УДК 510.6

Л.П. БЕДРАТЮК, Г.І. БЕДРАТЮК
Хмельницький національний університет

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ MAPLE ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ

*Надано опис основних команд пакетів **combinat** та **genfunc** системи комп'ютерної алгебри Maple. Розглянуто способи розв'язання деяких типових комбінаторних задач в Maple. Зокрема розглянуті команди для наступних розділів: перестановки, комбінації, розміщення, розбиття, рекурентні співвідношення, породжуючі функції, обчислення сум. Розглянуті пакети пропонується використовувати в ході вивчення дисциплін: дискретна математика, дискретні структури, алгоритми та структури даних, комп'ютерна алгебра та символьні обчислення*

Ключові слова: комбінаторика, Maple, рекурентні співвідношення, породжуючі функції, біноміальні коефіцієнти, розбиття, перестановки.

L.P. BEDRATIUK, A.I. BEDRATIUK
Khmelnytskyi National University

USING OF THE COMPUTER ALGEBRA SYSTEM MAPLE FOR COMBINATORIAL PROBLEMS

*The last decade has seen active penetration of computer algebra systems in the educational process that allows us to create innovative learning technologies, including mathematical teaching in universities. One of the most popular computer algebra systems is the system Maple, company Waterloo Maple, which successfully combines symbolic manipulation, computational mathematics, powerful graphics and easy programming language. Because of its convenience and versatility Maple system became an indispensable tool of research for many scientists, engineers and students. Almost every section of modern mathematics in Maple developed some specialized packages. However, at present these technologies, despite their effectiveness and visibility, for various reasons, Is not common in the learning process, which is not conducive to the integration of higher education in Ukraine. The purpose of this paper is to develop a common approach to the use of computer algebra system Maple to solve some common problems of combinatorics, and which can be used in the educational process. The paper describes the packages **combinat** and **genfun** and illustrated by examples of their use for solving typical problems arising in combinatorics. The article can be useful in the study of some sections of discrete mathematics, discrete structures, algorithms and data structures.*

Keywords: combinatorics, Maple, permutation, partitions, combinatorial numbers, recurrence relations, combinatorial sum, generating functions

Постановка проблеми. Останнім десятиліттям спостерігається динамічне проникнення систем комп'ютерної алгебри в освітній процес, що дозволяє формувати інноваційні технології навчання, зокрема математичного навчання в університетах [1–4]. Однією з найбільш популярних в світі систем комп'ютерної алгебри є система Maple фірми «WaterlooMaple, Inc.», яка успішно поєднує символьні маніпуляції, обчислювальну математику, потужну графіку та зручну мову програмування. В силу своєї зручності та універсальності система Maple стала незамінним інструментом наукових досліджень для студентів, інженерів та дослідників. Майже для кожного розділу сучасної математики в Maple розроблені окремі спеціалізовані пакети. Проте на даний час ці технології, незважаючи на свою ефективність, простоту та наочність, в силу різних причин, ще недостатньо поширені в навчальному процесі, що не сприяє інтеграції системи вищої освіти України у світовий простір вищої освіти. У статті описуються пакети команд ***combinat та genfun*** та на прикладах ілюструються особливості їхнього використання для розв'язання типових комбінаторних задач. Початкові навики роботи в системі комп'ютерної алгебри Maple, детально розглянуто в [5, 6], а основи сучасної комбінаторики – в [7]. Комбінаторні методи є наріжним каменем в розробці та аналізі сучасних алгоритмів на дискретних структурах що викликало підвищення інтересу до комбінаторики в останні десятиліття.

Матеріали статті можуть бути використані студентами та викладачами ВНЗ для розв'язання типових задач, які зустрічаються в процесі вивчення дисциплін "Алгоритми та структури даних", "Дискретні структури", "Дискретна математика". Дана стаття є продовженням статей авторів [8–12], спрямованих на популяризацію систем комп'ютерної алгебри в освіті.

Аналіз джерел літературних даних та публікацій і постановка проблеми. Метою даної статті є розгляд основних команд спеціалізованого пакетів **combinat** та **genfun,** які розроблені для розв'язання типових задач комбінаторики в системі Maple. Початкові навики роботи в системі комп'ютерної алгебри Maple, детально розглянуто в [5–6].

