

## ВИКОРИСТАННЯ ВАРІАЦІЙНОГО ПІДХОДУ ДЛЯ КІНЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ МЕХАНІЗМІВ ПАРАЛЕЛЬНОЇ СТРУКТУРИ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЗОВАНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

*Розглянуті питання, пов'язані з використанням варіаційного підходу для кінематичного аналізу механізмів паралельної структури в системах автоматизованого моделювання. Наведено результати співставлення розрахункових даних, отриманих в системах комп'ютерної математики.*

*Ключові слова: варіаційного підхід, кінематичний аналіз, механізми паралельної структури, системи автоматизованого моделювання.*

YE.A. BAGANOV, S.A. RUSANOV, S.M. PIVEN  
Kherson National Technical University

### VARIATIONAL APPROACH FOR KINEMATIC ANALYSIS OF MECHANISMS WITH PARALLEL STRUCTURE IN COMPUTER-AIDED SIMULATION

*The problems associated with using of variation approach for kinematic analysis of mechanisms with parallel structure in computer-aided simulation is considered. The results of comparison of calculated data obtained by computer mathematics systems are shown.*

*Keywords: variation approach, kinematic analysis, mechanisms of parallel structure, computer-aided simulation.*

**Вступ.** Сучасні вимоги машинобудування до технологічного обладнання формують жорстку систему критеріїв, що забезпечують необхідні показники точності, продуктивності, функціональності і економічності. Це стосується й обладнання, що формує окрему галузь серед виконавчих механізмів, а саме обладнання з механізмами паралельної структури (МПС) – маніпуляторів, випробувальних стендів, верстатів та ін. Концепція каркасних компоновок дозволяє створювати нові верстати з паралельною кінематикою з потрібним ступенем вільності виконавчої ланки для виконання багатofункціональних задач. Існуючі системи керування таким обладнанням містять в собі постпроцесори, які розроблені під існуючі моделі обладнання, а будь-який новий або модернізований верстат вимагає нового математичного опису [1]. Постпроцесорне керування рухом платформи верстату з МПС передбачає контроль за функціональними рухами обробного інструменту в просторі і в часі, що обумовлює необхідність прогнозувати рух усіх ланок, вузлів та шарнірів. Ця задача потребує розрахунків та оптимізації траєкторії руху ланок в узагальнених координатах і робочого органу – у глобальній системі координат [2]. Також при створенні нової компоновки верстату виникає необхідність адаптувати програму керування згідно кінематичної структури і одночасно виконувати аналіз жорсткісних та динамічних характеристик технологічної системи. Компоновка як перший і найвідповідальніший етап проектування верстату безпосередньо залежить від даних критеріїв та напряму впливає на затребуваність і конкурентоспроможність верстатного обладнання. Тому необхідно проводити наскрізний аналіз компоновок як складних просторових стрижнево-полігональних систем з кінематичними, жорсткісними та динамічними розрахунками верстатів на стадії вибору компоновки [3]. Кінематичний аналіз в цьому переліку є одною з базових та найвідповідальніших стадій розробки обладнання з МПС, за результатами якого відбувається як порівняння компоновок, так і формування стратегій обробки та формування керуючої програми для існуючого обладнання.

Дана робота виконується згідно плану науково дослідних робіт за рахунок коштів державного бюджету НДР 0115U003062 за темою: «Створення нової техніки і технологій машинобудування з робочими процесами взаємодії твердих, плинних і сипких тіл та середовищ».

**Постановка завдання.** Кінематичний аналіз руху з урахуванням можливостей адекватного моделювання прямої та зворотної задачі є вихідним пунктом при наскрізному аналізі компоновок з МПС та формуванні сценарію обробки для вже наявного обладнання. Класичне визначення рухомості кінематичних ланок і механізмів зазвичай виконують по формулам академіка П.Л. Чебишова, проф. А.П. Малишева, але це не завжди забезпечує вірний результат, у зв'язку з тим, що не враховуються сили, які діють на ланки, наявність пасивних в'язів, загальні обмеження накладені на рух ланок, наявність ланок, які змінюють довжину та інші фактори.

