

УДК 621.373.52

А.П. САМІЛА, Л.Ф. ПОЛІТАНСЬКИЙ  
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича**ГЕНЕРАЦІЯ ГАРМОНІЧНОГО КОЛИВАННЯ ДЛЯ СИНТЕЗУ ЦИФРОВИХ СИГНАЛІВ НА ОСНОВІ ВБУДОВАНИХ АПАРАТНИХ СИСТЕМ**

Проведено параметричне оцінювання ефективності алгоритмів генерування, найбільш придатних для синтезу цифрових періодичних сигналів на основі вбудованих апаратних систем. Встановлено, що при зміні розмірності таблиці перекодування від  $2^5$  до  $2^{26}$  рівень спектральних складових вищих порядків зменшується і при дробових значеннях приросту фази та прямій дискретизації за точками змінюється в інтервалі  $2 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-8}$ , а при застосуванні лінійної інтерполяції – в інтервалі  $2 \times 10^{-3} - 5 \times 10^{-8}$ . Застосування інтерполяції значень функції  $\sin$ , представлені дискретними відліками на часовому інтервалі  $0 - 2\pi$  забезпечило зменшення об'єму ПЗП з 768 Мбіт до 192 кбіт, при цьому зростання КНС не перевищувало 5 %.

Ключові слова: цифровий синтез, лінійна інтерполяція, CORDIC апроксимація, нелінійні спотворення.

A.P. SAMILA, L.F. POLITANSKY  
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University**WAVEFORM GENERATION FOR THE DIGITAL SYNTHESIS SYSTEMS BASED ON EMBEDDED HARDWARE**

Parametric estimation of the efficiency of periodical signals digital synthesis algorithms based on embedded hardware systems was performed. It was found that the level of the higher-order spectral components is reduced by changing the dimensions of the lookup table from  $2^5$  to  $2^{26}$ . For fractional values of the phase increment and direct lookup the THD varies in the range  $2 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-8}$ . When applying linear interpolation the THD varies in the range  $2 \times 10^{-3} - 5 \times 10^{-8}$ . The interpolation of sine function discrete values in the range  $0 - 2\pi$  provides the reduction of the ROM from 768 Mbit to 192 kbit. In this case, an increase of harmonic distortion doesn't exceed 5 percent.

Keywords: digital synthesis, linear interpolation, CORDIC approximation, harmonic distortion.

**Вступ**

Інтенсивний розвиток сучасних технологій передавання інформації, систем зв'язку ультрависокочастотних діапазонів, радіофізичних методів досліджень призвів до удосконалення існуючих і створення принципово нових методів та систем генерування і формування сигналів. Звісно, що фундаментальну роль в даному напрямку розвитку радіотехнічних та телекомунікаційних систем відіграли методи формування сигналів на основі алгоритмів прямого цифрового синтезу частот. Теоретичні основи методу набули розвитку ще з 70-х років минулого століття. Однак, практичного впровадження вони набули тільки з підвищенням рівня інтеграції пристроїв твердотільної електроніки завдяки впровадженню нових технологічних процесів, що уможливають виготовлення нанорозмірних структур. Реалізовані на базі цифрової архітектури, сучасні синтезатори частот забезпечують надзвичайно високі не притаманні для традиційних аналогових методів синтезу швидкість і точність встановлення параметрів генерованих коливань, переналаштування частоти носійного коливання без розриву його фази, можливість реалізації швидкісної модуляції чи маніпуляції, синтез спеціальних сигналів складної форми, миттєве числове управління параметрами та інші.

Метою даної роботи є дослідження та порівняльний аналіз основних методів генерації гармонічного коливання для синтезу в режимі реального часу цифрових сигналів на основі апаратних обчислювальних ядер, чи цифрових сигнальних процесорів.

