Література

1. Kwon S. C. A comparative study between pulsed and D. C. ion nitriding behavior in specimens with blind holes / S. C. Kwon, G. H. Lee, M. C. Yoo // 1st International conference of ion nitriding. – Cleveland, Ohio. – 1986. – P. 77-81.

2. Remges W. Plasma (Ion) nitriding and plasma (Ion) nitrocarburizing units, application and experiences / W. Remges, J. Luhr // Proceedings of a International Conference of Ion Nitriding & Carburizing. – Cincinnati, Ohio. – 1989.

3. Grun R. Pulse plasma treatment the innovation for ion nitriding / R. Grun // 1st International conference of ion nitriding. – Cleveland, Ohio. – 1986. – P. 143-168.

4. Grun R. Industrial advances for plasma nitriding / R. Grun // Ion nitriding and ion carburising: 2nd International conference of ion nitriding/carburising. – Cleveland, Ohio. – 1989. – P. 157-163.

5. Dressler S. Plasma parameter control for industrial situations: The role of hot wall plasma nitriding furnaces / S. Dressler // Ion nitriding and ion carburising: 2nd International conference of ion nitriding/carburising. – Cleveland, Ohio. – 1989. – P. 183-195.

6. Давидов А. М. Апаратна реалізація режиму азотування в циклічно комутованому тліючому розряді / А. М. Давидов, М. В. Лук'янюк, І. М. Пастух // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2010. – № 1. – С. 50-53.

7. Токарев А.В. Ионное азотирование стали в импульсном тлеющем разряде / А. В. Токарев // Вестник Кыргызско-Российского славянского университета. – 2009. – Т. 9. – № 11. – С. 51-57.

8. Батушев В. А. Электронные приборы : учебник для вузов / В. А. Батушев. – 2-е, перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1980. – С. 302-303.

9. Пастух І.М. Вихідні положення визначення електричних характеристик при азотуванні в тліючому розряді з нестаціонарним живленням / І. М. Пастух, М. В. Лук'янюк, В. О. Курская // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2012. – № 1. – С. 7-10.

10. Пастух І. М. Перехідні процеси вмикання струму в установці для азотування в тліючому розряді з нестаціонарним живленням / І. М. Пастух, М. В. Лук’янюк, В. О. Курская // Вісник Хмельницького національного університету. – 2012. – № 3. – С. 11–15.

11. Хоровиц П. Искусство схемотехники. В 3 т. / П. Хоровиц, У. Хилл. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Мир, 1993.

12. Nicolai, U. u.a. Application Manual Power Modules; 2000 ISBN 3-932633-46-6.

Отримана/Received : 3.5.2017 р. Надрукована/Printed :8.6.2017 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Стечишин М.С.

УДК 539.3

А.О. РАМСЬКИЙ
Хмельницький національний університет

ЗМЕНШЕННЯ НАПРУЖЕНЬ ПЛИТИ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОКРИТТЯ ЇЇ ШАРОМ ІЗ ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

В роботі розглянуто спосіб впливу на розподіл напружень навантаженої плити, що лежить на жорсткій основі, за допомогою зовнішнього попередньо напруженого шару. Проведено аналіз отриманих результатів. Визначено доцільність покриття матеріалів зовнішнім шаром із початковими напруженнями для зменшення у них напружень.

Ключові слова: двошарова плита, початкові напруження.

A.O. RAMSKY
Khmelnytskyi National University

STRESS REDUCTION OF PLATE UNDER EXTERNAL LOAD BY ITS COVER LAYER WITH INITIAL STRESSES

We consider a way of influence on the distribution of loaded plate stress lying on a rigid base, with external prestressed layer. Axisymmetric task was posed. We examined conditions under which it is correct to use correlation of linearized elasticity theory for bodies with initial stresses. By Hankel's integral transformation it was received solution obtained through functional equations system. The functional systems Numerical solution was implemented by Gauss method. We received the conclusion about plate stress decrease if initial layer stresses are compressible. The analysis of the results was carrying out. Feasibility of materials coating by external layer with initial stresses for reducing their stress was determined.

