УДК 539.3

А.О. РАМСЬКИЙ
Хмельницький національний університет

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПЛИТИ, ПОКРИТОЇ ШАРОМ ІЗ ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

В роботі досліджена асимптотична поведінка розв'язку задачі про напружено-деформований стан конструкції, що складається із плити, яка лежить на жорсткій основі, та підсилена скріпленим із нею шаром з початковими напруженнями. Встановлено експоненціальне затухання функцій розв'язку.
Ключові слова: двошарова плита, початкові напруження, асимптотика.

A.O. RAMSKY
Khmelnytskyi National University

THE ASYMPTOTIC SOLUTION FOR PLATE UNDER EXTERNAL LOAD BY ITS COVER LAYER WITH INITIAL STRESSES

The double layer plate with initial stresses is considered. A plate rests on a rigid and smooth base. Contact between the layers is ideal. The plate is under combined normal and tangential load. The plate and the load are axisymmetric. The problem of definition of solution at infinity is determined. An analytical type of asymptotic solutions of functions is found. The exponential damping of function solution is established. Obtained results are using at further numerical realization of problem.
Keywords: double layer plate, initial stresses, asymptotic.

У роботі [1] розв'язана осесиметрична задача для нескінченної плити, що лежить на жорсткій основі, покритої шаром-протектором із початковими напруженнями. Показано, що наявність останніх дозволяє зменшити напруження плити. Ціль даної статті – дослідити поведінку розв'язку на нескінченності, що є необхідним при числовій реалізації задачі.

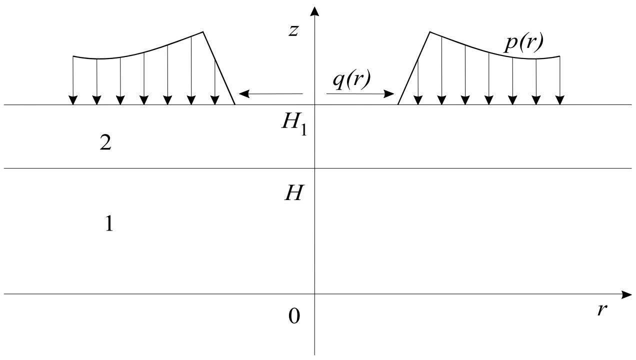

Рис. 1. Плита (1) із захисним шаром (2) на жорсткій основі

Граничні умови:

$$\tilde{Q}^{(2)}_{33|z=H_1} = p(r),\ \tilde{Q}^{(1)}_{3r|z=0} = 0,$$

$$\tilde{Q}^{(2)}_{3r|z=H_1} = q(r),\ u^{(1)}_{3|z=0} = 0, \qquad (1)$$

$0 \le r \le a$, a – радіус завантаженого кругу.

Умови спряження шарів

$$\tilde{Q}^{(1)}_{33|z=H} = \tilde{Q}^{(2)}_{33|z=H},\ u^{(1)}_{3|z=H} = u^{(2)}_{3|z=H},$$

$$\tilde{Q}^{(1)}_{3r|z=H} = \tilde{Q}^{(2)}_{3r|z=H},\ u^{(1)}_{r|z=H} = u^{(2)}_{r|z=H} \qquad (2)$$

Отже, для плити із покриттям (рис. 1) в позначеннях $\tilde{Q}^{(i)}_{33}$ та $\tilde{Q}^{(i)}_{3r}\ (i=1,2)$ нормальні та дотичні напруження i-го шару конструкції, $u^{(i)}_3$ та $u^{(i)}_r\ (i=1,2)$ – осьові та радіальні переміщення в [1] отримали:

для плити, тобто шару 1, що лежить на жорсткій основі

$$u^{(1)}_r = -\int_0^\infty \xi\left[\xi A_1(\xi)\left(2ch\xi z + \xi z sh\xi z\right) + B_1(\xi) ch\xi z\right] J_1(\xi r)\, d\xi$$

$$u^{(1)}_3 = \frac{m^{(1)}_1}{\sqrt{n^{(1)}_1}} \int_0^\infty \xi\left[\left(\xi\left(1+s^{(1)}_1\right) sh\xi z + \xi^2 z ch\xi z\right) A_1(\xi) + B_1(\xi) sh\xi z\right] J_0(\xi r)\, d\xi$$

$$\tilde{Q}^{(1)}_{33} = c^{(1)}_{44}\left(1+m^{(1)}_1\right) l^{(1)}_1 \int_0^\infty \xi^2\left[\left(\left(1+s^{(1)}_1\right) ch\xi z + \xi z sh\xi z\right) A_1(\xi) + B_1(\xi) ch\xi z\right] J_0(\xi r)\, d\xi$$

$$\tilde{Q}^{(1)}_{3r} = -\frac{c^{(1)}_{44}\left(1+m^{(1)}_1\right)}{\sqrt{n^{(1)}_1}} \int_0^\infty \xi^2\left[\left(\xi + \xi^2 z\right) ch\xi z A_1(\xi) + B_1(\xi) sh\xi z\right] J_1(\xi r)\, d\xi;$$

а для захисного шару, що лежить на пружній основі

$$u^{(2)}_r = -\int_0^\infty \xi^2\left[\left(A_2(\xi) + zB_2(\xi)\right) e^{\xi z} + \left(\left(1-\xi z\right) C_2(\xi) + z\left(2-\xi z\right) D_2(\xi)\right) e^{-\xi z}\right] J_1(\xi r)\, d\xi$$

$$u_3^{(2)}=\frac{m_1^{(2)}}{\sqrt{n_1^{(2)}}}\int_0^\infty\xi\Big[\big(\xi A_2(\xi)+(1+z)B_2(\xi)\big)e^{\xi z}+\Big(\xi\big(\xi z-s_1^{(2)}\big)C_2(\xi)+\big(s_1^{(2)}-\xi z(3-\xi z)\big)D_2(\xi)\Big)e^{-\xi z}\Big]J_0(\xi r)\,d\xi$$

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)}=c_{44}^{(2)}\big(1+m_1^{(2)}\big)l_1^{(2)}\int_0^\infty\xi^2\Big[\big(\xi A_2(\xi)+(2+\xi z)B_2(\xi)\big)e^{\xi z}+\Big(\xi\big(s^{(2)}+\xi z\big)C_2(\xi)+\big(\xi z(3-\xi z)-s^{(2)}(2-\xi z)\big)D_2(\xi)\Big)e^{-\xi z}\Big]J_0(\xi r)\,d\xi$$

$$\tilde{Q}_{3r}^{(2)}=-\frac{c_{44}^{(2)}\big(1+m_1^{(2)}\big)}{\sqrt{n_1^{(2)}}}\int_0^\infty\xi^2\Big[\big(\xi A_2(\xi)+(1+\xi z)B_2(\xi)\big)e^{\xi z}+\Big(-\xi\big(s_0^{(2)}-\xi z\big)C_2(\xi)+\big(s_0^{(2)}-3\xi z-\xi^2z^2\big)D_2(\xi)\Big)e^{-\xi z}\Big]J_1(\xi r)\,d\xi.$$

З урахування початкових умов (1), (2), а також інтегрального перетворення Ханкеля функцій розподілу зовнішнього навантаження $p(r),q(r)$:

$$p(r)=\int_0^\infty\xi\overline{p}(\xi)J_0(\xi r)\,d\xi,\ q(r)=\int_0^\infty\xi\overline{q}(\xi)J_1(\xi r)\,d\xi,$$

введення нових безрозмірних незалежних змінних $\rho=\frac{r}{a},\ t=\frac{z}{H_1}$ та змінної інтегрування $\beta=a\xi$, параметрів

$$\lambda=\frac{H_1}{a},\mu_1=\frac{H}{H_1},\delta=\frac{\sqrt{n_1^{(2)}}}{\sqrt{n_1^{(1)}}}\frac{c_{44}^{(1)}\big(1+m_1^{(1)}\big)}{c_{44}^{(2)}\big(1+m_1^{(2)}\big)},\chi=\frac{\sqrt{n_1^{(2)}}}{\sqrt{n_1^{(1)}}}\frac{m_1^{(1)}}{m_1^{(2)}},\kappa=\frac{c_{44}^{(1)}\big(1+m_1^{(1)}\big)l_1^{(1)}}{c_{44}^{(2)}\big(1+m_1^{(2)}\big)l_1^{(2)}},$$