**Методи генерації гармонічного коливання**

Найбільш точним методом синтезу того чи іншого сигналу є розрахунок миттєвого значення його функції на протязі заданого неперервного часового інтервалу. Очевидно, що у випадку генерації синусоїдального коливання, необхідно з максимальною точністю обчислювати значення функції  $\sin(\omega t)$ . Оскільки, у системах реального часу обчислювальні навантаження на центральний процесор є занадто великими, то реалізація такого методу унеможливлена.

У більшості випадків апаратної реалізації цифрових синтезаторів сигналів найбільшого поширення набули наступні методи нерекурсивної апроксимації синусоїдального коливання: табличний на основі записаних у постійній пам'ятовуючий пристрій (ПЗП) дискретних відліків синусоїдальної функції; гібридний – застосування інтерполяційних методів при знаходженні проміжних значень зчитаних з ПЗП даних; метод обертання координат [1–3]. Узагальнена структура прямого цифрового синтезатора частот (ПЦСЧ) приведена на рис. 1 [1]. Модифікації даної структури, що ґрунтуються на застосуванні нових теоретико-числових базисів та покращеної архітектури суматорів і перетворювачів фаза-амплітуда, а також удосконаленні методів формування лінійно-змінного сигналу керування фазою коливання детально розглянуті у роботах [3–5].

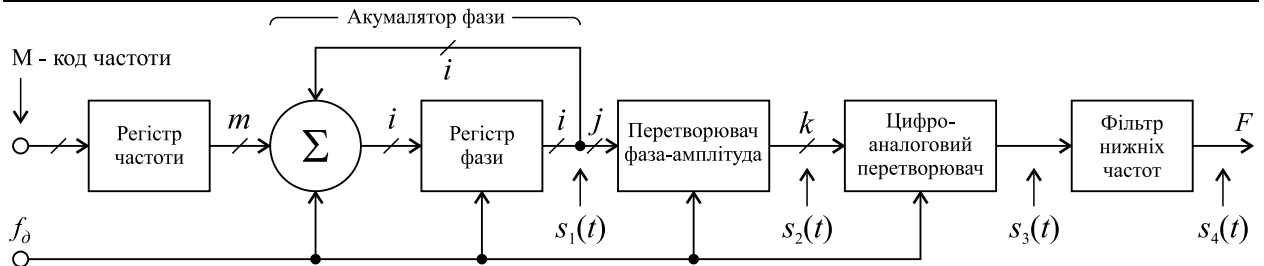


Рис. 1. Структура прямого цифрового синтезатора частот на основі акумулятора фази

Один із способів, що дозволяє уникнути труднощів з використанням обчислювальних ресурсів при цифровому синтезі сигналів, полягає у створенні таблиці  $N$  дискретних значень функції  $\sin(\omega t)$ , що описують її поведінку в інтервалі  $0 - 2\pi$ , або меншому (половина чи четверть періоду) завдяки властивості симетрії коливальної функції. Число вибірок значень функції та алгоритм перекодування самі по собі не визначають продуктивність даного методу, оскільки крім цього вона буде залежати від необхідної точності та стабільності формування сигналу у режимі реального часу і нелінійності процесу цифро-аналогового перетворення. Ефективність методу табличного перекодування визначається відношенням між точністю форми генерованого сигналу та чистотою реалізації його спектру [6]. Принцип сигнальних перетворень у ПЦСЧ (рис. 1) відображений на рис. 2.

