УДК 621.396

Н.А. ОДЕГОВ
Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

ОПЕРАТОРЫ ДИСПЕРСИИ И СОГЛАСОВАННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ

Рассмотрены различные модели операторов дисперсии. Под дисперсией понимается деформация сигнала во временной или частотной области. Показано, что материальная дисперсия может моделироваться нестационарным линейным оператором. Получены аналитические выражения для оператора материальной дисперсии в форме импульсной характеристики. Получена формула согласованного с такой характеристикой сигнала.

Полученные модели уточнены для случая бесконечной и конечной частотной полосы.

Определены числовые параметры устойчивости полученных решений.

Получены аналитические выражения для оператора дисперсии с учетом неравномерности коэффициента затухания по частоте. Показано, что данный фактор влияет не только на затухание оптического импульса, но и на его деформацию.

Получены аналитические выражения для определения эффективной длительности импульса с учетом неравномерности характеристики затухания по частоте.

***Ключевые слова**: дисперсия, функция, сигнал, спектр, преобразование Фурье, импульсная характеристика, нестационарный фильтр, согласованный сигнал.*

N.A. ODEGOV
Odessa National Academy of Telecommunications. A.S. Popova

DISPERSION OPERATORS AND MATCHED OPTICAL SIGNALS

Various models of dispersion operators are considered. Dispersion means deformation of a signal in a time or frequency domain. It is shown that the material dispersion can be modeled by a nonstationary linear operator. Analytic expressions are obtained for the operator of material dispersion in the form of an impulse response. A formula of a signal matched with this characteristic is obtained .

The obtained models are refined for the case of an infinite and finite frequency band.

Numerical parameters of the stability of the solutions obtained are determined.

Analytic expressions are obtained for the dispersion operator taking into account the nonuniformity of the damping coefficient with respect to frequency. It is shown that this factor affects not only the attenuation of the optical pulse, but also its deformation.

Analytic expressions are obtained for determining the effective pulse duration, taking into account the nonuniformity of the damping characteristic with respect to frequency.

***Keywords:** dispersion, function, signal, spectrum, Fourier transform, impulse response, non-stationary filter, matched signal.*

Постановка задачи

В классической трактовке [1] под дисперсией понимается зависимость коэффициента преломления от длины волны или, что то же самое, – от частоты. Применительно к волоконно-оптическим линиям связи (ВОЛС) под дисперсией понимается [2] увеличение длительности (уширение) импульса по мере перемещения его вдоль оптического волокна (ОВ). При этом дисперсия подразделяется на хроматическую (зависящую от длины волны), модовую (зависящую от разности времени хода разнонаправленных лучей в ОВ) и поляризационную. Данные явления принято рассматривать в разных моделях [3-5].

С нашей точки зрения, уширение импульса является только одной из причин ограничения протяженности регенерационных участков (РУ) или ограничения скорости передачи данных за счет предотвращения межимпульсной интерференции. Наличие достоверной информации о форме импульса на приемной стороне позволяет, вообще говоря, отфильтровать небольшие перекрытия между импульсами. С другой стороны, важно, какой метод используется для детектирования и распознавания сигналов. Так, для порогового детектора важно, чтобы импульс на приемной стороне имел ярко выраженную моду. Для корреляционной обработки важно, чтобы импульс сохранял в основном свою форму.

Поэтому под ***дисперсией*** будем понимать искажение первоначальной формы оптического сигнала, вызванное ***всевозможными*** причинами. Соответственно, в класс ***операторов дисперсии*** будем включать любые зависимости между сигналами на входе в ОВ и на выходе из него или зависимости, устанавливающие связь некоторых параметров сигналов на входе и на выходе ОВ.

Таким образом, в класс операторов дисперсии в качестве моделей включаются и уравнения Максвелла, и простейшая формула для расчета материальной дисперсии [2]:

$$\Delta T = -\frac{\lambda_0}{c}\frac{d^2 n}{d\lambda^2}\Delta\lambda z, \tag{1}$$

где ΔT – приращение эффективной длительности импульса на расстоянии z от точки ввода сигнала в ОВ,

λ_0 – центральная длина волны излучения лазера, c – скорость света в вакууме, $\Delta\lambda$ – ширина полосы излучения лазера, а значение второй производной коэффициента преломления n берется в точке λ_0.

Уравнения Максвелла в исходном виде сложны для инженерных приложений. С другой стороны, удобные выражения (1) не дают информации о зависимости вычисляемых параметров от тонкой структуры сигнала. Поэтому в прикладных задачах используются также модели в виде дифференциальных уравнений, в том числе нелинейных [6]. Такие модели даже в случае отсутствия решений в аналитическом виде позволяют получать решения с помощью численных методов [7].

С нашей точки зрения представляется продуктивным подход, в котором дисперсионные операторы представляются в форме импульсных характеристик фильтров (ИХФ) или, что эквивалентно – в виде частотных коэффициентов передачи (ЧКП). При этом появляется возможность использовать существующий аппарат теории функций комплексного аргумента, преобразования Фурье и теории оптимальной фильтрации.