Також є можливість розгляду властивостей механізму паралельної структури по рівняннях рівноваги сил і пар сил шляхом обчислення рангу матриці коефіцієнтів системи рівнянь рівноваги сил і пар сил. Також рухливість оцінюється по рівняннях замкнутості векторів лінійних і кутових швидкостей руху ланок механізму скласти геометричну картину відповідності можливих розташувань множин осей обертальних кінематичних пар [4]. Один з варіантів проведення аналізу рухливостей є ітераційне моделювання зі зворотнім зв'язком між блоком кінематики та блоком пружного відклику. Такий метод, з одного боку, є досить ефективним, особливо у зв'язку з тим, що в модулі відклику силові параметри шарнірів (які залежать від їх рухливості) можна досить легко контролювати. Наприклад, рівняння зв'язків для замороженого шарніру має вигляд

$$\vec{u}_i = \vec{u}_j, \vec{\varphi}_i = \vec{\varphi}_j,$$

де  $\vec{u}$  – вектор деформації ланки,  $\vec{\varphi}$  – вектор кутової деформації ланки  $i, j$  – номери ланок, що зв'язуються шарніром. Для сферичного шарніру зв'язки наступні

$$\vec{u}_i = \vec{u}_j, \vec{\varphi}_i = \vec{0}, \forall i, j \in \text{Joint},$$

де  $\text{Joint}$  – множина ланок, що з'єднуються шарніром.

Але ж з іншого боку, такий ітераційний метод є досить ресурсномістким, що пов'язано з необхідністю врахування зворотного зв'язку між блоками кінематики та пружного відклику. Тому метою даної роботи є розробка уніфікованого підходу до формального опису голономних ідеальних в'язів, які створюються геометричними обмеженнями, що накладаються ланками та шарнірами в МПС, для спрощення автоматичної генерації системи рівнянь, які описують динаміку просторового механізму, та перевірка коректності його застосування на простих тестових системах.

**Виклад основного матеріалу.** Для опису траєкторії руху системи, особливістю якої є наявність жорстких голономних в'язів, запропоновано наступний підхід.

Нехай жорстка в'яз описує можливу траєкторію руху зв'язаної точки за допомогою рівняння

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (1)$$

Прикладами такої функції можуть бути:

- сферичний шарнір з довжиною плеча  $R$  і центром шарніра в точці  $(x_0, y_0, z_0)$ , яка загалом, може бути рухомою

$$f(x, y, z, t) = (x - x_0(t))^2 + (y - y_0(t))^2 + (z - z_0(t))^2 - R^2 = 0;$$

- циліндричний шарнір з довжиною плеча  $R$ , центром шарніра в точці  $(x_0, y_0, z_0)$  і віссю, напрямком якої визначається вектором  $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ , причому як положення центра шарніра, так і напрямок осі можуть бути функціями часу

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, t) = (x - x_0(t))^2 + (y - y_0(t))^2 + (z - z_0(t))^2 - R^2 = 0; \\ f_2(x, y, z, t) = \vec{l} \cdot \vec{r} = l_x(t) \cdot (x - x_0(t)) + l_y(t) \cdot (y - y_0(t)) + l_z(t) \cdot (z - z_0(t)) = 0; \end{cases}$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки відносно центру шарніра.

З точки зору силового опису жорстких в'язів, відхилення за нормаллю до дозволеної для руху поверхні або кривої викликає появу нескінченних за модулем сил, що діють проти відхилення. Внаслідок цього силовий опис має дві проблеми: нескінченний модуль сил важко стикнується з розрахунковими алгоритмами, а зміна напрямку сили уздовж дозволеної в'язями поверхні (кривої) ускладнює математичний опис задачі.

Розгляд тільки геометричних умов, без силового опису, не дає змоги враховувати інерційні властивості системи.

Для спрощення задачі пропонується описувати сили реакції в'язей вводячи, за аналогією з віртуальними голономними в'язями [6] віртуальний потенціал (ВП) [7], який має мінімум у дозволенних в'язях точках простору, а при відхиленні від них стрімко зростає (в ідеалі – стрибкоподібно), що забезпечує нульове значення сили у дозволенних точках і появу нескінченної сили при намаганнях здійснити рух за нормаллю до дозволеної поверхні (кривої).