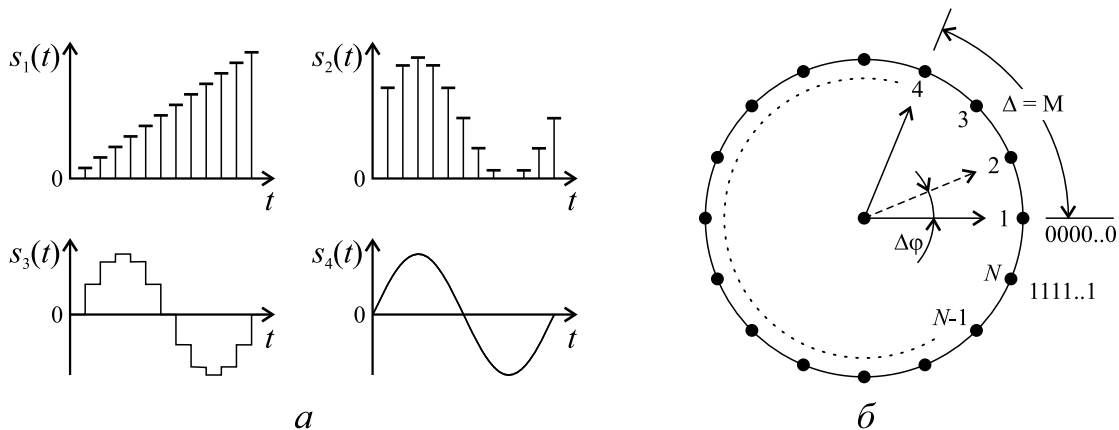


Рис. 2. Принцип роботи прямого цифрового синтезатора частот: а – епюри сигнальних перетворень, б – фазове коло цифрового обчислювального ядра

Іншим популярним способом апроксимації синусоїдального коливання є використання алгоритму CORDIC (Coordinate Rotation Digital Computer) рекурсивного або не рекурсивного типів [7]. Заснований на методі Гівенса (метод обертань), алгоритм CORDIC є одним із найбільш апаратно ефективних, оскільки в даному випадку необхідно реалізовувати лише ітеративні операції зсуву-додавання.

### Гармонічний аналіз вихідного сигналу ПЦСЧ

Частота вихідного сигналу ПЦСЧ, генерованого числовим методом залежить від частоти дискретизації  $f_0$  та від приросту фази  $\Delta$

$$F = \Delta \frac{f_0}{2^i}; \Delta \leq N/2,$$

де  $i$  – розрядність таблиці перекодування. При цьому, мінімальний крок семплювання визначається розмірністю таблиці перекодування  $N = 2^i$  і для одного циклу періодичного коливання складає

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{2^i}.$$

Якщо  $\Delta = 1$ , значення зчитуються послідовно з частотою  $f_0$ . Для генерації сигналів з довільними частотами в діапазоні  $f_0/2^i - f_0/2$  (до частоти Найквіста) необхідно, щоб  $\Delta$  приймало не тільки цілочисельні але й дробові значення. Як правило це призводить до суттєвого зростання коефіцієнту нелінійних спотворень (КНС) генерованого сигналу, що крім цього залежить і від помилок квантування, розмірності  $N$  та точності представлення записаних в таблиці вибірок  $n$  [8]. Крім того, відсікання молодших розрядів фази, що використовується для зменшення об'єму ПЗП, призводить до непоправних похибок апроксимації.

Для реалізації алгоритмів прямого цифрового синтезу та гармонічного аналізу вихідного сигналу ПЦСЧ складемо таблицю з  $N$  вибірок функції синусоїдального коливання. Значення вибірок коливальних функцій  $\sin$  та CORDIC-sin розраховані у програмному середовищі MATLAB за їх математичними моделями:

$$s(n) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{N}\right); \\ n \in \{1, 2, \dots, N\} \end{cases}; \quad s_C(n) = \begin{cases} \text{cordic sin}\left(\left(\frac{2\pi(n-1)}{N}\right); (I_C)\right), \\ n \in \{1, 2, \dots, N\} \end{cases}$$

де  $n$  – номер вибірки а  $I_C$  – число ітерацій алгоритму CORDIC, збільшення якого забезпечує зростання точності, але призводить до зростання часу розрахунку.

