parameters of relaxation and for conventional data. If this time interval system of nonlinear equations has a solution model that adequately describes the system if not - the model should be changed. We examined the rheological model which adequately describes the system in areas from 0 to 10 seconds. Further research involves building a pilot plant for implementing the above-described mathematical model experiment.

Keywords: rheological model nonlinear equation

Вступ

Є матеріали, тканини, біологічні тканини, фізичні системи, що мають пружнов'язкі властивості, тобто проявляють пружні і в'язкі властивості одночасно. Теоретичне та експериментальне дослідження таких систем здійснюють за допомогою реологічних моделей.

В роботі [1], вказано, що теоретичні та експериментальні дослідження закріплення ґрунтів враховують реологічні властивості рідин в каналах ґрунту. В роботі [2] застосовано реологічне моделювання при дослідженні магнітострикційного перетворювача. Ступницький В. В. та Долиняк Я. В [3] розглянули формоутворення поверхонь деталей з конструкційних сталей застосувавши реологічну картину впливу різних чинників на процес.

Ряд авторів досліджують вплив різних факторів на поведінку реологічних систем. Сиромятніков В.Г., Масленнікова Л.Д. та Ануфрієв В.А. розглядають вплив молекулярних взаємодій в сумішах полімерів [5] на реологічну поведінку системи. Масленнікова Л.Д. та Фабуляк Ф.Г. досліджували вплив карбонату кальцію на реологічну течію і молекулярні взаємодії з латексом [6]. Реологічні властивості клейової мастики досліджено в праці [7]. Масленнікова Л.Д. розглянула реологічні особливості в'язких водних систем [8] в присутності карбонату кальцію. Смачило О. В. [9] визначала вплив обробки в органічних розчинниках на механічні характеристики одягових шкір.

Дослідники застосовують різні реологічні схеми, які трансформують в диференціальні рівняння. Розв'язки відповідних диференціальних рівнянь є функціями часу і містять параметри реологічної схеми:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \varepsilon\left(t, E_i, \eta_j\right) \\ \sigma(t) &= \sigma\left(t, E_i, \eta_j\right) \end{aligned} \qquad (1)$$

де t – час дослідження процесу, ε – відносна деформація, σ – напруження, E_i – модуль пружності i-го елементу моделі, η_j – текучість j-го елементу моделі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Актуальним є питання експериментального визначення параметрів різноманітних реологічних моделей. Питання це актуальне в різних планах. Наприклад, для однієї і тієї ж системи можна побудувати альтернативні реологічні моделі і перевірити їх на адекватність досліджуваному об'єкту після експериментального визначення релаксаційних характеристик. Цікаво було б визначити зміну релаксаційних характеристик реологічної моделі, наприклад, одягових шкір до і після обробки в органічних розчинниках, а не тільки інтегральний модуль пружності, відносну деформацію та міцність.

Формулювання мети дослідження

Мета дослідження – застосувати математичний апарат розв'язку системи нелінійних рівнянь для визначення релаксаційних параметрів реологічної моделі непрямим методом.

Методи дослідження – побудова реологічної моделі досліджуваного об'єкту та визначення параметрів моделі чисельним методом, що застосовується до розв'язку системи нелінійних рівнянь.

Об'єктом дослідження в'язкопружна реологічна модель одягової шкіри. Предмет дослідження – релаксаційні параметри реологічної моделі.

Викладення основного матеріалу

Сформулюємо задачу знаходження релаксаційних параметрів реологічної моделі в загальному виді. Нехай $1 \le i \le m$, де m – кількість релаксаційних параметрів α_i реологічної моделі, c – параметр, що визначається з початкових умов. Отже, всього невідомих параметрів моделі $q = m + 1$. Ці невідомі, α_i та c, можна знайти як розв'язок системи q нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \varepsilon\left(t_1,\alpha_i,c\right) = \varepsilon\left(t_1\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \varepsilon\left(t_k,\alpha_i,c\right) = \varepsilon\left(t_k\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \varepsilon\left(t_q,\alpha_i,c\right) = \varepsilon\left(t_q\right); \end{cases} \tag{2}$$

або

$$\begin{cases} \sigma\left(t_1,\alpha_i,c\right) = \sigma\left(t_1\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \sigma\left(t_1,\alpha_i,c\right) = \sigma\left(t_k\right); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \sigma\left(t_1,\alpha_i,c\right) = \sigma\left(t_q\right); \end{cases} \tag{3}$$

де k – номер рівняння $1 \le k \le q$.