Отличие от задачи синтеза оптимальных фильтров в данном контексте заключается в том, что решается ***обратная*** задача. Здесь полагается, что фильтр задан свойствами ОВ, а задача сводится к выбору на заданном множестве сигналов такого сигнала, который доставляет экстремальное значение выбранному показателю качества. Такие сигналы далее и будут называться ***согласованными***.

Таким образом, задача синтеза согласованных оптических сигналов в рамках данной статьи сводится к следующим подзадачам.

1. По заданным характеристикам ОВ определить оператор дисперсии, в общем случае нестационарный, в форме импульсной характеристики $h(t,\tau)$, связывающей входной $u_{inp}(t)$ и выходной $u_{out}(T,\tau)$ сигналы преобразованием в виде интеграла Дюамеля:

$$u_{out}(T,\tau)=\int_{-\infty}^{T}u_{inp}(t)h(T-t,\tau)dt\,. \tag{2}$$

2. Для заданной импульсной характеристики $h(t,\tau)$ из множества входных сигналов $\{u_{inp}\}$ выбрать оптимальный по заданному критерию качества сигнал.

Известно [8], что для частного линейного случая импульсная характеристика согласованного фильтра определяется как зеркальное отражение входного сигнала с точностью до постоянного множителя:

$$u_{inp}(t)=\alpha h(-t)\,. \tag{3}$$

В данном случае под ***согласованием*** понимается, что на выходе фильтра максимизируется отношение сигнал/шум. С учетом симметрии операции свертки (2) при заданной ИХФ, согласованным в этом смысле является сигнал, определяемый зависимостью (3).

Интересно, что согласованный сигнал в данной модели обладает еще одним дополнительным полезным свойством, которое заслуживает отдельного предложения.

Теорема о сжатии импульса. Для ИХФ с равной нормой

$$\|h\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)dt \tag{4}$$

и для входных сигналов равной энергии

$$\|u_{inp}\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}u_{inp}^2(t)dt \tag{5}$$

при условии равенства второго момента выходного сигнала для всех входных сигналов

$$T_{out}^2=\int_{-\infty}^{\infty}t^2u_{out}^2(t)dt \tag{6}$$

наименьшую эффективную длительность выходного сигнала

$$T_{eff}^2=T_{out}^2\Big/\|u_{out}\|^2 \tag{7}$$

доставит согласованный в смысле (3) входной сигнал.

Доказательство Теоремы элементарно следует из неравенства Коши-Шварца.

В самом деле, при равных числителях в выражении (7), что задано условием (6) Теоремы, минимальное значение дроби будет при максимальном значении знаменателя, которое суть – энергия сигнала на выходе. При этом знаменатель дроби в силу определения (2) может быть представлен как скалярное произведение, подчиняющееся неравенству Коши-Шварца:

$$\|u_{out}\|=\langle u_{inp},h\rangle\le\|u_{inp}\|\|h\|\,. \tag{8}$$

Верхняя грань (равенство) в выражении (8) достигается, если выполняется условие (3), т.е. для согласованного сигнала.

Таким образом, если ИХФ моделирует оператор дисперсии, то согласованный сигнал обладает при определенных условиях антидесперсионными свойствами.

Конечно, в Теореме использовано очень сильное допущение (6), ограничивающее класс входных сигналов. На самом деле не исключено, что можно оптимизировать входные сигналы за счет уменьшения числителя в выражении (7). Однако, такая задача должна решаться не в общем случае, а для конкретного вида операторов дисперсии.

Также отметим, что приведенные зависимости элементарно обобщаются на случай комплексных сигналов и ИХФ.

Оператор материальной дисперсии

Рассмотрим весьма упрощенную модель. Предположим, что ОВ со ступенчатым профилем показателя преломления используется в одномодовом режиме, что энергия сигнала распространяется строго вдоль ОВ, что начальная поляризация сигнала круговая и поляризационные эффекты отсутствуют, что мощность сигнала достаточно мала для того, чтобы исключить нелинейные эффекты и, наконец, что затухание сигнала не зависит от частоты.

При этих условиях дисперсия сводится к материальной дисперсии [2], т.е. к зависимости коэффициента преломления от частоты и вызванной этим деформацией входного сигнала.

Показано [9], что с высокой точностью зависимость коэффициента преломления от частоты может быть представлена полиномом второй степени. В рабочем диапазоне длин волн от 800 нм до 1800 нм (соответственно, в частотном диапазоне от 175 до 375 ТГц) относительная погрешность аппроксимации трехчленной формулы Селмейера не превышает 10^{-4}. Еще большую точность получаем при аппроксимации частотной зависимости коэффициента преломления в разложении по частичной сумме ряда Тейлора вблизи некоторой заданной циклической частоты f_0. Для центральной длины волны 1550 нм (частота около 193,4 ТГц) в полосе частот шириной порядка 100 ГГц получены значения коэффициента преломления и первых его двух производных. Они представлены в табл.1, где $n^{[m]}$ обозначает производную функции порядка m.