При дробовому  $\Delta$  для синтезу коливання з меншим рівнем спотворень необхідно до прямого табличного методу застосовувати інтерполяційний метод [8]. У випадку лінійної інтерполяції проміжні значення амплітуди генерованого сигналу обчислювалися за виразом:

$$s(n)_x = mx + \sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{N}\right),$$

де  $0 < x < 1$  – дробова частина приросту фази  $\Delta$ , а  $m$  – тангенс кута нахилу апроксимаційної прямої:

$$m = \frac{s(n) - s(n-1)}{n - (n-1)} = \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{N}\right).$$

Аналіз гармонічних спотворень проводився за методикою представленою в роботі [8], що базується на визначенні відношення енергії гармонік вищих порядків до сумарної енергії усіх гармонік:

$$K_H = \sum_{\kappa > 1} E_\kappa / \sum_{\kappa \geq 1} E_\kappa,$$

де  $E_\kappa$  – енергія спектральної складової з частотою  $F_\kappa$ . Оскільки коливання з дискретним відображенням є апроксимованим, то в його спектрі мають місце гармонічні  $F_\kappa$  та комбінаційні  $F_{\kappa c} = f_0 \pm F_\kappa$  складові.

Отримання точних і правильних результатів розрахунку енергетичних співвідношень можливе при оцінюванні усередненого значення КНС для повного циклу синтезованого коливання. При прямому табличному методі синтезу повний цикл в залежності від  $\Delta$  може складатися з декількох періодів коливання. В загальному випадку, якщо  $\Delta = A/B$ , де  $A$  і  $B$  – прості числа, то мінімальне число вибірок повного циклу  $N' = BN$ . Наприклад, якщо  $N = 256$  та  $\Delta = 2,5 = 5/2$ ,  $N' = 2 \cdot 256 = 512$ .

Комплексний ряд Фур'є дискретизованого сигналу, представленого послідовністю з  $N$  відліків на інтервалі спостереження  $T_c = nN$  матиме вигляд [9]:

$$s_o(t) = T_\delta \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \dot{C}_\kappa e^{j2\pi\kappa \frac{t}{T_c}},$$

де  $\kappa = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , а комплексні коефіцієнти ряду є комплексними амплітудами спектральних складових:

$$\dot{C}_\kappa = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j2\pi\kappa \frac{n}{N}}.$$

Для аналізу амплітудного спектру дискретизованого сигналу визначимо модулі ( $C_1, C_2, \dots, C_{N/2}$ ) та аргументи ( $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N/2}$ ) комплексних коефіцієнтів ряду Фур'є та запишемо вирази для миттєвих значень гармонік [9]:

$$\begin{aligned} s_1(n) &= 2C_1 \cos\left(2\pi \frac{n}{N} + \varphi_1\right); \\ s_2(n) &= 2C_2 \cos\left(4\pi \frac{n}{N} + \varphi_2\right); \\ &\dots\dots\dots \\ s_{N/2}(n) &= C_{N/2} \cos\left(\kappa 2\pi \frac{n}{N} + \varphi_{N/2}\right). \end{aligned}$$

Знаючи сумарну енергію гармонік сигналу на протязі циклу  $BN$  та енергію коливання основної частоти запишемо вираз для розрахунку КНС:

$$K_H = \frac{\sum_{n=0}^{BN-1} s_o(n)^2 - 2BN |\dot{C}_1|^2}{\sum_{n=0}^{BN-1} s_o(n)^2}.$$

### Моделювання та порівняльний аналіз алгоритмів генерації секвент

Розроблення форми сигналу та порівняння алгоритмів синтезу секвент проведено шляхом комп'ютерної параметричної ідентифікації з використанням інтеграції MATLAB і Simulink [10]. Застосування модулів Signal Processing Toolbox™ та DSP System Toolbox™, що суттєво розширюють можливості MATLAB Simulink в області цифрового формування сигналів, дозволило розробити і проаналізувати алгоритм генерації і пов'язані з ним якісні характеристики сигналу ще до реалізації на апаратному рівні (рис. 3).