Keywords: double layer plate, initial stresses.

Вступ. У багатьох практичних задачах часто постає питання зменшення напружень у конструкціях при дії на них різними силовими навантаженнями. Дана проблема виникає при розрахунку основ конструкцій, несучих поверхонь і т.п. Нерідко основа таких конструкцій представляє собою плиту.

Очевидно, що зменшення напружень у самій плиті можна досягти, наприклад, шляхом збільшення її товщини. Проте більший інтерес може представити інший підхід, а саме покриття плити попередньо напруженим шаром. Якщо виявиться, що наявність початкових напружень такого шару-протектора дозволить значно зменшити значення напружень самої плити, то це дозволить суттєво знизити матеріалоємність основи. Крім того, в силу конструктивних особливостей сама плита може бути початково напружена. У даній статті зроблена спроба визначення умов попереднього напруження захисного шару плити, що призводить до значного зменшення напружень основи.

Постановка задачі. Нехай маємо плиту, що лежить на жорсткій гладкій основі товщиною *H*. Захисний шар товщини H_1-*H* скріплений з основою, контакт – ідеальний. Зовнішнє осесиметричне навантаження складається з нормальної $p(r)$ та дотичної $q(r)$ складових. Утворена конструкція представлена на рис. 1 як двошарова плита з номерами шарів 1 – плити та 2 – захисного шару. Оскільки конструктивно наша задача осесиметрична, розв'язуватимемо її в циліндричній системі координат r,θ,z. Позначимо через $\tilde{Q}_{33}^{(i)}$ та $\tilde{Q}_{3r}^{(i)}$ $(i=1,2)$ нормальні та дотичні напруження *i*-го шару конструкції, а через $u_3^{(i)}$ та $u_r^{(i)}$ $(i=1,2)$ – осьові та радіальні переміщення.

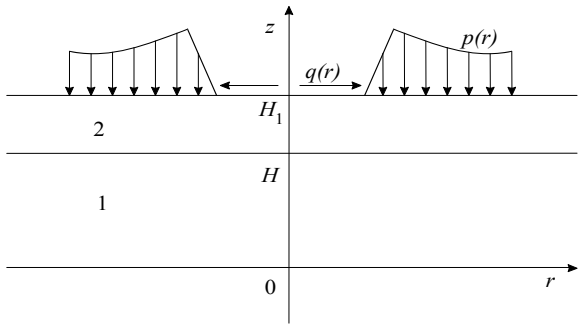

Рис. 1. Плита із захисним шаром на жорсткій основі

Граничні умови:

$$\tilde{Q}_{33|z=H_1}^{(2)} = p(r),\ \tilde{Q}_{3r|z=0}^{(1)} = 0,$$

$$\tilde{Q}_{3r|z=H_1}^{(2)} = q(r),\ u_{3|z=0}^{(1)} = 0, \qquad (1)$$

$0 \le r \le a$, a – радіус завантаженого кругу.

Умови спряження шарів

$$\tilde{Q}_{33|z=H}^{(1)} = \tilde{Q}_{33|z=H}^{(2)},\ u_{3|z=H}^{(1)} = u_{3|z=H}^{(2)},$$

$$\tilde{Q}_{3r|z=H}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r|z=H}^{(2)},\ u_{r|z=H}^{(1)} = u_{r|z=H}^{(2)} \qquad (2)$$

Задачу розв'язуємо в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [1, 2]. Припускаємо, що виконуються наступні умови:

1. Навантаження конструкції відбувається після встановлення у ній початкового напруженого стану.
2. Зовнішнє навантаження викликає в попередньо напружених шарах значно менші по величині збурення початкового напруженого стану, ніж відповідні величини початкового напруженого стану.
3. Початковий напружений стан з достатньою мірою точності можна вважати однорідним.
4. Розв'язок задачі – єдиний.

При виконанні другого припущення можна використовувати співвідношення лінеаризованої теорії пружності для дослідження збуреного напружено-деформованого стану. Третє припущення з урахуванням другого дає можливість застосування вищезгаданої теорії при однорідних початкових станах. Невиконання четвертої умови призводить до виникнення внутрішньої втрати стійкості [3].