та нових невідомих функцій параметру інтегрування β:

$$\overline{A}_1(\beta)=\frac{\beta^2}{a^4}A_1\left(\frac{\beta}{a}\right)ch\beta\lambda\mu_1,\overline{B}_1(\beta)=\frac{\beta}{a^3}B_1\left(\frac{\beta}{a}\right)ch\beta\lambda\mu_1,$$

$$\overline{A}_2(\beta)=\frac{\beta^2}{a^4}A_2\left(\frac{\beta}{a}\right)e^{\beta\lambda\mu_1},\overline{B}_2(\beta)=\frac{\beta}{a^3}B_2\left(\frac{\beta}{a}\right)e^{\beta\lambda\mu_1},\overline{C}_2(\beta)=\frac{\beta^2}{a^4}C_2\left(\frac{\beta}{a}\right)e^{-\beta\lambda\mu_1},\overline{D}_2(\beta)=\frac{\beta}{a^3}D_2\left(\frac{\beta}{a}\right)e^{-\beta\lambda\mu_1}$$

отримано функціональну систему відносно шести функцій $\overline{A}_1(\beta),\overline{B}_1(\beta),\overline{A}_2(\beta),\overline{B}_2(\beta),\overline{C}_2(\beta),\overline{D}_2(\beta)$:

$$\begin{pmatrix}N^{(2,4)} & 0\\ M^{(4,4)} & P^{(4,2)}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\overline{A}_2(\beta)\\ \overline{B}_2(\beta)\\ \overline{C}_2(\beta)\\ \overline{D}_2(\beta)\\ \overline{A}_1(\beta)\\ \overline{B}_1(\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{p}(\beta)\\ \overline{q}(\beta)\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Матриці $N^{(2,4)},M^{(4,4)},P^{(4,2)}$ мають такий вигляд:

$$N^{(2,4)}=\begin{pmatrix}1 & 2+\beta\lambda & \big(s^{(2)}+\beta\lambda\big)e_1(\beta) & \big[\beta\lambda(3-\beta\lambda)-s^{(2)}(2-\beta\lambda)\big]e_1(\beta)\\ -1 & -1-\beta\lambda & \big(s_0^{(2)}-\beta\lambda\big)e_1(\beta) & -\big(s_0^{(2)}-3\beta\lambda-\beta^2\lambda^2\big)e_1(\beta)\end{pmatrix},$$

$$M^{(4,4)}=\begin{pmatrix}e_1(\beta) & (2+\beta\lambda\mu_1)e_1(\beta) & s^{(1)}+\beta\lambda\mu_1 & \beta\lambda\mu_1(3-\beta\lambda\mu_1)-s^{(1)}(2-\beta\lambda\mu_1)\\ -e_1(\beta) & -(1+\beta\lambda\mu_1)e_1(\beta) & s_0^{(1)}+\beta\lambda\mu_1 & -s_0^{(1)}+3\beta\lambda\mu_1+(\beta\lambda\mu_1)^2\\ -e_1(\beta) & -\beta\lambda\mu_1e_1(\beta) & -1+\beta\lambda\mu_1 & -\beta\lambda\mu_1(2-\beta\lambda\mu_1)\\ e_1(\beta) & (1+\beta\lambda\mu_1)e_1(\beta) & \beta\lambda\mu_1-s_1^{(1)} & s_1^{(1)}-\beta\lambda\mu_1(3-\beta\lambda\mu_1)\end{pmatrix},$$

$$P^{(4,2)} = \begin{pmatrix} -\kappa\left(1+s^{(1)}+\beta\lambda\mu_1 th\beta\lambda\mu_1\right) & -\kappa \\ \delta\left(th\beta\lambda\mu_1+\beta\lambda\mu_1\right) & \delta th\beta\lambda\mu_1 \\ 2+\beta\lambda\mu_1 th\beta\lambda\mu_1 & 1 \\ -\chi t\left(\left(1+s_1^{(1)}\right)th\beta\lambda\mu_1+\beta\lambda\mu_1\right) & -\chi th\beta\lambda\mu_1 \end{pmatrix},\ \partial e\, e_1(\beta)=e^{-\beta\lambda(1-\mu_1)}.$$