Таким вимогам до ВП задовольняє функція

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{\delta(f(x, y, z, t))}$$

або, при описі в'язів, що діють у системі декількома обмежуючими функціями

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{\delta(f_1(x, y, z, t))} + \frac{1}{\delta(f_2(x, y, z, t))} + \frac{1}{\delta(f_3(x, y, z, t))} + \dots,$$

де дельта-функція визначається співвідношенням

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Тоді, замінюючи силовий опис системи енергетичним, подальший аналіз можна проводити в рамках лагранжевої механіки. Функція Лагранжа буде визначатися [5]

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x, y, z, t). \quad (3)$$

Перший доданок у формулі (3) визначає кінетичну енергію  $M$  точок, інерційні властивості яких необхідно врахувати, з  $N$  точок, траєкторії яких підлягають визначенню.

Система диференціальних рівнянь, що описує рух системи, отримується підстановкою функції Лагранжа у рівняння Ейлера, складені по всім незалежним координатам  $N$  точок (диференціальні рівняння Лагранжа) [5]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} - \frac{\partial L}{\partial y_j} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} - \frac{\partial L}{\partial z_j} = 0. \end{cases} \quad j = 1, \dots, N \quad (4)$$

Система (4) доповнюється початковими умовами координат і швидкостей  $M$  точок, інерційні властивості яких враховуються.

Для реалізації чисельної процедури розрахунку використовувати опис дельта-функції у вигляді (2) незручно навіть у системах комп'ютерної математики на кшталт Maple або Mathematica, так як жодне неспівпадіння початкових умов з умовами, що накладаються в'язями, приводить до відмови розрахункової схеми. Програми, які не можуть працювати з аналітичною математикою (мають обмеження на ділення на нуль, відсутнє аналітичне поняття нескінченності) не дозволяють задати дельта-функцію у вигляді (2).

Для чисельного застосування зручніше застосувати одну з наступних апроксимацій дельта-функції: поліноміальну

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\pi(1 + \alpha^2 x^2)}; \quad (5)$$

або експоненціальну

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2 x^2) \quad (6)$$

де керуючи значенням параметра  $\alpha$  можна досягнути необхідного ступеня наближення. На рис. 1 і рис.2 наведені графіки апроксимацій (5) і (6) відповідно при різних значеннях параметра  $\alpha$ .