Нагадаємо що комбінаторика це частина математики, яка займається вивченням скінчених наборів дискретних об'єктів які називаються комбінаторними об'єктами. Поле інтересів комбінаторики включає перерахування (знаходження кількості) комбінаторних об'єктів із наперед заданим типом та розміром, вирішення чи деякі критерії існування комбінаторних об'єктів можуть бути досягнуті; конструювання та аналіз об'єктів які задовольняють таким критеріям, знаходження найбільших, найменших, чи оптимальних об'єктів, а також вивчення комбінаторних структур, які виникають в алгебраїчному контексті, або використання алгебраїчної техніки до комбінаторних проблем. Способи отримання комбінаторних об'єктів називаються комбінаторними схемами а числа які виникають при перерахування комбінаторних об'єктів називаються комбінаторними числами. Основними комбінаторними об'єктами є комбінації, перестановки, розбиття. Найвідоміші комбінаторні числа – біноміальні та мультиноміальні коефіцієнти, числа Стірлінга, Фібоначчі, Ейлера, Бернуллі та інші.

Схематично основна задача комбінаторики може бути сформульована наступним чином – нехай нам задана зліченна сім'я скінченних множини $X_1, X_2,$ і нам потрібно в якомусь вигляді описати послідовність $a_1, a_2,$ де позначає кількість елементів множини Як правило опис зводиться до складання рекурентного рівняння з використанням сум.

Виклад основного матеріалу. Дамо короткий опис пакетів системи Maple, які призначені для розв'язання типових задач з комбінаторики. Крім того ми розглянемо засоби Maple для розв'язування рекурентних рівнянь та систем рекурентних рівнянь і засоби Maple для обчислення сум.

Пакет **combinat** містить різноманітні процедури які пов'язані з основними комбінаторними операціями, зокрема з операціями розбиття, комбінаціями та перестановками.

Розглянемо основні типи команд з цього пакету. Для підключення пакету **combinat** потрібно в командному рядку Maple набрати командний рядок такого вигляду:

>**with(combinat);**

[Chi, *bell*, binomial, *cartprod*, *character*, *choose*, *composition*, *conjpart*, *decodepart*, *encodepart*, *eulerian1*, *eulerian2*, *fibonacci*, *firstpart*, *graycode*, *inttovec*, *lastpart*, *multinomial*, *nextpart*, *numbcomb*, *numbcomp*, *numbpart*, *numbperm*, *partition*, *permute*, *powerset*, *prevpart*, *randcomb*, *randpart*, *randperm*, *setpartition*, *stirling1*, *stirling2*, *subsets*, *vectoint*]

Після чого з'явиться перелік всіх команд пакету, основні з яким ми опишемо нижче.

Комбінаторні числа. Команда **binomial(n,r)** обчислює біноміальний коефіцієнт, що є кількістю різних наборів з ***r*** об'єктів, які можуть бути вибрані із ***n*** різних об'єктів.. Якщо обидва аргументи є невід'ємні цілі числа, причому $0 \le r \le n$, то $\mathrm{binomial}(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$. Якщо *n* і ***r*** є цілими числами, які не задовольняють умову $0 \le r \le n$, або *n* та *r* є раціональними числами, або числами з плаваючою точкою, тоді біноміальний коефіцієнт виражається через гамму-функцію:

$$\mathrm{binomial}(n, r) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r+1)}$$

>**binomial(4, 2);**

$$6$$

>**binomial(2, 1/2);**

$$\frac{16}{3\pi}$$

>**binomial(2.1, 2+3*I);**

$$-56.56167619 - 98.27156511\, I$$

>**factor(expand(binomial(n, 2)));**

$$\frac{(n-1)\,n}{2}$$

Команда **multinomial(n, k1, k2, ..., km)** обчислює мультиноміальний коефіцієнт $n!/(k1!\,k2!...km!)$ при умові, що $n = k1 + k2 + ... + km$:

>**multinomial(8, 2, 3, 3);**

$$560$$

Команда **Stirling1(n,m)** обчислює числа Стірлінга першого роду, які рівні кількості перестановок довжини *n,* які подаються у вигляді добутку *m* циклів:

>**Stirling1(6,4);**

$$85$$

Команда **Stirling2(n,m)** обчислює числа Стірлінга другого роду, які рівні числу розбиттів *n*-елементної множини на *m* блоків і які визначаються наступною формулою через біноміальні коефіцієнти.

$$Stirling2(n, m) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k} k^n}{m!\,(-1)^{k-m}}$$

>**Stirling2(6,4);**

$$65$$

Числа Белла **bell(n)** визначаються як кількість всіх розбиттів *n*-елементної множини:

>**bell(10);**

$$115975$$

Числа Белла, за означенням, є сумою чисел Стірлінга другого роду

>**bell(15),add(stirling2(15,i),i=0..15);**

$$1382958545\ ,\ 1382958545$$

Числа Ейлера першого роду **eulerian1(n, k)** визначаються як кількість перестановок $\pi_1 ... \pi_n$ множини $\{1, 2, ..., n\}$ для яких рівно k елементів менші за попередні елементи, тобто $\pi_j < \pi_{j+1}$.