Спочатку знайдемо асимптотичну формулу для функціонального визначника $\Delta(\beta)$ системи (3):

$$\Delta(\beta)=\begin{vmatrix} G & h \\ m & \Delta_1 \end{vmatrix},$$

де

$$G=\begin{vmatrix} 1 & 2+\beta\lambda \\ -1 & -1-\beta\lambda \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} s^{(1)}+\beta\lambda\mu_1 & \beta\lambda\mu_1(3-\beta\lambda\mu_1)-s^{(1)}(2-\beta\lambda\mu_1) & -\kappa\left(1+s^{(1)}+\beta\lambda\mu_1 th\beta\lambda\mu_1\right) & -\kappa \\ s_0^{(1)}+\beta\lambda\mu_1 & -s_0^{(1)}+3\beta\lambda\mu_1+(\beta\lambda\mu_1)^2 & \delta\left(th\beta\lambda\mu_1+\beta\lambda\mu_1\right) & \delta th\beta\lambda\mu_1 \\ -1+\beta\lambda\mu_1 & -\beta\lambda\mu_1(2-\beta\lambda\mu_1) & 2+\beta\lambda\mu_1 th\beta\lambda\mu_1 & 1 \\ \beta\lambda\mu_1-s_1^{(1)} & s_1^{(1)}-\beta\lambda\mu_1(3-\beta\lambda\mu_1) & -\chi t\left(\left(1+s_1^{(1)}\right)th\beta\lambda\mu_1+\beta\lambda\mu_1\right) & -\chi th\beta\lambda\mu_1 \end{vmatrix},$$

$$m=\begin{vmatrix} -e_1(\beta) & -\beta\lambda\mu_1 e_1(\beta) \\ e_1(\beta) & (1+\beta\lambda\mu_1)e_1(\beta) \\ -e_1(\beta) & -\beta\lambda\mu_1 e_1(\beta) \\ e_1(\beta) & (1+\beta\lambda\mu_1)e_1(\beta) \end{vmatrix},\quad h=\begin{vmatrix} \left(s^{(2)}+\beta\lambda\right)e_1(\beta) & \left[\beta\lambda(3-\beta\lambda)-s^{(2)}(2-\beta\lambda)\right]e_1(\beta) & 0 & 0 \\ \left(s_0^{(2)}-\beta\lambda\right)e_1(\beta) & -\left(s_0^{(2)}-3\beta\lambda-\beta^2\lambda^2\right)e_1(\beta) & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Оскільки усі елементи матриць m та h містять нескінченно спадні експоненти $e_1(\beta)$ або дорівнюють нулю, то головний член визначника $\Delta(\beta)$ визначається добутком визначників G та Δ_1.

Мінор $G=1$. Для Δ_1 після перетворень отримаємо

$$\Delta_1(\beta)\approx(\beta\lambda\mu_1)^3\left(-2\delta+2\kappa\left(1-s^{(1)}\right)-\delta\chi s_1^{(1)}+\kappa\chi\left(s^{(1)}-s_1^{(1)}\right)\right).$$

Отже, асимптотична формула для $\Delta(\beta)$ має вигляд:

$$\Delta(\beta)=\Delta_1(\beta)+O\left(e^{-\beta\lambda(1-\mu_1)}\right).$$

Визначення головних членів функцій $\overline{A}_1(\beta),\overline{B}_1(\beta),\overline{A}_2(\beta),\overline{B}_2(\beta),\overline{C}_2(\beta),\overline{D}_2(\beta)$ почнемо із знаходження асимптотичних формул визначників $\Delta_{\overline{A}_2}(\beta)$ та $\Delta_{\overline{B}_2}(\beta)$, які отримаємо з визначника $\Delta(\beta)$ шляхом заміни стовпців при невідомих $\overline{A}_2(\beta),\overline{B}_2(\beta)$ стовпцем вільних членів. У результаті обчислень отримаємо