Относительная погрешность аппроксимации δn коэффициента преломления зависимостью

$$n(f) = n(f_0) + n^{[1]}(f_0)(f - f_0) + 1/2\, n^{[2]}(f_0)(f - f_0)^2 \tag{9}$$

имеет в данном случае порядок 10^{-8}, что можно считать пренебрежимо малой величиной.

Таблица 1

Зависимость производных коэффициента преломления от состава ОВ

Material	$n(f_0)$	$n^{[1]}(f_0)$, Gc^{-1}	$n^{[2]}(f_0)$, Gc^{-2}	δn
SiO2	1,44E+00	9,60E-17	-6,97E-29	3,93E-08
13,5%GeO2 86,5%SiO2	1,47E+00	7,78E-17	-6,89E-29	3,85E-08
7,0%GeO2 93,0%SiO2	1,46E+00	7,99E-17	-1,52E-29	8,13E-09
4,1%GeO2 95,9%SiO2	1,45E+00	9,46E-17	-8,78E-30	4,32E-09
13,5%Be2O3 86,5%SiO2	1,44E+00	1,09E-16	-3,25E-29	1,78E-08
3,1%GeO2 96,9%SiO2	1,45E+00	9,63E-17	-5,71E-29	3,19E-08
3,5%GeO2 96,5%SiO2	1,45E+00	9,67E-17	-5,59E-29	3,12E-08
3,0%B2O3 97,0%SiO2	1,44E+00	9,92E-17	-3,22E-29	1,77E-08
3,5%B2O3 96,5%SiO2	1,44E+00	9,78E-17	-5,63E-29	3,16E-08
3,3%GeO2 9,2%B2O3 87,5%SiO2	1,44E+00	1,00E-16	-7,57E-29	4,27E-08
2,2%GeO2 3,3%B2O3 94,5%SiO2	1,45E+00	9,68E-17	-3,80E-29	2,11E-08
9,1%P2O5 90,9%SiO2	1,46E+00	1,00E-16	-4,76E-29	2,63E-08
1,0%F 99,0%SiO2	1,44E+00	9,38E-17	-3,41E-29	1,89E-08
16,9%Na2O 32,5%B2O3 50,6%SiO2	1,51E+00	1,11E-16	-5,11E-29	2,73E-08

В качестве модели входного сигнала примем узкополосный аналитический сигнал

$$u(t) = U(t)\exp(j\omega_0 t), \tag{10}$$

где $U(t)$ – низкочастотная составляющая сигнала (НЧС), ω_0 – несущая частота.

В качестве исходной модели преобразования в ОВ примем решение волнового уравнения [10]:

$$u(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\exp[j\omega t - jk(\omega)z]d\omega, \tag{11}$$

где z – расстояние, пройденное сигналом вдоль ОВ, $g(\omega)$ – спектральная плотность сигнала (10), $k(\omega)$ – волновое число, определяемое как $k(\omega) = n(\omega)\omega / c$, где c – скорость света в вакууме.

Составляющую фазы $k(\omega)z$ в зависимости (11) удобно представить в несколько ином виде:

$$k(\omega)z = q(\omega)\tau,\ q(\omega) = n(\omega)\omega,\ \tau = z/c. \tag{12}$$

При этом функция $q(\omega)$ имеет размерность угловой частоты [рад/с], а параметр τ – размерность времени.

Тогда с учетом высокой точности аппроксимации (9) разложение фазы в выражении (11) в ряд Тейлора приводит к зависимости:

$$u(t,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\Omega+\omega_0)\exp[j(\varphi_0+\varphi_1\Omega+\varphi_2\Omega^2)]d\Omega\,, \tag{13}$$

где

$$\Omega=\omega-\omega_0\,,\ \varphi_0=\omega_0(t-n_0\tau)\,,\ \varphi_1=t-q_0^{[1]}\tau=t-(n_0^{[1]}\omega_0+n_0)\tau\,,$$

$$\varphi_2=-\frac{1}{2}q_0^{[2]}\tau=-\left(n_0^{[1]}+\frac{n_0^{[2]}\omega_0}{2}\right)\tau\,,$$

где здесь и далее выражение вида $y_0^{[n]}=y^{[n]}(x_0)$ соответствует значению производной функции $y(x)$ порядка n в точке x_0.

После переноса частоты (гетеродинирования) с учетом определения (10) зависимость (13) преобразуется к формуле эволюции НЧС входного сигнала, которая и переносит информацию:

$$U(t,\tau)=\frac{\exp(-jn_0\omega_0\tau)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\Omega)\exp[j(\varphi_1\Omega+\varphi_2\Omega^2)]d\Omega\,, \tag{14}$$

где

$$G(\Omega)=g(\Omega+\omega_0)\exp(-j\omega_0 t)=\int_{-\infty}^{\infty}U(t,\tau=0)\exp(-j\Omega t)dt\,. \tag{15}$$

– спектральная плотность НЧС входного сигнала.