Розв'язок задачі. Використовуючи перетворення Ханкеля рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial \tilde{Q}_{ij}}{\partial y_i} = 0,\ y_i \in V$$

та визначальних виразів для напружень через переміщення, для стисливих тіл –

$$\tilde{Q}_{ij} = \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta},$$

а для нестисливих тіл –

$$\tilde{Q}_{ij} = \tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} + \tilde{q}_{ij}\,p,$$

отримаємо в циліндричних координатах r,θ,z розв'язки:

для плити, тобто шару 1, що лежить на жорсткій основі

$$u_r^{(1)} = -\int_0^\infty \xi\left[\xi A_1(\xi)\left(2ch\xi z + \xi z sh\xi z\right) + B_1(\xi)ch\xi z\right]J_1(\xi r)\,d\xi$$

$$u_3^{(1)}=\frac{m_1^{(1)}}{\sqrt{n_1^{(1)}}}\int_0^\infty \xi\left[\left(\xi\left(1+s_1^{(1)}\right)sh\xi z+\xi^2 zch\xi z\right)A_1(\xi)+B_1(\xi)sh\xi z\right]J_0(\xi r)d\xi$$

$$\tilde{Q}_{33}^{(1)}=c_{44}^{(1)}\left(1+m_1^{(1)}\right)l_1^{(1)}\int_0^\infty \xi^2\left[\left(\left(1+s_1^{(1)}\right)ch\xi z+\xi zsh\xi z\right)A_1(\xi)+B_1(\xi)ch\xi z\right]J_0(\xi r)d\xi$$

$$\tilde{Q}_{3r}^{(1)}=-\frac{c_{44}^{(1)}\left(1+m_1^{(1)}\right)}{\sqrt{n_1^{(1)}}}\int_0^\infty \xi^2\left[\left(\xi+\xi^2 z\right)ch\xi zA_1(\xi)+B_1(\xi)sh\xi z\right]J_1(\xi r)d\xi;$$

а для захисного шару, тобто шару 2, що лежить на пружній основі

$$u_r^{(2)}=-\int_0^\infty \xi^2\left[\left(A_2(\xi)+zB_2(\xi)\right)e^{\xi z}+\left((1-\xi z)C_2(\xi)+z(2-\xi z)D_2(\xi)\right)e^{-\xi z}\right]J_1(\xi r)d\xi$$

$$u_3^{(2)}=\frac{m_1^{(2)}}{\sqrt{n_1^{(2)}}}\int_0^\infty \xi\left[\left(\xi A_2(\xi)+(1+z)B_2(\xi)\right)e^{\xi z}+\left(\xi\left(\xi z-s_1^{(2)}\right)C_2(\xi)+\left(s_1^{(2)}-\xi z(3-\xi z)\right)D_2(\xi)\right)e^{-\xi z}\right]J_0(\xi r)d\xi$$

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)}=c_{44}^{(2)}\left(1+m_1^{(2)}\right)l_1^{(2)}\int_0^\infty \xi^2\left[\left(\xi A_2(\xi)+(2+\xi z)B_2(\xi)\right)e^{\xi z}+\left(\xi\left(s^{(2)}+\xi z\right)C_2(\xi)+\left(\xi z(3-\xi z)-s^{(2)}(2-\xi z)\right)D_2(\xi)\right)e^{-\xi z}\right]J_0(\xi r)d\xi$$

$$\tilde{Q}_{3r}^{(2)}=-\frac{c_{44}^{(2)}\left(1+m_1^{(2)}\right)}{\sqrt{n_1^{(2)}}}\int_0^\infty \xi^2\left[\left(\xi A_2(\xi)+(1+\xi z)B_2(\xi)\right)e^{\xi z}+\left(-\xi\left(s_0^{(2)}-\xi z\right)C_2(\xi)+\left(s_0^{(2)}-3\xi z-\xi^2 z^2\right)D_2(\xi)\right)e^{-\xi z}\right]J_1(\xi r)d\xi.$$