$$\Delta_{\overline{A}_2}(\beta)(=-(1+\beta\lambda)\overline{p}(\beta)-(2+\beta\lambda)\overline{q}(\beta))\Delta_1(\beta)+O\left(\left(\beta^{j_1}\overline{p}(\beta)+\beta^{g_1}\overline{q}(\beta)\right)e^{-\beta\lambda(1-\mu_1)}\right),$$

$$\Delta_{\overline{B}_2}(\beta)=\left(\overline{p}(\beta)+\overline{q}(\beta)\right)\Delta_1(\beta)+\left(\left(\beta^{j_2}\overline{p}(\beta)+\beta^{g_2}\overline{q}(\beta)\right)e^{-\beta\lambda(1-\mu_1)}\right),$$

де j_1,g_1,j_2,g_2 – певні константи. Звідси за формулами Крамера

$$\overline{A}_2(\beta)=\frac{\Delta_{\overline{A}_2}(\beta)}{\Delta(\beta)}\approx=-(1+\beta\lambda)\overline{p}(\beta)-(2+\beta\lambda)\overline{q}(\beta),$$

$$\overline{B}_2(\beta)=\frac{\Delta_{\overline{B}_2}(\beta)}{\Delta(\beta)}\approx\overline{p}(\beta)+\overline{q}(\beta).$$

Оскільки в правих частинах чотирьох останніх рівняннях системи (3) нулі, то ми можемо виразити через $\overline{A}_2(\beta)$ та $\overline{B}_2(\beta)$ функції $\overline{C}_2(\beta),\overline{D}_2(\beta),\ \overline{A}_1(\beta),\overline{B}_1(\beta)$:

$$\bar{C}_2(\beta) \approx \frac{\kappa\delta + \delta - 2\kappa}{2\kappa + \kappa\chi - \delta}\left(\frac{e_1(\beta)}{\beta\lambda\mu_1}\bar{A}_2(\beta) + e_1(\beta)\bar{B}_2(\beta)\right);$$

$$\bar{D}_2(\beta) \approx \frac{\kappa(\chi - \delta)}{2\kappa + \kappa\chi - \delta}\left(\frac{e_1(\beta)}{(\beta\lambda\mu_1)^2}\bar{A}_2(\beta) + \frac{e_1(\beta)}{\beta\lambda\mu_1}\bar{B}_2(\beta)\right);$$

$$\bar{A}_1(\beta) \approx \frac{2\kappa - 2\delta + \chi - 1}{2\kappa + \kappa\chi - \delta}\left(\beta\lambda\mu_1 e_1(\beta)\bar{A}_2(\beta) + (\beta\lambda\mu_1)^2 e_1(\beta)\bar{B}_2(\beta)\right);$$

$$\bar{B}_1(\beta) \approx \frac{\kappa}{2\kappa + \kappa\chi - \delta}\left(e_1(\beta)\bar{A}_2(\beta) + \beta\lambda\mu_1 e_1(\beta)\bar{B}_2(\beta)\right).$$

Таким чином, знайдено поведінку розв’язку системи функціональних рівнянь (3) на нескінченності.

Література

1. Рамський А.О. Зменшення напружень плити під дією зовнішнього навантаження за допомогою покриття її шаром із початковими напруженнями / А.О. Рамський // Вісник Хмельницького національного університету. – 2017. – № 3.

2. Гузь А.Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Вісник Хмельницького національного університету. – 2004. – 682 с.

References

1. Ramskyi A.O. Zmenshennia napruzhen plyty pid diieiu zovnishnoho navantazhennia za dopomohoiu pokryttia yii sharom iz pochatkovymy napruzhenniamy / A.O. Ramskyi // Herald of Khmelnytsky National University. – 2017. – Issue 3.

2. Huz A.N. Kontaktnye zadachy dlia upruhykh tel s nachalnymy (ostatochnymy) napriazhenymy / A.N. Huz, V.B. Rudnytskyi // Herald of Khmelnytsky National University. – 2004. – 682 s.

Рецензія/Peer review : 7.7.2017 р. Надрукована/Printed :7.9.2017 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Сорокатий Р.В.