>**eulerian1(4, 2);**

$$11$$

Числа Ейлера другого роду eulerian2(n, k) визначають кількість перестановок $\pi_1\ \pi_2 ...\ \pi_{2\,n}$ мультимножини $[1, 1, 2, 2, ..., n, n]$, які володіють двома властивостями:

Всі числа між двома входженнями числа m є меншими за m та існує рівно k елементів j для яких виконується $\pi_j < \pi_{j+1}$.

>**eulerian2(4, 2);**

$$58$$

Команді **fibonacci(n)** обчислює n-е число Фібоначчі, тобто число яке задається рекурентним співвідношенням

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$115975$$

>**fibonacci(15);**

$$610$$

Команда **fibonacci(n, x)** обчислює n-й многочлен Фібоначчі, які визначаються породжуючою функцією

$$\frac{t}{1 - x\,t - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n, x)\, t^n$$

>**fibonacci(15,x);**

$$x^{14} + 13\,x^{12} + 66\,x^{10} + 165\,x^8 + 210\,x^6 + 126\,x^4 + 28\,x^2 + 1$$

Розбиття. Команда **partition(n)** знаходить всі розбиття цілого числа **n** у всі можливі невпорядковані суми**:**

>**partition(6);**

$$[[1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 2], [1, 1, 2, 2], [2, 2, 2], [1, 1, 1, 3], [1, 2, 3], [3, 3], [1, 1, 4], [2, 4], [1, 5], [6]]$$

Ця команда у форматі **partition(n,m)** задає додаткову вимогу, щоб максимальне число у сумах було не більше за m:

> partition(6,3);

$$[[1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 2], [1, 1, 2, 2], [2, 2, 2], [1, 1, 1, 3], [1, 2, 3], [3, 3]]$$

Команди **encodepart** і **decodepart** повертають розбиття за даним номером та номер розбиття в канонічному списку розбиття числа:

>**decodepart(6,4);encodepart([2, 2, 2]);**

$$[2, 2, 2]$$

$$4$$

Команда **setpartition(S,m)** розбиває множину S на підмножини потужності m де число m повинно бути дільником потужності |S|

>**S := {1,2,3,4,5,6};setpartition(S,3);setpartition(S,1);**

$$S := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\{\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}, \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6\}\}, \{\{1, 2, 5\}, \{3, 4, 6\}\}, \{\{1, 2, 6\}, \{3, 4, 5\}\}, \{\{1, 3, 4\}, \{2, 5, 6\}\}, \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}, \{\{1, 3, 6\}, \{2, 4, 5\}\}, \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6\}\}, \{\{1, 4, 6\}, \{2, 3, 5\}\}, \{\{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}\}\}$$

$$\{\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}\}$$

Команда **graycode(n)** обчислює і повертає список який містить всі 2^n n-бітні цілі числа, у такому порядку, що двійкові записи сусідніх чисел відрізняються лише одним бітом.

>**graycode(3);**

$$[0, 1, 3, 2, 6, 7, 5, 4]$$

Перестановки. Команда **permute(n,m)** повертає список всіх k-елементних перестановок елементів множини (мультимножини) n. Якщо n є невід'ємним числом, цей параметр інтерпретується як множина із перших n цілих чисел. Якщо m не вказано, то вважається що m=n.

>**permute(3);**

$$[[1,2,3],[1,3,2],[2,1,3],[2,3,1],[3,1,2],[3,2,1]]$$

>**permute(3,2);**

$$[[1,2],[1,3],[2,1],[2,3],[3,1],[3,2]]$$

>**permute({a,b,c},2);**

$$[[a,b],[a,c],[b,a],[b,c],[c,a],[c,b]]$$

>**permute({a,b,a},2);**

$$[[a,b],[b,a]]$$

Команда **powerset(n)** повертає степінь (булеан) множини *n*.