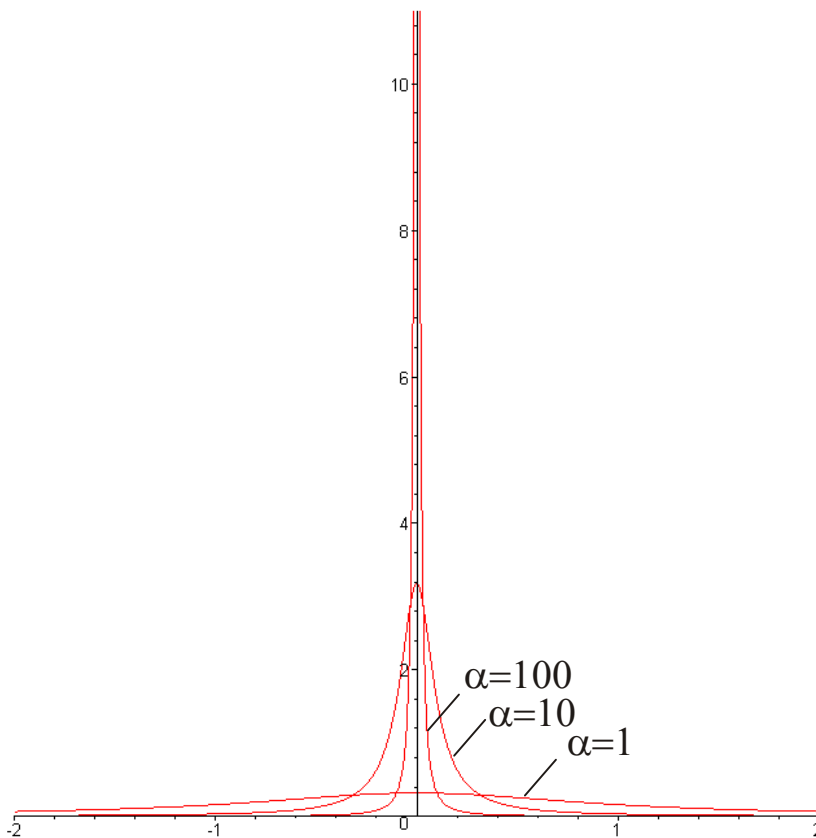


Рис. 1. Поліноміальна апроксимація дельта-функції при різних  $\alpha$

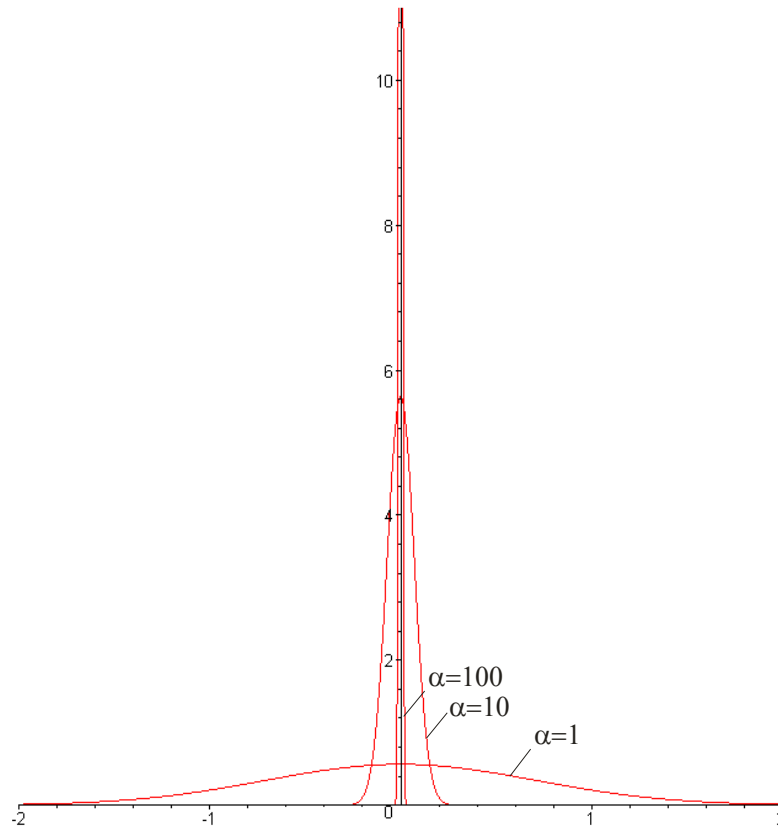


Рис. 2. Експоненціальна апроксимація дельта-функції при різних  $\alpha$

Для перевірки коректності запропонованого підходу була обрана наступна система: невагомий циліндричний шарнір, з рухомим центром в точці з координатами  $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$  зі штоком довжиною  $R=1$ , на кінці якого розташоване точкове масивне тіло з координатами  $(x, y, z)$ . Вісь шарніра, що задана вектором  $\vec{l} = (l_x(t), l_y(t), l_z(t))$  може довільно рухатися (рис. 3). Розглядається тривимірна задача  $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$

Функція Лагранжа має вигляд

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \left( \frac{1}{\delta((x - x_0(t))^2 + (y - y_0(t))^2 + (z - z_0(t))^2 - R^2)^+} + \frac{1}{\delta(l_x(t) \cdot (x - x_0(t)) + l_y(t) \cdot (y - y_0(t)) + l_z(t) \cdot (z - z_0(t)))} \right), \quad (7)$$