Дослідження гармонічних спотворень проводилось для дискретизованого за точками, лінійно

інтерпольованого з кроком  $\Delta$  та апроксимованого за алгоритмом CORDIC сигналів (50 ітерацій). При цьому  $N = 256$  дискретних значень функції  $\sin$  були представлені як числами подвійної точності з плаваючою крапкою, так і відліками 24-бітних чисел з фіксованою крапкою. При всіх інших однакових умовах, застосування таблиці подвійної точності забезпечує суттєве зниження КНС у випадку цілочисельних  $\Delta$ . У випадку дробових  $\Delta$  застосування лінійної інтерполяції забезпечує зниження розкиду абсолютних значень КНС з  $10^{-3}$  до  $10^{-5}$  (рис. 4). Розроблення форми сигналу для ПЦСЧ з покращеною спектральною чистотою ініціює вибір оптимальної розмірності  $N$  таблиці

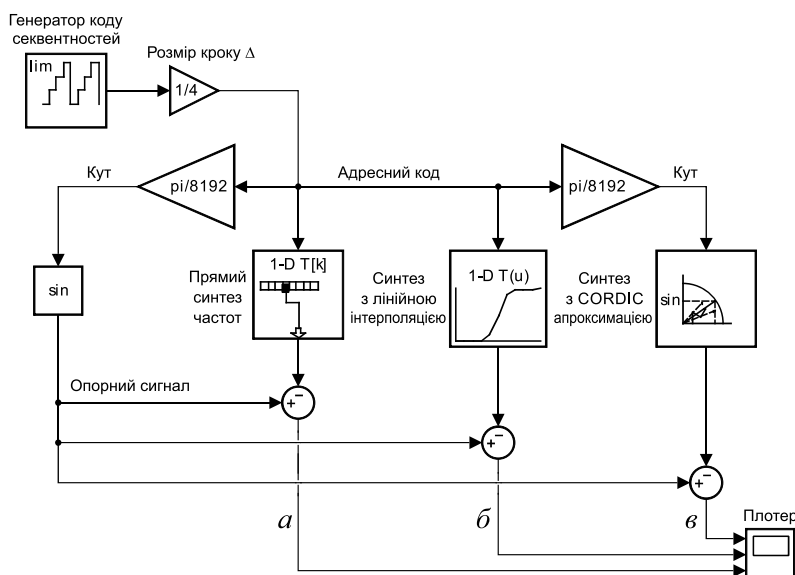


Рис. 3. Імітаційна модель для дослідження алгоритмів генерації гармонічного коливання

перекодування. Залежності величини КНС від  $N$  для таблиці з фіксованою крапкою приведені на рис. 5. При зміні  $N$  від  $2^5$  до  $2^{26}$  рівень спектральних складових вищих порядків зменшується і змінюється в інтервалі  $2 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-8}$  (рис. 5,а) при дробових  $\Delta$  та прямій дискретизації за точками, а при застосуванні лінійної інтерполяції – в інтервалі  $2 \times 10^{-3} - 5 \times 10^{-8}$  (рис. 5,б). Збільшення  $N$  покращує спектральну чистоту сигналу, проте спричиняє суттєве зростання об'єму ПЗП ПЦСЧ. Однак, існує оптимальне значення  $N_{opt}$ , подальше зростання якого істотно не впливає на зміну величини КНС. Як показали результати моделювання, в найпростішому варіанті реалізації ПЦСЧ (у випадку дискретизації за точками)  $N_{opt} = 2^{25}$ , при синтезі з лінійною інтерполяцією  $N_{opt}$  становить  $2^{13}$ . Застосування інтерполяції значень функції  $\sin$ , представлені дискретними відліками на інтервалі  $0 - 2\pi$  забезпечило зменшення об'єму ПЗП з 768 Мбіт до 192 кбіт, а зростання КНС не перевищувало 5 %.