Зависимости (14) и (15) можно свести к следующей формуле:

$$U(t,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\Omega)H(\Omega,\tau)\exp(j\Omega t)d\Omega\,, \tag{16}$$

где $H(\Omega,\tau)$ – ЧКП некоторого нестационарного линейного фильтра, который с учетом ранее полученных зависимостей представляется в следующей аналитической форме:

$$H(\Omega,\tau)=\exp(-jn_0\omega_0\tau)\exp[j(\varphi_1-t)\Omega+j\varphi_2\Omega^2]\,. \tag{17}$$

ЧКП в форме (17) является одной из форм оператора дисперсии. Соответственно ИХФ определяется как обратное преобразование Фурье ЧКП:

$$h(t,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\Omega,\tau)\exp(j\Omega t)d\Omega=\frac{\exp(-jn_0\omega_0\tau)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(j\varphi_1\Omega+j\varphi_2\Omega^2)d\Omega\,. \tag{18}$$

Для получения аналитического выражения ИХФ (18) воспользуемся табличным интегралом [11,с. 344]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[j(\lambda x^2+\mu x)]dx=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\exp\left[\frac{j(\lambda\pi-\mu^2)}{4\lambda}\right],\qquad \lambda>0\,. \tag{19}$$

С учетом обозначений в формуле (18) полагаем $\lambda=\varphi_2$, $\mu=\varphi_1$. Условие существования интеграла (19) $\lambda>0$ выполнено для всех значений параметра $\tau>0$, поскольку $\varphi_2=-\frac{1}{2}q_0^{[2]}\tau=-\left(n_0^{[1]}+\frac{n_0^{[2]}\omega_0}{2}\right)\tau$, а выражение внутри скобок имеет отрицательное значение, что подтверждают данные табл. 1. Заметим, что в частном случае $\tau=0$ оператор, моделируемый ИХФ (18) вырождается в тождественный оператор, когда сигнал на выходе ОВ полностью повторяет сигнал на входе, что естественно.

После тождественных преобразований выражения (18) с учетом формулы (19) получаем выражение для ИХФ:

$$h(t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{-2\pi q_0^{[2]}\tau}}\{\cos[\eta_0+(\eta_1+\eta_2 t)t]+j\sin[\eta_0+(\eta_1+\eta_2 t)t]\}, \tag{20}$$

где

$$\eta_0=\frac{\pi}{4}+\tau\left[\frac{1}{2}\frac{(q_0^{[1]})^2}{q_0^{[2]}}-n_0\omega_0\right],\qquad \eta_1=-\frac{q_0^{[1]}}{q_0^{[2]}}\,,\qquad \eta_2=-\frac{1}{2q_0^{[2]}\tau}\,. \tag{21}$$

Соответственно, для согласованного сигнала во временной области $u_{inp}(t)=h^*(-t)$, где здесь и далее символ «*» означает оператор комплексного сопряжения:

$$u_{inp}(t)=\frac{1}{\sqrt{-2\pi q_0^{[2]}\tau}}\left\{\cos[\eta_0-(\eta_1-\eta_2 t)t]-j\sin[\eta_0-(\eta_1-\eta_2 t)t]\right\}. \qquad (22)$$

Анализ выражений (20–22) показывает следующее.

1. В принятых предположениях ИХФ является моделью линейного нестационарного оператора.

2. Соответственно, сигнал (22) проявляет свои оптимальные свойства лишь на определенном расстоянии $z=\tau c$.

3. Сигнал (22) имеет структуру линейно частотно модулированного (ЛЧМ) сигнала, что является вполне ожидаемым результатом, поскольку одним из способов формирования таких сигналов является использование дисперсионной линии задержки (ДЛЗ) [12]. ОВ в первом приближении как раз и представляет собой ДЛЗ. При этом параметр η_0 – начальная фаза сигнала, η_1 – начальное значение угловой частоты, η_2 – параметр девиации частоты.

4. ИХФ является комплексной функцией, равно как и согласованный сигнал (22) – комплексный. Поэтому формирование таких сигналов требует учета фазовых соотношений, а не только распределения энергии сигнала в частотной области.

5. Выражения (20–22) ничего не говорят об устойчивости полученных решений в смысле [13], что в данном случае формулируется так: «Не приведет ли малое изменение параметра нестационарности τ к совершенно иным выводам?». Определим показатель устойчивости в форме:

$$\delta h=\left|h(t,\tau+\delta_\tau)-h(t,\tau)\right|/\left|h(t,\tau)\right|, \qquad (23)$$

где δ_τ – малое приращение параметра настационарности, которое для определенности будем полагать положительной величиной. С учетом малости этого параметра

$$h(t,\tau+\delta_\tau)\approx h(t,\tau)+h'(t,\tau)\delta_\tau$$

выражение (23) преобразуется к виду:

$$\delta h=\delta_\tau\sqrt{h'(t,\tau)h'^*(t,\tau)}\,/\sqrt{h(t,\tau)h^*(t,\tau)}\,. \qquad (24)$$