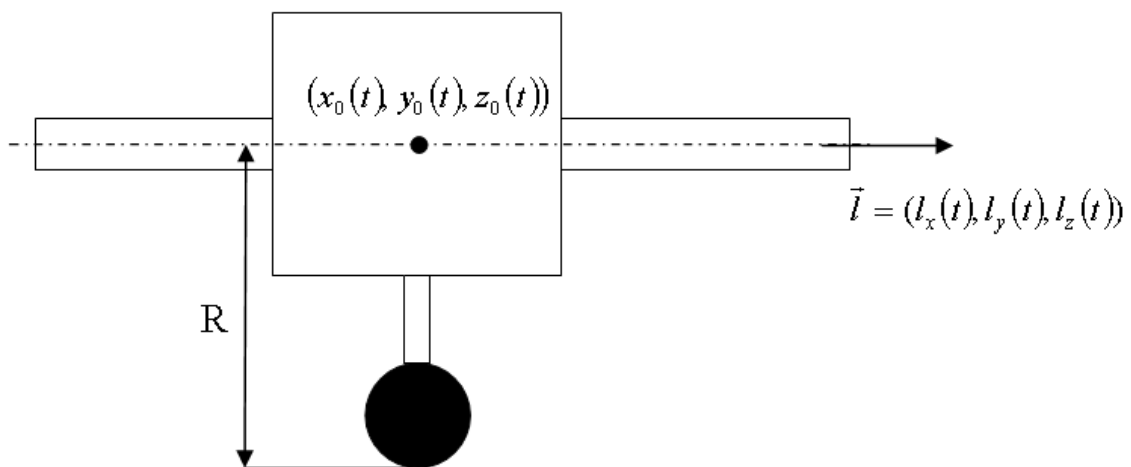


Рис. 3. Тестова система

Рівняння (4) мають вигляд

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Апроксимація дельта-функції застосовувалася за формулою (5) при  $\alpha=100$ .

Тест 1. Вісь шарніра нерухома, тіло має початкову швидкість, перпендикулярну до штоку та осі шарніра. У даному випадку траєкторією має бути коло. Результати розрахунку наведені на рис. 4 (а, б)

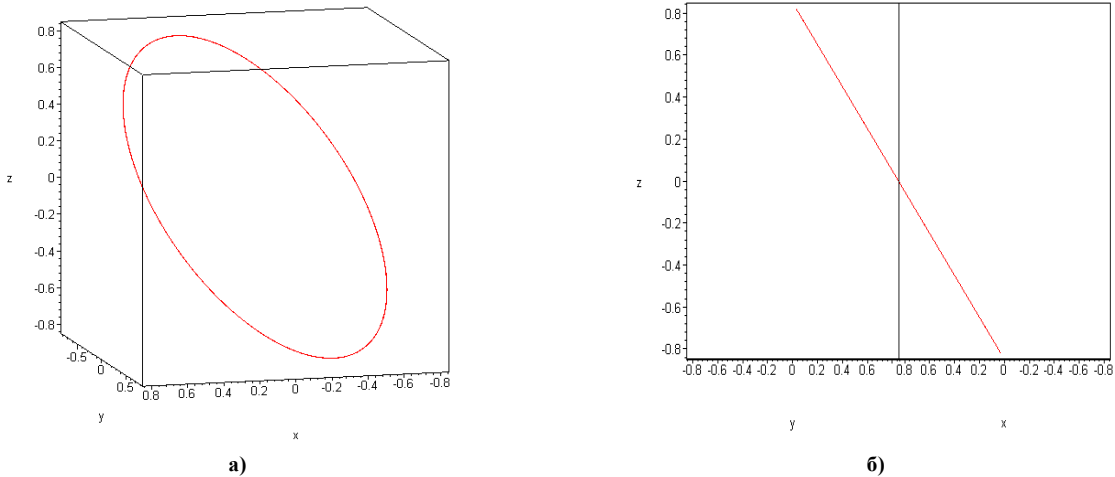


Рис. 4. Результати розрахунку для тестової системи 1

Як видно з рис. 4, траєкторією є коло, усі точки знаходяться в одній площині.

Тест. 2. Початкова швидкість тіла нульова, шарнір рухається за напрямком власної осі. У даному випадку траєкторією має бути пряма.