Тут $A_1(\xi),B_1(\xi)$ – невідомі функції, які є інтегральними розв'язками відповідного бігармонійного рівняння [4]:

$$\varphi_1^{(1)}(r,z)=\int_0^\infty A_1(\xi)ch\xi zJ_0(\xi r)d\xi,\ \varphi_2^{(1)}(r,z)=\int_0^\infty B_1(\xi)sh\xi zJ_0(\xi r)d\xi,$$

а функції $A_2(\xi),B_2(\xi),C_2(\xi),D_2(\xi)$ є відповідно розв'язками

$$\varphi_1^{(2)}(r,z)=\int_0^\infty\left[\left(A_2(\xi)+zB_2(\xi)\right)e^{\xi z}\right]J_0(\xi r)d\xi,\ \varphi_2^{(2)}(r,z)=\int_0^\infty\left[\left(C_2(\xi)+zD_2(\xi)\right)e^{-\xi z}\right]J_0(\xi r)d\xi.$$

Перетворимо також за Ханкелем і функції розподілу зовнішнього навантаження $p(r),q(r)$:

$$p(r)=\int_0^\infty \xi\overline{p}(\xi)J_0(\xi r)d\xi,\ q(r)=\int_0^\infty \xi\overline{q}(\xi)J_1(\xi r)d\xi,$$

де трансформанти Ханкеля $\overline{p}(\xi),\overline{q}(\xi)$ визначаються з формул:

$$\overline{p}(\xi)=\int_0^\infty p(r)J_0(\xi r)dr,\ \overline{q}(\xi)=\int_0^\infty q(r)J_1(\xi r)dr.$$

Введемо безрозмірні незалежні змінні $\rho=\frac{r}{a},\ t=\frac{z}{H_1}$ та нову змінну інтегрування $\beta=a\xi$, параметри

$$\lambda=\frac{H_1}{a},\mu_1=\frac{H}{H_1},\delta=\frac{\sqrt{n_1^{(2)}}}{\sqrt{n_1^{(1)}}}\frac{c_{44}^{(1)}\left(1+m_1^{(1)}\right)}{c_{44}^{(2)}\left(1+m_1^{(2)}\right)},\chi=\frac{\sqrt{n_1^{(2)}}}{\sqrt{n_1^{(1)}}}\frac{m_1^{(1)}}{m_1^{(2)}},\kappa=\frac{c_{44}^{(1)}\left(1+m_1^{(1)}\right)l_1^{(1)}}{c_{44}^{(2)}\left(1+m_1^{(2)}\right)l_1^{(2)}},$$

а також нові невідомі функції параметру інтегрування β:

$$\overline{A}_1(\beta)=\frac{\beta^2}{a^4}A_1\left(\frac{\beta}{a}\right)ch\beta\lambda\mu_1,\overline{B}_1(\beta)=\frac{\beta}{a^3}B_1\left(\frac{\beta}{a}\right)ch\beta\lambda\mu_1,$$

$$\overline{A}_2(\beta)=\frac{\beta^2}{a^4}A_2\left(\frac{\beta}{a}\right)e^{\beta\lambda\mu_1},\overline{B}_2(\beta)=\frac{\beta}{a^3}B_2\left(\frac{\beta}{a}\right)e^{\beta\lambda\mu_1},\overline{C}_2(\beta)=\frac{\beta^2}{a^4}C_2\left(\frac{\beta}{a}\right)e^{-\beta\lambda\mu_1},\overline{D}_2(\beta)=\frac{\beta}{a^3}D_2\left(\frac{\beta}{a}\right)e^{-\beta\lambda\mu_1}.$$

Після задовільнення граничних умов (1) та умов спряження шарів (2) отримаємо матричну функціональну систему відносно шести невідомих функцій $\overline{A}_1(\beta),\overline{B}_1(\beta),\overline{A}_2(\beta),\overline{B}_2(\beta),\overline{C}_2(\beta),\overline{D}_2(\beta)$:

$$\begin{pmatrix} N^{(2,4)} & 0 \\ M^{(4,4)} & P^{(4,2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{A}_2(\beta) \\ \bar{B}_2(\beta) \\ \bar{C}_2(\beta) \\ \bar{D}_2(\beta) \\ \bar{A}_1(\beta) \\ \bar{B}_1(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{p}(\beta) \\ \bar{q}(\beta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