Надалі будемо розглядати систему рівнянь (2).

Результати та їх оцінка

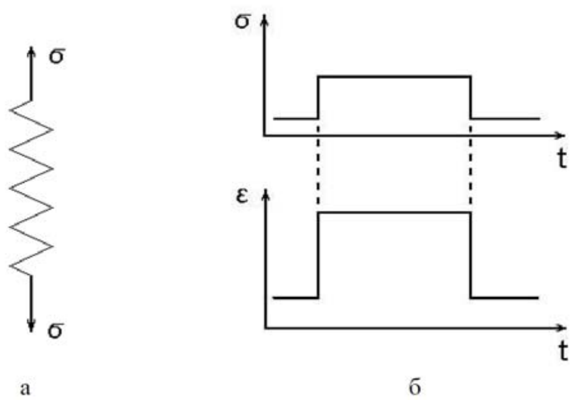
Пружні властивості шкіри описуються законом Гука, рис. 1:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \tag{4}$$

а в'язкі властивості – законом Ньютона, рис. 2:

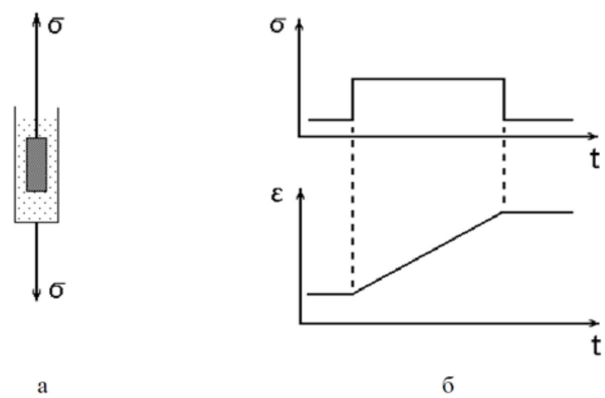
$$\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon} \tag{5}$$

де $\dot{\varepsilon}$ – похідні по часу від відносної деформації ε.



а б

Рис. 1. Реологічна модель пружного елемента
а – модель пружного елемента,
б – деформація пружного елемента ступінчатим навантаженням



а б

Рис. 2. Реологічна модель в'язкого елемента
а – модель в'язкого елемента
б – деформація в'язкого елемента ступінчатим навантаженням

Розглянемо наступну реологічну модель, рис. 3.

Трансформуємо модель, рис. 3, в диференціальне рівняння, враховуючи, що при паралельному з'єднанні, рис. 4, маємо співвідношення:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \ ; \\ \sigma_1 = \eta \cdot \dot{\varepsilon} \ ; \\ \sigma_2 = E \cdot \varepsilon \ ; \end{cases} \tag{6}$$

а при послідовному з'єднанні, рис. 5, маємо співвідношення:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ ; \\ \sigma = E \cdot \varepsilon_1 \ ; \\ \sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_2 \ ; \end{cases} \tag{7}$$

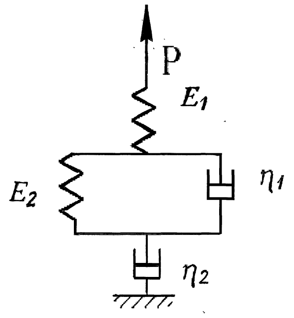


Рис. 3. Реологічна модель шкіри

Введемо позначення, що описують реологічну модель, рис. 3:

σ – напруження, що виникає під дією сили P,

ε – відносна деформація, що виникає під дією сили P,

σ_1 – напруження, що виникає в пружному елементі E_1,

ε_1 – відносна деформація, що виникає в пружному елементі E_1,

$\sigma_{x\sigma}$ – напруження, що виникає в пружному елементі E_2,

ε_x – відносна деформація, що виникає в пружному елементі E_2,

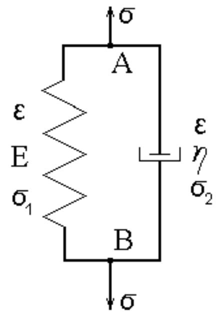


Рис. 4. Модель Фойгта

$\sigma_{x\eta}$ – напруження, що виникає у в'язкому елементі η_1,

ε_x – відносна деформація, що виникає у в'язкому елементі η_1,

σ_2 – напруження, що виникає у в'язкому елементі η_2,

ε_2 – відносна деформація, що виникає у в'язкому елементі η_2,

Побудуємо співвідношення, що описують реологічну модель, рис. 3:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_x + \varepsilon_2 \tag{8}$$

$$\sigma = \sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon_1 \tag{9}$$

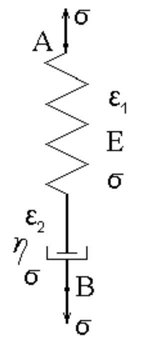


Рис. 5. Модель Максвела

$$\sigma = \sigma_x = \sigma_{x\sigma} + \sigma_{x\eta} = E_2 \cdot \varepsilon_x + \eta_1 \cdot \dot{\varepsilon}_x \tag{10}$$

$$\sigma = \sigma_2 = \eta_2 \cdot \dot{\varepsilon}_2 \tag{11}$$

З формули (8) виключимо ε_1, ε_x, ε_2 для цього знайдемо першу та другу похідні:

$$\dot{\varepsilon}_x = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2 , \quad \ddot{\varepsilon}_x = \ddot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon}_1 - \ddot{\varepsilon}_2 \tag{12}$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{E_1} \cdot \dot{\sigma} , \ \dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\eta_2} \cdot \sigma \tag{13}$$

$$\ddot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{E_1} \cdot \ddot{\sigma} , \ \ddot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\eta_2} \cdot \dot{\sigma} \tag{14}$$

Знайдемо першу похідну з співвідношення (10):

$$\dot{\sigma} = E_2 \cdot \dot{\varepsilon}_x + \eta_1 \cdot \ddot{\varepsilon}_x \tag{15}$$

Підставимо (13) та (14) в (12), а потім (12) в (15), спростимо і одержимо диференціальне рівняння, що описує реологічну модель, рис. 3.:

$$\eta_1 \cdot \ddot{\varepsilon} + E_2 \cdot \dot{\varepsilon} = \frac{\eta_1}{E_1} \cdot \ddot{\sigma} + \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2} + \frac{E_2}{E_1} \right) \cdot \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_2} \cdot \sigma \tag{16}$$

При ізометричному експерименті $\varepsilon = const$ рівняння (16) приймає вид:

$$\frac{\eta_1}{E_1} \cdot \ddot{\sigma} + \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2} + \frac{E_2}{E_1} \right) \cdot \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_2} \cdot \sigma = 0 , \tag{17}$$

а при ізотонічному експерименті $\sigma = \sigma_0 = const$ рівняння (16) приймає вид:

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{E_2}{\eta_1} \cdot \dot{\varepsilon} - \frac{E_2}{\eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \sigma_0 = 0 . \tag{18}$$

Враховуючи початкову умову $\varepsilon(0) = 0$ одержимо розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (18):

$$\varepsilon(t) = c \cdot \left[e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t} \right], \tag{19}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{E_2}{2\eta_1} \cdot \left(\sqrt{1 + 4 \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \frac{\sigma_0}{E_2}} - 1 \right), \tag{20}$$

$$\alpha_2 = -\frac{E_2}{2\eta_1} \cdot \left(\sqrt{1 + 4 \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \frac{\sigma_0}{E_2}} + 1 \right), \tag{21}$$

Співвідношення (18), (20) та (21) не містять параметра E_1 реологічної моделі, отже при ізотонічному експерименті його визначити неможливо.