Результати розрахунку наведені на рис. 5 (а, б)

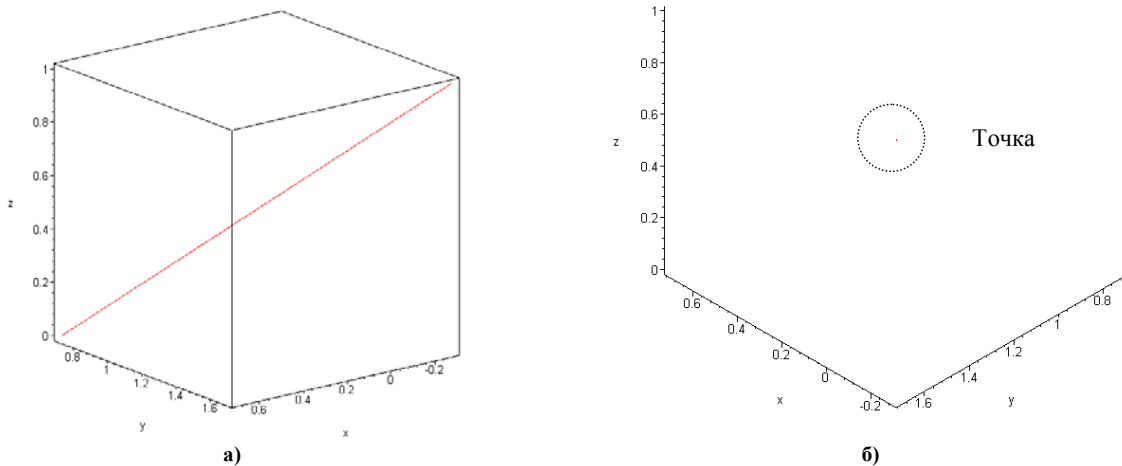


Рис. 5. Результати розрахунку для тестової системи 2

Як видно з рис. 5, траєкторією є пряма, яка проектується в точку. Додаткові тести, що детально характеризують модель, будуть надані окремою публікацією.

В якості прикладу застосування запропонованої методики вкажемо авторський комплекс програм автоматизованого моделювання, що дозволяють вирішувати кінематичні задачі для верстатів з МПС (пряма та зворотня задачі), проводити розрахунки жорсткісних та динамічних характеристик верстату з врахування різних типів шарнірів та загального завдання сил та моментів різання, проводити динамічний аналіз обладнання з отриманням частотних характеристик ще на стадії проектування та дослідження варіантів компоновки.

Пакет спеціалізованих програмних продуктів представлено низкою систем «Tools GLIDE», «Tools Response» та «Tools App» [8]. В системі «Tools GLIDE» (рис. 6) проводиться кінематичний аналіз за декількома моделями врахування в'язів у системі. За даними імпортованого файлу траєкторій та орієнтацій інструменту (може бути використано файл CL-data отриманий засобами сторонніх САМ систем) проводиться пошук розв'язку зворотної кінематичної задачі з наступним експортом постпроцесорних даних, та даних для інших типів аналізу, анімації робочого процесу.

Проводиться застосування кінематичних моделей за запропонованим в даній статті методом віртуального потенціалу, що дозволяють звузити простір можливих рішень та врахувати кінематику різних типів шарнірів.