де матриці $N^{(2,4)}, M^{(4,4)}, P^{(4,2)}$ відповідно складаються з наступних елементів:

$$N^{(2,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2+\beta\lambda & \left(s^{(2)}+\beta\lambda\right)e_1(\beta) & \left[\beta\lambda(3-\beta\lambda)-s^{(2)}(2-\beta\lambda)\right]e_1(\beta) \\ -1 & -1-\beta\lambda & \left(s_0^{(2)}-\beta\lambda\right)e_1(\beta) & -\left(s_0^{(2)}-3\beta\lambda-\beta^2\lambda^2\right)e_1(\beta) \end{pmatrix},$$

$$M^{(4,4)} = \begin{pmatrix} e_1(\beta) & (2+\beta\lambda\mu_1)e_1(\beta) & s^{(1)}+\beta\lambda\mu_1 & \beta\lambda\mu_1(3-\beta\lambda\mu_1)-s^{(1)}(2-\beta\lambda\mu_1) \\ -e_1(\beta) & -(1+\beta\lambda\mu_1)e_1(\beta) & s_0^{(1)}+\beta\lambda\mu_1 & -s_0^{(1)}+3\beta\lambda\mu_1+(\beta\lambda\mu_1)^2 \\ -e_1(\beta) & -\beta\lambda\mu_1 e_1(\beta) & -1+\beta\lambda\mu_1 & -\beta\lambda\mu_1(2-\beta\lambda\mu_1) \\ e_1(\beta) & (1+\beta\lambda\mu_1)e_1(\beta) & \beta\lambda\mu_1-s_1^{(1)} & s_1^{(1)}-\beta\lambda\mu_1(3-\beta\lambda\mu_1) \end{pmatrix},$$

$$P^{(4,2)} = \begin{pmatrix} -\kappa\left(1+s^{(1)}+\beta\lambda\mu_1 th\beta\lambda\mu_1\right) & -\kappa \\ \delta\left(th\beta\lambda\mu_1+\beta\lambda\mu_1\right) & \delta th\beta\lambda\mu_1 \\ 2+\beta\lambda\mu_1 th\beta\lambda\mu_1 & 1 \\ -\chi t\left(\left(1+s_1^{(1)}\right)th\beta\lambda\mu_1+\beta\lambda\mu_1\right) & -\chi th\beta\lambda\mu_1 \end{pmatrix}, \text{ де } e_1(\beta)=e^{-\beta\lambda(1-\mu_1)}.$$

Числовий розв'язок отриманої системи рівнянь надалі реалізується модифікованим методом Гауса.

Аналіз числових результатів та висновки. Числовий експеримент проведено для конструкції, яка навантажена з інтенсивністю $p(r)=1, 0\le r\le a$ (в безрозмірних координатах $0\le\rho\le 1$). Товщина зовнішнього шару становить четверту частину основи. Обчислення напружень проводились на лінії розділу шарів. На графіках різним лініям відповідають різні величини початкового видовження λ_1, що зумовлюють початковий напружений стан (величина $\lambda_1=1$ відповідає початково ненапруженому стану).

На рис. 2–5 показано вплив початкових напружень зовнішнього шару на величину напружень $\tilde{Q}_{33}, \tilde{Q}_{3r}$ усієї плити. Аналіз графіків показує, що стисні початкові напруження приводять до зменшення напружень у плиті, а розтягуючі – до збільшення. Вплив початкових напружень на величину дотичних напружень $\tilde{Q}_{3r}$ – несуттєвий. Для матеріалів, що відповідають потенціалу Бартенєва-Хазановича при наближенні початкового видовження зовнішнього шару до критичної величини $\lambda_1\to\lambda_{кр}\left(\lambda_{кр}\approx 0,6934\right)$ напруження $\tilde{Q}_{33}$ усієї плити, відповідно і внутрішнього шару, значно зменшуються. Результат впливу початкових напружень суттєво залежить від виду пружного потенціалу та сильніше проявляється у високоеластичних тілах.