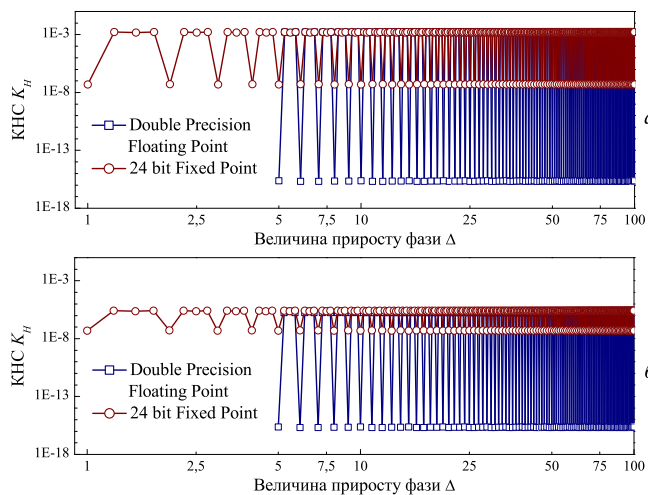


Рис. 4. Залежність КНС від величини приросту фази: а – прямий синтез, б – синтез з лінійною інтерполяцією

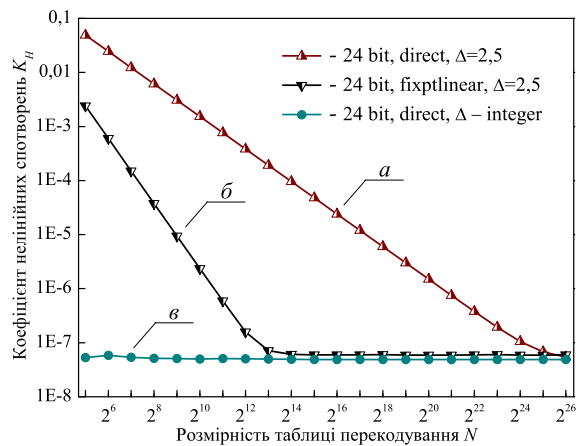


Рис. 5. Залежність КНС від розмірності таблиці перекодування

Застосування моделювання дозволило також провести візуалізацію форм синтезованих сигналів та їх порівняння з опорним сигналом функції  $\sin(x)$  шляхом віднімання синтезованого і опорного сигналів. На рис. 6 показано абсолютні відхилення миттєвих значень сигналу  $s(t)$  синтезованого трьома різними методами при  $N_{opt} = 8192$ . Як і слід було очікувати з розрахунку КНС, лінійна інтерполяція вносить меншу похибку, ніж дискретизація за точками, проте алгоритм CORDIC наближення забезпечує більш низький поріг похибки (рис. 6,в) у порівнянні з лінійною інтерполяцією. Зазвичай, більшої точності можна досягти за рахунок збільшення числа ітерацій, а отже і збільшення часу обчислень.

**Висновки**

Проведено параметричне оцінювання ефективності використання основних методів генерації гармонічного синусоїдального коливання для синтезу цифрових сигналів на основі вбудованих апаратних систем. Із результатів досліджень нелінійних спотворень та порівняння точності форми сигналів

генерованих дискретизацією по точках, лінійною інтерполяцією та використанням алгоритму CORDIC наближення можна зробити висновок про наступне:

Перевагами синтезаторів на основі прямого табличного синтезу з лінійною інтерполяцією аргументу коливальної функції для дробових значень приросту фази є проста апаратна реалізація та низький рівень нелінійних спотворень. Недоліком є спотворення форми генерованого сигналу.

1. Перевагами синтезаторів із апаратним обчислювальним ядром CORDIC в якості перетворювача фаза-амплітуда є найнижчий рівень нелінійних спотворень та підвищення точності форми сигналу за рахунок збільшення числа ітерацій. Недоліком є зростання обчислювальних навантажень та часу обчислення при збільшенні числа ітерацій.

CORDIC алгоритм мінімізує необхідність використовуваних помножувачів, тому може застосовуватися у випадку, якщо вони є мало ефективні або взагалі відсутні в наявному апаратному забезпеченні.