Маємо три невідомі величини c, α_1 та α_2, отже для їх експериментального знаходження потрібно три нелінійні рівняння, що утворюють систему:

$$\begin{cases} c \cdot \left[e^{\alpha_1 t_1} - e^{\alpha_2 t_1} \right] = \varepsilon(t_1), \\ c \cdot \left[e^{\alpha_1 t_2} - e^{\alpha_2 t_2} \right] = \varepsilon(t_2), \\ c \cdot \left[e^{\alpha_1 t_3} - e^{\alpha_2 t_3} \right] = \varepsilon(t_3), \end{cases} \tag{22}$$

де t_1, t_2 та t_3 моменти часу в які визначено значення відносної деформації $\varepsilon(t_1)$, $\varepsilon(t_2)$ та $\varepsilon(t_3)$ при ізотонічному навантаженні σ_0.

Складемо програму для обробки експериментальних даних і непрямого визначення параметрів реологічної моделі, рис. 3, а саме, c, α_1 та α_2, за результатами ізотонічного експерименту. Програма складена в системі MATHCAD.

Початок програми.

Вхідні дані (умовні значення)

$t_1 := 0.1$; $t_2 := 0.2$; $t_2 := 0.3$ (час в секундах),

$\varepsilon_1 := 0.391$; $\varepsilon_2 := 0.658$; $\varepsilon_2 := 0.846$ (відносна деформація в частках)

Орієнтовні значення шуканих параметрів:

$c := 2$; $\alpha_1 := 3$; $\alpha_2 := 4$

Given

$$c \cdot \left(e^{\alpha_1 t_1} - e^{\alpha_2 t_1} \right) = \varepsilon(t_1)$$
$$c \cdot \left(e^{\alpha_1 t_2} - e^{\alpha_2 t_2} \right) = \varepsilon(t_2)$$
$$c \cdot \left(e^{\alpha_1 t_3} - e^{\alpha_2 t_3} \right) = \varepsilon(t_3)$$

$$\begin{pmatrix} c \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} := Find(c, \ \alpha_1, \ \alpha_2) \qquad \begin{pmatrix} c \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.366 \\ 4.366 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(t) = c \cdot \left(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t} \right)$$

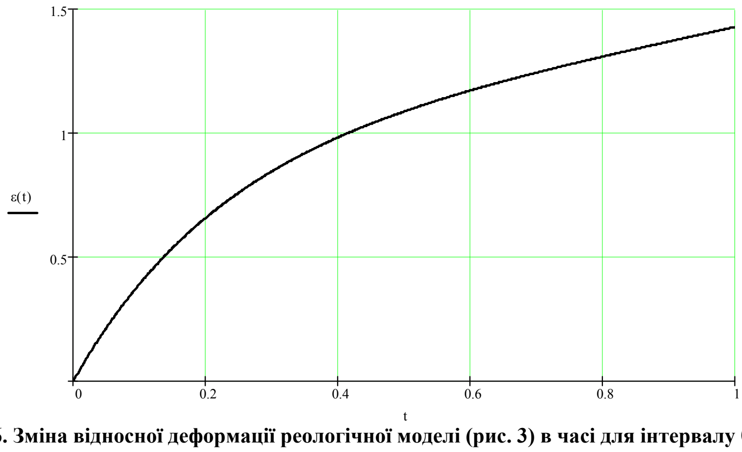


Рис. 6. Зміна відносної деформації реологічної моделі (рис. 3) в часі для інтервалу 0 – 1 с