Из выражения для ИХФ (20) следует, что данную функцию можно представить в виде:

$$h(t,\tau)=a(\tau)\exp[\,jb(t,\tau)]$$

где $a(\tau)$ и $b(t,\tau)$ – вещественные функции скалярных аргументов. С учетом последнего выражения показатель устойчивости (23) после выполнения ряда простых преобразований можно представить в виде:

$$\delta h=\delta_\tau\sqrt{[a'(\tau)]^2+a^2(\tau)[b'(t,\tau)]^2}\,/\sqrt{a^2(\tau)}\,. \qquad (25)$$

Поскольку $\delta h=\delta h(t,\tau)$ – функция, а не функционал, она принимает определенное значение при определенных значениях аргументов. Будем рассматривать случай, когда $\tau=10^{-3}$, что приблизительно соответствует расстоянию, пройденному импульсом $z\approx 200\text{км}$. Несущую частоту примем равной $\omega_0=2\pi 200\text{ТГц}\approx 10^{15}[\text{рад}/c]$, приблизительно соответствующей рабочей длине волны $\lambda_0\approx 1550\text{нм}$. Временной параметр примем ограниченным порядком $t\le 10\text{пс}=10^{-11}c$.

Тогда с учетом данных табл. 1 получаем оценки порядков величин в формуле (20). Ниже символ «$\approx$» будет иметь смысл высказывания: «Имеет порядок». Составляющие фазы $b(t,\tau)$ имеют следующие порядки:

$$\eta_0\approx n_0\omega_0\tau\approx 10^{15}10^{-3}=10^{12},\quad \eta_1 t\approx 10^{14}10^{-11}=10^3,\quad \eta_2 t^2\approx 10^{30}10^{3}10^{-22}=10^{11}, \qquad (26)$$

откуда следует порядок фазы $b(t,\tau)\approx\eta_0\approx 10^{12}$. Порядок амплитудного коэффициента:

$$a(\tau)=\frac{1}{\sqrt{-2\pi q_0^{[2]}\tau}}=\frac{1}{\sqrt{-2\pi(n_0^{[1]}+0{,}5n_0^{[2]}\omega_0)\tau}}\approx\frac{1}{\sqrt{-\pi n_0^{[2]}\omega_0\tau}}\approx\frac{1}{\sqrt{10^{-30}10^{15}10^{-3}}}=10^9, \qquad (27)$$

а его производной:

$$a'(\tau)=-\frac{1}{2}\frac{a(\tau)}{\tau}\approx 10^9 10^3=10^{12}.$$

С учетом порядков (26) и (27) $[a'(\tau)]^2<<a^2(\tau)[b'(t,\tau)]^2$ выражение для показателя устойчивости (25) сильно упрощается:

$$\delta h\approx\delta_\tau\sqrt{a^2(\tau)[b'(t,\tau)]^2}\,/\sqrt{a^2(\tau)}=\delta_\tau\left|b(t,\tau)\right|\approx\delta_\tau n_0\omega_0\approx\delta_\tau 10^{15}\,. \qquad (28)$$

Полученный результат показывает, что оптимальные свойства согласованного сигнала очень сильно зависят от расстояния. В тех предположениях, которые положены в основу расчетов, можно считать, что импульс сохранит согласованность при $\delta_\tau\le 10^{-17}$, что соответствует ошибке в определении расстояния порядка нескольких нанометров. Практически это означает, что небольшое смещение патчкорда может привести к потере устойчивости приема.

Промежуточный вывод заключается в том, что решение задачи оптимизации оптических сигналов требует анализа устойчивости. Также можно предположить, что наиболее эффективными методами повышения скорости передачи данных является применение систем с обратной связью, которые реализуют служебные протоколы адаптации параметров генерируемого сигнала к характеристикам конкретной оптической линии.

Оператор материальной дисперсии для ограниченной полосы частот

Выражение для ИХФ (20) получено интегрированием в бесконечных пределах. Это позволило получить замкнутые аналитические выражения, пригодные только для поверхностного анализа. Для приложений такой подход вряд ли является конструктивным. Может даже показаться, что потеряна размерность. Она не потеряна, а скрыта за символом ленты Мебиуса.

Кроме того, интегрирование в бесконечных пределах противоречит предположению об узкополосности сигнала (10). Для получения выражений ИХФ в ограниченной полосе частот упростим формулы (13) и (14). После демодуляции составляющей фазы φ_0 можно пренебречь, а составляющая фазы φ_1 в силу теоремы запаздывания отвечает за перенос энергетического центра сигнала с групповой скоростью $c/(n_0^{[1]}\omega_0+n_0)$. Таким образом, собственно за деформацию импульса отвечают производные фазы высших порядков [6], а в рассматриваемой модели – составляющая фазы φ_2. Тогда:

$$U(t,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta\Omega}^{\Delta\Omega}G(\Omega)H(\Omega,\tau)\exp(j\Omega t)d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta\Omega}^{\Delta\Omega}G(\Omega)\exp(-j\frac{1}{2}q_0^{[2]}\tau\Omega^2)\exp(j\Omega t)d\Omega,$$

$$h(t,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta\Omega}^{\Delta\Omega}\exp(-j\frac{1}{2}q_0^{[2]}\tau\Omega^2)\exp(j\Omega t)d\Omega. \qquad (29)$$