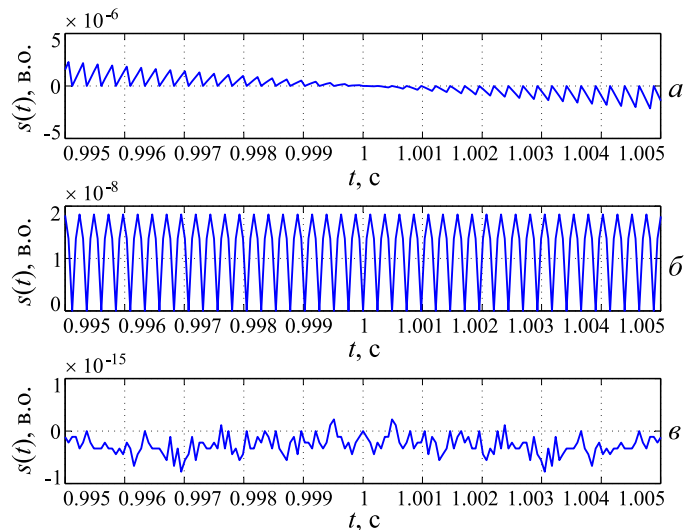


Рис. 6. Порівняння точності форми синтезованих сигналів: а – для прямого табличного методу, б – для інтерполяційного методу, в – для методу CORDIC апроксимації

## Література

1. Vankka J. Direct Digital Synthesizers: Theory, Design and Applications / J. Vankka // Helsinki University of Technology. – 2000. – 192 p.
2. Samila Andriy. Implementation of pulsed radiospectroscopy methods of NQR based on FPGA / Andriy Samila, Yuriy Bobalo, Zenon Hotra, Oleksandra Hotra, Leonid Politans'kyu // Metrol. Meas. Syst. – 2015. – Vol. 22, Issue 3. – P. 363–370.
3. Полікарровських О. І. Методи формування синусоїдальних сигналів у цифрових синтезаторах сітки частот / О. І. Полікарровських, О. І. Шевчук // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2009. – № 2. – С. 100–105.
4. Полікарровських О. І. Застосування нового теоретико-числового базису для побудови високошвидкісних обчислювальних синтезаторів частоти (DDS) / О. І. Полікарровських // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2013. – № 1. – С. 20–26.
5. Полікарровських О. І. Методи підвищення якості спектральних характеристик високошвидкісних обчислювальних синтезаторів частоти (DDS) / О. І. Полікарровських, В. В. Мішан // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2013. – № 5. – С. 208–211.
6. Brandon David. DDS design [Електронний ресурс] / David Brandon // EDN. – 2004. – P. 71–84. – Режим доступу : <http://www.edn.com>.
7. Mandal A. FPGA implementation of pipelined CORDIC for digital demodulation in FMCW radar / Amritakar Mandal, Rajesh Mishra // Infocommunications J. – 2013. – Vol. 5, No. 2. – P. 17–23.
8. Chrysafis Andreas. Motorola Digital Signal Processors. Digital Sine-Wave Synthesis Using the DSP56001/2 [Електронний ресурс] / Andreas Chrysafis // Motorola® Inc. – 1988. – 44 p. – Режим доступу : <http://jcoppens.com/univ/data/pdf/dsp/apr1.pdf>.
9. Мандзій Б. А. Основи теорії сигналів : підручник / Б. А. Мандзій, Р. І. Желяк. – Львів : Видавничий дім «Ініціатива», 2008. – 240 с.
10. Digital Waveform Generation: Approximating a Sine Wave [Електронний ресурс] MathWorks®. – 2016. – Режим доступу : <https://www.mathworks.com/help/simulink/examples/digital-waveform-generation-approximating-a-sine-wave.html>.

Рецензія/Peer review : 5.1.2017 р. Надрукована/Printed : 5.2.2017 р.  
Статтю представляє: д.т.н., проф. Політанський Л.Ф.