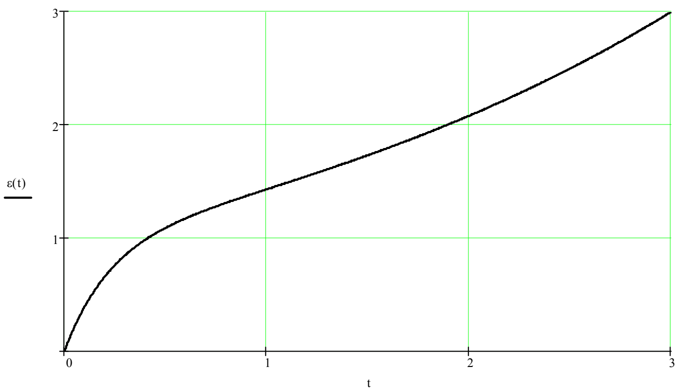


Рис. 7. Зміна відносної деформації реологічної моделі (рис. 3) в часі для інтервалу 0 – 3 с

Фактичні значення шуканих параметрів:

$c = 1$; $\alpha_1 = 0.366$; $\alpha_2 = 4.366$

Кінець програми

Висновки

Основним результатом даної роботи є перевірка адекватності реологічної моделі системі, що моделюється. Перевірка здійснюється шляхом розрахунку релаксаційних параметрів системи, α_1 та α_2 за умовними даними. Якщо в даному часовому інтервалі система нелінійних рівнянь (22) має розв'язок то модель адекватно описує систему, якщо ні, – модель необхідно міняти.

Розглянута нами реологічна модель, рис. 3, адекватно описує систему на ділянках від 0 до 10 секунд.

Подальше дослідження передбачає побудову дослідної установки для реалізації описаної вище математичної моделі експерименту.

Література

1. Бадьора Н.П. Аналіз теоретичних та експериментальних досліджень ін'єкційного закріплення грунтових масивів / Н.П. Бадьора, І.В. Коц // Вісник Хмельницького національного університету. – 2014. – № 2. – С. 46.

2. Шаповалов О.І. Математична модель магнітодинамічного потоку в зоні реологічного переходу магнітострикційного перетворювача / О.І. Шаповалов // Вісник Хмельницького національного університету. – 2014. – № 2. – С. 240.

3. Ступницький В.В. Імітаційне реологічне моделювання процесів формоутворення поверхонь деталей з конструкційних сталей / В.В. Ступницький, Я. В. Долиняк // Національний університет "Львівська політехніка". Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2015. – № 49. – С. 9.

4. Сиромятніков В.Г. Вплив молекулярних взаємодій в сумішах полімерів каучук в латексі-полівінілацетат у водному середовищі на реологічну поведінку досліджуваних систем / В.Г. Сиромятніков, Л.Д. Масленнікова, В.А. Ануфрієв // Хім. промисловість України. – 2002. – № 1. – С. 24–26.

5. Осієвська В.В. Реологічні особливості водних дисперсій з використанням карбонату кальцію і водного розчину силікату натрію / В.В. Осієвська, Ф.Г. Фабуляк, Л.Д. Масленнікова // Науковий вісник Миколаївського державного педагогічного ун-ту. – 2000. – № 1. – С. 215–219.

6. Масленнікова Л.Д. Вплив карбонату кальцію на реологічну течію і молекулярні взаємодії з латексом / Л.Д. Масленнікова, Ф.Г. Фабуляк // Наук. вісник Ужгородського держ. ун-ту. – 2001. – № 6. – С. 204–206.

7. Реологічні та ІЧ-спектроскопічні дослідження нової клейової мастики / В.В. Осієвська, А.Є. Мірошніков, Л.Д. Масленнікова, Ф.Г. Фабуляк // Фізика конденсованих високомолекулярних систем: Наукові записки Рівненського держ. гуманіст. ун-ту. – 2000. – № 8. – С. 9–16.

8. Масленнікова Л.Д. Реологічні особливості в'язких водних систем в присутності карбонату кальцію / Л.Д. Масленнікова // V Всеукраїнська конференція "Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики" : тези доп. – К. : НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2000. – С. 169.

9. Смачило О. В. Матеріалознавчі характеристики одягових шкір після обробки в органічних розчинниках / О. В. Смачило // Технології та дизайн. – 2013. – № 4. – С. 7.

Рецензія/Peer review : 21.5.2016 р. Надрукована/Printed : 7.6.2016 р.
Рецензент: д.т.н., проф.. Параска Г.Б.