Для вычисления интеграла (29) воспользуемся табличным интегралом [11, с.240]:

$$\int\begin{Bmatrix}\sin(ax^2+bx+c)\\ \cos(ax^2+bx+c)\end{Bmatrix}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[\cos\frac{4ac-b^2}{4a}\begin{Bmatrix}S[(2ax+b)^2/(4a)]\\ C[(2ax+b)^2/(4a)]\end{Bmatrix}\pm\sin\frac{4ac-b^2}{4a}\begin{Bmatrix}C[(2ax+b)^2/(4a)]\\ S[(2ax+b)^2/(4a)]\end{Bmatrix}\right]$$

где $C()$ и $S()$ – интегралы Френеля. С учетом вхождения переменных в формуле (29) в табличном интеграле принимаем $a=-\frac{1}{2}q_0^{[2]}\tau$, $b=t$, $c=0$, $x=\Omega$. Условие существования табличного интеграла $a>0$ выполнено для всех $\tau>0$, поскольку $q_0^{[2]}<0$.

Непосредственные преобразования выражения (29) сложны для последующего анализа. Поэтому выполним его упрощение с учетом ранее рассмотренных порядков величин. Фаза $b^2/4a=-t^2/(2q_0^{[2]}\tau)$ имеет порядок $10^{-22}10^{14}10^{3}=10^{-5}$, то есть в выражениях табличного интеграла можно положить $\cos[-b^2/(4a)]\approx 1$, $\sin[-b^2/(4a)]\approx 0$. Тогда выражение (29) значительно упрощается:

$$h(t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{-\pi q_0^{[2]}\tau}}\left\{C[(2ax+b)^2/(4a)]+jS[(2ax+b)^2/(4a)]\right\}\Big|_{-\Delta\Omega}^{\Delta\Omega}. \qquad (30)$$

Последнее выражение также является весьма сложным для анализа. Поэтому воспользуемся аппроксимациями интегралов Френеля для больших значений аргумента [14, с. 128]:

$$C(\theta)\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi\theta}\sin\frac{\pi}{2}\theta^2-\frac{1}{\pi^2\theta^3}\cos\frac{\pi}{2}\theta^2,\quad S(\theta)\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi\theta}\cos\frac{\pi}{2}\theta^2-\frac{1}{\pi^2\theta^3}\sin\frac{\pi}{2}\theta^2. \qquad (31)$$

В зависимостях (31) также важны порядки. В дополнение к ранее рассмотренным значениям величин положим, что ширина полосы примерно равна 100ГГц, то есть пределы интегрирования в выражении (29) имеют порядок 10^{11}. После тождественных преобразований и учета порядков фазовая функция в зависимостях (31) получается в виде:

$$\theta=-\frac{1}{2}q_0^{[2]}\tau\Omega^2+\Omega t-\frac{1}{2}\frac{t^2}{q_0^{[2]}\tau}\approx\Omega t-\frac{1}{2}q_0^{[2]}\tau\Omega^2. \qquad (32)$$

Порядок фазовой функции θ с учетом допущений 10^5. Таким образом, последние слагаемые в формулах (31) незначительны. После исключения этих слагаемых получаем выражение для ИХФ в замкнутом виде:

$$\operatorname{Re} h(t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{-\pi q_0^{[2]}\tau}}\left(\frac{1}{\pi\theta_+}\sin\frac{\pi}{2}\theta_+^2-\frac{1}{\pi\theta_-}\sin\frac{\pi}{2}\theta_-^2\right)$$

$$\operatorname{Im} h(t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{-\pi q_0^{[2]}\tau}}\left(-\frac{1}{\pi\theta_+}\cos\frac{\pi}{2}\theta_+^2+\frac{1}{\pi\theta_-}\cos\frac{\pi}{2}\theta_-^2\right), \quad (33)$$

$$\theta_+=\Delta\Omega t-\frac{1}{2}q_0^{[2]}\tau\Delta\Omega^2 \quad , \qquad \theta_-=-\Delta\Omega t-\frac{1}{2}q_0^{[2]}\tau\Delta\Omega^2 .$$

Учтем, что слагаемое Ωt в формуле (32) имеет меньший порядок и в формулах (33) можно ограничиться приближением $1/\pi\theta_+\approx 1/\pi\theta_+\approx -2/(\pi q_0^{[2]}\tau\Delta\Omega^2)$. Тогда после тождественных преобразований формул (33) с использованием известных тождеств разности тригонометрических функций получим окончательно:

$$h(t,\tau)=\frac{2\Delta\Omega^{-2}}{\sqrt{-\pi^3(q_0^{[2]})^3\tau^3}}\sin\frac{\pi}{2}\left[t^2\Delta\Omega^2+\frac{1}{4}(q_0^{[2]})^2\tau^2\Delta\Omega^4\right]\exp(-j\frac{\pi}{2}q_0^{[2]}\tau t\Delta\Omega^3). \quad (34)$$

Сравнение выражений (20) и (34) показывает, что они имеют общий по структуре множитель с ЛЧМ. В то же время, выражение (34) содержит дополнительный экспоненциальный множитель, обусловливающий фазовую модуляцию. Также отметим, что ИХФ в последнем случае существенно зависит от полосы частот, занимаемой низкочастотной составляющей сигнала. Если предположить, что сигнал имеет свойство высокой частотной когерентности ($\Delta\Omega\approx 10^9$), а временной параметр увеличить до 100…1000 пс, то даже структура выражения (34) может измениться.