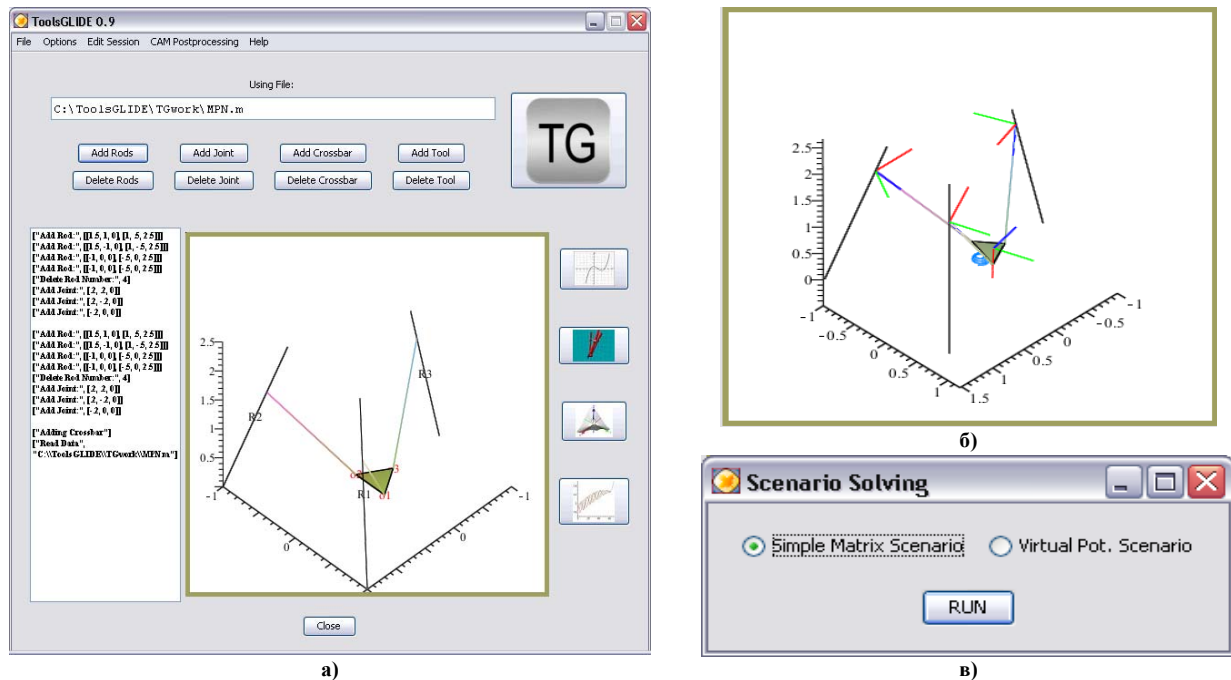


Рис. 6. Інтерфейс головного вікна системи «Tools GLIDE» (а), візуалізація анімованої стратегії обробки системи «Tools GLIDE» (б) та вибір моделей пошуку в просторі рішень (в)

### Висновки

Застосування запропонованого віртуального потенціалу дозволяє переносити рівняння в'язів безпосередньо у функцію Лагранжа у вигляді відокремлених уніфікованих доданків, що робить підхід перспективним для автоматичного генерування системи рівнянь, які описують динаміку просторового механізму. Вищевказаний варіант моделі пошуку рішень дозволяє звузити простір пошуку та врахувати кінематику шарнірів різних типів у зовнішніх постпроцесорах.

Проведення тестових розрахунків з використанням віртуального потенціалу показали відповідність отриманих результатів очікуванім, алгоритмічність побудови розрахункової системи рівнянь, легкість синтезу рівнянь при з'єднанні різних типів в'язів, що обумовлює можливість застосування моделі в системах автоматизованого моделювання на кшталт «Tools GLIDE».

### Література

1. Кузнецов Ю.М. Компонировки верстатів з механізмами паралельної структури : монографія / Ю.М. Кузнецов, Д.О. Дмитрієв, Г.Ю. Діневич ; під ред. Ю.М. Кузнецова. – Херсон : ПП Вишемирський В.С., 2009. – 456 с.
2. Dmytriev D. Method one-parametric families for analytical description of the end-effector curved motion of the machine-tools with the mechanisms of the parallel structure / D. Dmytriev, S. Piven, P. Keba // Technological Complexes. – 2015. – № 1/2 (12). – P. 12–18.
3. Dmytriev D. New layout and kinematic drill-milling machines with parallel structure mechanisms / D. Dmytriev // Technological Complexes. – 2015. – № 1/1 (11). – P. 25–29.
4. Иосилевич Г.Б. Прикладная механика / Г.Б. Иосилевич, П.А. Лебедев, В.С. Стреляев. – М. : Машиностроение, 1985. – 351 с.
5. Гаральд Іро. Класична механіка / Гаральд Іро. – Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 1999. – 464 с.
6. Maggiore M. Virtual Holonomic Constraints for Euler–Lagrange Systems / M. Maggiore, L. Consolini // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2013. – № 58(4). – P. 1001–1008.
7. Баганов С.О. Застосування віртуального потенціалу для моделювання просторових механізмів із в'язями / С.О. Баганов, Ю.М. Бардачов, С.А. Русанов // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2016. – № 1 (56). – С. 146–152.
8. Свідцтво про реєстрацію авторського права на твір "Комп'ютерна програма «Tools App» № 57913 від 29.12.2014 / Державна служба інтелектуальної власності / Русанов С.А., Дмитрієв Д.О., Подольський М.І., Кузнецов Ю.М.