Висновок

Для зменшення напружень у навантаженій плиті її доцільно покрити шаром зі стисними початковими напруженнями. Для кращого результату зовнішній шар слід вибирати із матеріалів, що відповідають потенціалу Бартенєва-Хазановича.

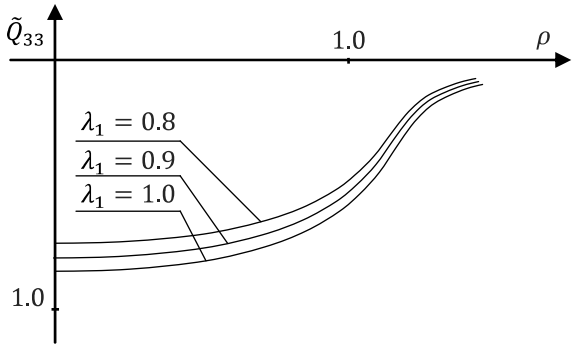

Рис. 2. Розподіл нормальних напружень (гармонійний потенціал)

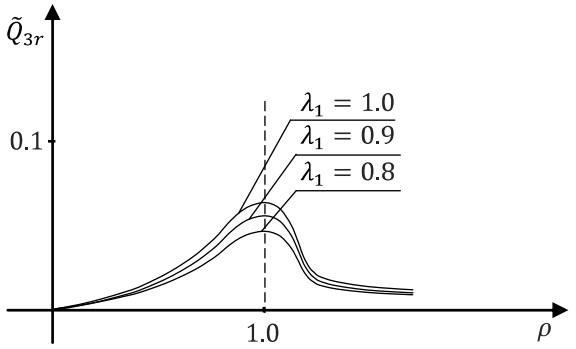

Рис. 3. Розподіл дотичних напружень (гармонійний потенціал)

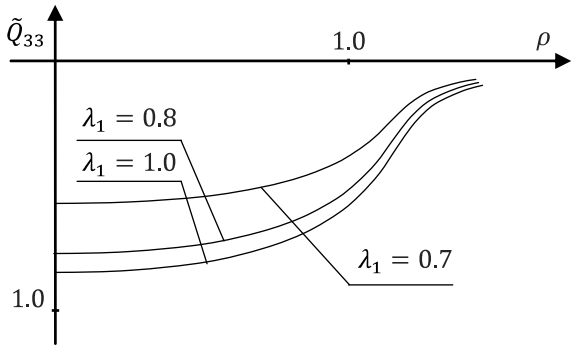

Рис. 4. Розподіл нормальних напружень (потенціал Бартенєва-Хазановича)

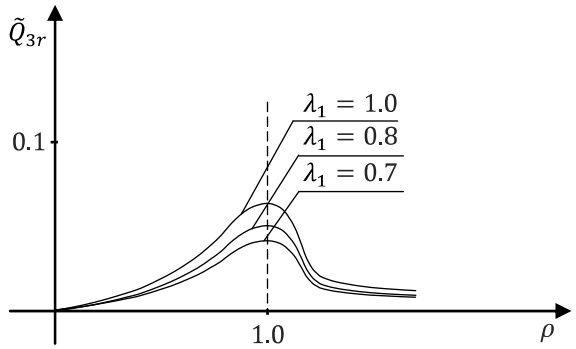

Рис. 5. Розподіл дотичних напружень (потенціал Бартенєва-Хазановича)

Література

1. Гузь А.Н. О представлении общих решений линеаризованной теории упругости несжимаемых тел / А.Н. Гузь // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 12. – С. 1092–1096.

2. Гузь А.Н. О представлении общих решений линеаризованной теории упругости сжимаемого тела / А.Н. Гузь // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 8. – С. 700–703.

3. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел / А.Н. Гузь. – К. : Наукова думка, 1971. – 276 с.

4. Гузь А.Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий. – Хмельницький : ХНУ, 2004. – 682 с.

Отримана/Received : 7.4.2017 р. Надрукована/Printed :8.6.2017 р.
Рецензент: д.т.н., проф.Сорокатий Р.В.