Оператор дисперсии с учетом частотной зависимости коэффициента затухания

В рассмотренных выше моделях дисперсионные модели обусловливали искажение сигнала во временной области. При этом энергетический спектр сигнала остается неизменным [6]. Доказывается данное утверждение элементарно. В самом деле, из выражений (16) и (17) спектральная плотность низкочастотной составляющей сигнала на расстоянии $z=\tau c$ может быть представлена в виде:

$$G(\Omega,\tau)=G(\Omega,\tau=0)H(\Omega,\tau)=G(\Omega,\tau=0)\exp[j\varphi(\Omega,\tau,t)], \quad (35)$$

откуда для энергетического спектра:

$$\left|G(\Omega,\tau)\right|^2=G(\Omega,\tau)G^*(\Omega,\tau)=G^2(\Omega,\tau=0)\exp[j\varphi(\Omega,\tau,t)-j\varphi(\Omega,\tau,t)]=G^2(\Omega,\tau=0). \quad (36)$$

При этом, заметим, функция $\varphi(\Omega,\tau,t)$ – произвольная функция.

Устойчивость энергетического спектра к дисперсионным деформациям позволяет предложить методы распознавания сигналов в частотной области, инвариантные к материальной дисперсии. С физической точки зрения суть явления заключается в том, что энергия перераспределяется между действительной и мнимой частями спектра, но перераспределения энергии между отдельными частотными составляющими сигнала не происходит.

Дело осложняется тем, что деформация сигнала обусловливается не только зависимостью коэффициента преломления от частоты, но и от иных физических причин. Одна из них – зависимость коэффициента затухания от частоты.

Частотно зависимую функцию затухания определим в форме:

$$\mathrm{P}(\omega)=\exp[-\gamma(\omega)z]=\exp[-\psi(\omega)\tau],\ \psi(\omega)=\gamma(\omega)c$$

где $\gamma(\omega)>0$ – удельный по длине линии коэффициент затухания, а функция $\psi(\omega)$ вводится для удобства согласования с ранее полученными зависимостями.

Для относительно узкой полосы частот функцию $\psi(\omega)$ также представим в виде частичной суммы ряда Тейлора:

$$\psi(\omega)=\psi_0+\psi_0^{[1]}\Omega+\frac{1}{2}\psi_0^{[2]}\Omega^2. \quad (37)$$

Постоянная составляющая ψ_0 в последнем выражении обусловливает одинаковое затухание всех частотных составляющих сигнала и не приводит к изменению его формы или спектрального состава. Тогда, по аналогии с выражением (29), получим исходную формулу для дисперсионной ИХФ с учетом затухания:

$$h(t,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta\Omega}^{\Delta\Omega}\exp[(-\psi_0^{[2]}-jq_0^{[2]})\frac{1}{2}\tau\Omega^2]\exp[(-\psi_0^{[1]}\tau+jt)\Omega]d\Omega. \quad (38)$$

Интегрирование в бесконечных пределах в формуле (38) можно выполнить с помощью табличного интеграла [11, с. 344]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-px^2-\mu x)dx=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\exp(\frac{\mu^2}{4p}),\qquad \operatorname{Re}p>0. \tag{39}$$

В нашем случае $p=(-\psi_0^{[2]}-jq_0^{[2]})\frac{1}{2}\tau$, $\mu=-\psi_0^{[1]}\tau+jt$, $x=\Omega$. Условие существования интеграла $\operatorname{Re}p=\psi_0^{[2]}>0$ выполнено, по крайней мере, в окрестностях окон прозрачности ОВ, где коэффициент затухания имеет локальные минимумы. Тогда формула для ИХФ представляется в виде:

$$h(t,\tau)=\sqrt{\frac{2\pi}{(-\psi_0^{[2]}-jq_0^{[2]})\tau}}\exp\left[\frac{(-\psi_0^{[1]}\tau+jt)^2}{2(-\psi_0^{[2]}-jq_0^{[2]})\tau}\right]. \tag{40}$$

Анализ формулы (40) показывает, что даже в точках т.н. нулевой дисперсии сигнал подвергается деформациям за счет неравномерности коэффициента затухания. Также из этой формулы видно, что согласованный сигнал будет иметь структуру ЛЧМ сигнала. При этом оператор дисперсии, очевидно, также нестационарный.

Более выразительные формы оператора дисперсии с учетом затухания можно получить для зависимости эффективной длительности импульса от его спектрального состава. В качестве исходной примем формулу [14, с.34]:

$$T_{eff}^2=\frac{1}{2\pi\|g\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}|g'(\omega)|^2d\omega, \tag{41}$$

где $\|g\|^2$ – энергия сигнала, которую в данном случае удобно выразить через норму спектральной плотности, $g'(\omega)$ – первая производная спектральной плотности.