>**powerset({a,b,c});**

$$\{\{\ \},\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

Команда **choose(n),** у випадку коли n натуральне число**,** повертає список всіх підмножин множини перших *n* натуральних чисел:

>**choose(4);**

$$[[\ ],[1],[2],[3],[4],[1,2],[1,3],[1,4],[2,3],[2,4],[3,4],[1,2,3],[1,2,4],$$
$$[1,3,4],[2,3,4],[1,2,3,4]]$$

Якщо *n* – множина, то **choose(n)** повертає множину всіх комбінацій елементів множини ***n***, тобто булеан множини ***n***:

>**choose({a,b,c});choose([a,b,c]);**

$$\{\{\ \},\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$
$$[[\ ],[a],[b],[a,b],[c],[a,c],[b,c],[a,b,c]]$$

Зауважимо, що ***n***може бути також і мультимножиною:

>**choose({a,b,a,a},2);**

$$\{\{\ \},\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

Якщо присутній параметр m, то команда **choose(n,m)** повертає список всіх підмножин із m елементів:

>**choose({a,b,c,d},2);**

$$\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}$$

Команда **numbcomb(n,m)** обчислює кількість комбінацій елементів множини ***n*** взятих по *k* раз. Якщо параметр *m* не заданий, тоді розглядаються всі можливі комбінації:

>**numbcomb({a, b, c},2);**

$$3$$

>**numbcomb(5);**

$$32$$

Команда **composition(n,k)** обчислює і повертає список який містить всі різні впорядковані набори додатних чисел довжини *k,* які в сумі дають число *n***:**

>**composition(5,2);**

$$\{[1,4],[2,3],[3,2],[4,1]\}$$

Супутня команда **numbcomp(n,k)** обчислює кількість різних впорядкованих наборів додатних чисел довжини *k* , які в сумі дають число *n*:

>**numbcomp(5, 2);**

$$4$$

Для розв'язання рекурентних рівнянь та їх систем використовується команда **rsolve** у форматі **rsolve(eqns, fcns),** де **eqns** – рекурентне рівняння або система рекурентних рівнянь разом з початковими умовами, а fcns – множина змінних, відносно яких потрібно знайти розв`язок. Maple намагається знайти аналітичний вираз для формули загального члена послідовності заданої рекурентним співвідношенням. Знайдемо розв'язок рекурентного рівняння для чисел Фібоначчі, яке задається рекурентним співвідношенням F(n)=F(n-1)+F(n-1) з початковими умовами F(0)=F(1)=1.

>**rsolve({F(n)=F(n-1)+F(n-2), F(0)=0, F(1)=1}, {F});**

$$\left\{\mathrm{F}(n)=\frac{\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^n}{5}-\frac{\sqrt{5}\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^n}{5}\right\}$$

Команда **rsolve(eqns, fcns, 'genfunc'(z)),** знаходить звичайну породжуючу функцію числової послідовності заданої рекурентним співвідношенням. Наприклад для чисел Фібоначчі отримуємо

>**rsolve({F(n)=F(n-1)+F(n-2), F(0)=0, F(1)=1}, {F}, 'genfunc'(z));**

$$\left\{\mathrm{F}(z)=-\frac{z}{z^2+z-1}\right\}$$

Аналогічно знаходяться вирази для породжуючих функцій системи рекурентних рівнянь

>**rsolve({s(n) = s(n-1) + t(n-1), t(n) = s(n) + t(n-1), s(0)=0, t(0)=1}, {s, t}, 'genfunc'(z));**

$$\left\{ s(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 1},\ t(z) = -\frac{z-1}{z^2 - 3z + 1} \right\}$$

Для систематичного застування техніки породжуючих функцій в Maple використовується пакет **genfunc**

>**with(genfunc);**

$$[rgf\_charseq, rgf\_encode, rgf\_expand, rgf\_findrecur, rgf\_hybrid, rgf\_norm, rgf\_pfrac,$$
$$rgf\_relate, rgf\_sequence, rgf\_simp, rgf\_term, termscale]$$

Розглянемо основні команди пакету. Команда **rgf_encode** повертає породжуючу функцію послідовності, яка задана формулою загального члена.

>rgf_encode(2^n, n, z);

$$\frac{1}{1 - 2z}$$

Команда **rgf_expand**, навпаки, за заданою породжуючою функцією повертає формулу загального члена послідовності, яку вона визначає

>**rgf_expand(1/(1-2*z),z,n);**

$$2^n$$

Функція **rgf_findrecur** заданої послідовності натуральних чисел знаходить лінійне рекурентне співвідношення якому задовольняють члени цієї послідовності. Формат функції **rgf_findrecur**(k, seq, F, n), де k – ціле число, порядок рекурентного рівняння, seq – список членів послідовності, F – ім'я послідовності, n – ім'я індексної змінної послідовності.

>rgf_findrecur(2, [1, 2, 3, 4], t, n);

$$t(n) = 2\,t(n-1) - t(n-2)$$

Команда **rgf_hybrid** знаходить породжуючу функцію добутку Адамара кількох послідовностей заданих своїми породжуючими функціями. Породжуюча функція квадрату чисел Фібоначчі має вигляд

>**rgf_hybrid(z,-z/(z^2+z-1),-z/(z^2+z-1));**

$$F2 := \frac{-z^2 + z}{z^3 - 2z^2 - 2z + 1}$$

Команда **rgf_term** знаходить коефіцієнти породжуючої функції

>rgf_term(1/(1-2*z), z, 100);

$$1267650600228229401496703205376$$

Сумування. Для знаходження в символьному вигляді скінчених та нескінчених комбінаторних сум використовується потужна команда **sum.**

>**Sum(i,i=1..n)=factor(sum(i,i=1..n)),Sum(i^2,i=1..n)=factor(sum(i^2,i=1..n));Sum(i^3,i=1..n)=factor(sum(i^3,i=1..n)),Sum(i^4,i=1..n)=factor(sum(i^4,i=1..n));**

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},\ \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Maple також обчислює нескінченні суми, при потребі виражаючи їх через стандартні функції

>**Sum(1/(x^2+i^2),i=1..infinity)=simplify(sum(1/(x^2+i^2),i=1..infinity));Sum(1/(x^2+i^2),i=1..infinity)=simplify(sum(1/(x+i)^2,i=1..infinity));**

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 + x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi \coth(\pi x)\,x - 1}{x^2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 + x^2} = \Psi(1, x+1)$$

Висновки. В статті запропонована методика вивчення деяких розділів комбінаторики з використанням відомої системи комп'ютерної алгебри Maple. Такі підходи, на думку авторів, сприятимуть активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів та підвищать ефективність організації їхньої самостійної роботи. Крім того вони внесуть новизну в традиційні методи навчання, які зараз характеризуються пасивністю та епізодичним безсистемним використанням інформаційних технологій. В статті надано опис основних команд пакетів ***combinat*** та ***genfunc*** системи комп'ютерної алгебри **Maple**. Розглянуто способи розв'язання деяких типових комбінаторних задач.

Література

1. Blythab B. Using Maple to implemente Learning integrated with computer aided assessment / B. Blythab, A. Labovic // International Journal of Mathematical Educationin Science and Technology. —2009. — 40(7). — P. 975–988.

2. Chvatalova Z. Education of Economics with Maple / Z. Chvatalova, J. Hrebicek // Proceedings of the 30th international conference mathematical methods in economics, Karviná, CzechRepublic, 2012. — P. 435–440.

3. Pierce, R., Stacey, K. Developing algebraic insight. Mathematics Teaching 203, 2007. P. 12–16.

4. Adym E. The use of computers in mathematics education: A paradigm shift from “computer assisted instruction” towards “student rogramming” / E. Adym // The Turkish Online Journal of Educational Technology. – 2005. – 4(2). – P. 27–34.

5. Adams P. Introduction To Mathematics With Maple / Adams P., Smith K., Vyborny R. – World Scientific Pub Co Inc, 2004. – 544 p.

6. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель / А.Н. Васильєв. — М. : Диалектика, 2003. — 352 с.

7. Tucker Alan, Applied Combinatorics, (2012). John Wiley&Sons, 498 p.

8. Бедратюк Г. Використання Maple при вивченні дисципліни "Методи синтезу та оптимізації" / Г. Бедратюк // Збірник наукових праць ФПМКТ. – Хмельницький : ХНУ, 2010. – № 1(3). – С. 137–141.

9. Бедратюк Л. Computer algebra systems in graph theory / Л. Бедратюк, Г. Бедратюк // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2012. – Vol. 6, N 4(60). – P. 43–46.

10. Бедратюк Л. Computer algebra systems in the elementary number theory / Л. Бедратюк, Г. Бедратюк // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2013. – Vol. 6, N 4(66). – P. 10–13.

11. Бедратюк Л. Використання системи комп’ютерної алгебри MAPLE для розв’язання задач оптимізації / Л. Бедратюк, Г. Бедратюк // Вісник Хмельницького національного уні*верситету. Технічні науки. – 2014. – № 5. – С. 247*–252.

12. Бедратюк Л.П. Використання системи комп’ютерної алгебри MAPLE в класичних криптосистемах / Л.П. Бедратюк, Г.І. Бедратюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2015. – № 6 *(231). – С. 148–153.*

Рецензія/Peer review : 26.3.2017 р. Надрукована/Printed :24.4.2017 р.
Стаття прорецензована редакційною колегією