В нашем случае формула (41) требует некоторых уточнений. Во-первых, функционал $\|g\|^2$ зависит от расстояния, пройденного импульсом вдоль ОВ: затуханием пренебречь в данной модели нельзя. Во-вторых, спектральная плотность будет определяться в низкочастотной области с учетом влияющих на деформацию сигнала функций. Тогда формула (42) принимает вид:

$$T_{eff}^2=\frac{1}{2\pi\|g(\tau)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\{\exp[-\psi(\Omega)\tau-j\varphi(\Omega)\tau]G(\Omega)\}'\right|^2d\Omega, \tag{42}$$

где функция $\psi(\Omega)$ определяется зависимостью (37), $\varphi(\Omega)=q_0^{[2]}/2$ – функция деформации сигнала за счет материальной дисперсии, $G(\Omega$ – низкочастотная составляющая спектральной плотности в момент ввода сигнала в ОВ,

$$\|g(\tau)\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\{\exp[-\psi(\Omega)\tau-j\varphi(\Omega)\tau]G(\Omega)\}\right|^2d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2\psi_0\tau-2\psi_0^{[1]}\Omega-\psi_0^{[2]}\Omega^2)G^2(\Omega)d\Omega.$$

Вынося за рамки интеграла в формуле (42) множители, не зависящие от частоты, получим промежуточное выражение

$$T_{eff}^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\{\exp[-\psi_0^{[1]}\Omega\tau-\frac{1}{2}\psi_0^{[2]}\Omega^2\tau-j\varphi(\Omega)\tau]G(\Omega)\}'\right|^2d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2\psi_0^{[1]}\Omega-\psi_0^{[2]}\Omega^2)G^2(\Omega)d\Omega}. \tag{43}$$

Интересно, что за счет сокращений дроби в выражении (43) исчезла зависимость от постоянной составляющей функции затухания ψ_0. Иначе говоря, собственно затухание, не зависящее от частоты, не приводит к изменению эффективной длительности импульса, что представляется естественным.

Выполняя дифференцирование в числителе выражения (43) и предполагая, что $G(\Omega)$ – действительная функция, получаем после тождественных преобразований:

$$T_{eff}^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2\psi)\left\{\left[(\psi')^2+(\varphi')^2\right]G^2+(\psi')^2GG'+(G')^2\right\}d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2\psi)G^2(\Omega)d\Omega}, \tag{44}$$

$$\psi = (\psi_0^{[1]}\Omega + \frac{1}{2}\psi_0^{[2]}\Omega^2)\tau, \quad \psi' = (\psi_0^{[1]} + \psi_0^{[2]}\Omega)\tau \quad , \quad \varphi' = -q_0^{[2]})\tau\Omega .$$

Из последней формулы следует, что даже в точке нулевой дисперсии, когда параметр, отвечающий за материальную дисперсию $q_0^{[2]} \approx 0$ возможен эффект уширения импульса за счет зависимости коэффициента затухания от частоты.

Заметим, что в формуле (44) при $\tau = 0$, т.е. при вводе импульса в ОВ, его длительность определяется:

$$T_{eff}^2(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} (G')^2 d\Omega \Bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} (G)^2 d\Omega ,$$

откуда следует, что собственно приращение эффективной длительности импульса определяется:

$$\Delta T_{eff}^2 = T_{eff}^2(\tau > 0) - T_{eff}^2(\tau = 0) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\psi)\left\{\left[(\psi')^2 + (\varphi')^2\right]G^2 + (\psi')^2 GG'\right\}d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\psi) G^2(\Omega) d\Omega} . \quad (45)$$

Формула (45) позволяет получать замкнутые аналитические выражения для уширения сигналов заданной формы и, в конечном итоге – числовые характеристики дисперсии с учетом зависимости коэффициента затухания и коэффициента преломления от частоты.

Заключение

Модели операторов дисперсии и согласованные с ними оптические сигналы могут представляться в разных математических формах. Фундаментальные физические закономерности обычно сложны для инженерных приложений. Упрощенные формулы расчетов типа формулы (1) применимы при весьма узких вариациях параметров. Представляется, что продуктивным является подход к моделированию явлений в оптическом волокне с использованием научно-методического аппарата теории сигналов и теории оптимальной фильтрации. Небольшое количество результатов в данном контексте показано в данной работе.

На самом деле, даже используемые в настоящее время упрощенные модели вида (1) позволяют, вообще говоря, исследовать дисперсионные эволюции импульсов различной тонкой структуры. Правда, при этом необходимо разделить рабочую полосу в области длин волн на более мелкие фрагменты, для каждого из них определить дисперсионный коэффициент, а для данного вида импульса определить распределение его энергии по длине волны.

Можно и так, но более прагматичным представляется подход, в котором исследуются зависимости дисперсионных эволюций сигнала от частоты. По крайней мере, в последнем случае можно призвать на помощь всю силу теории функций комплексного переменного.

Задача синтеза сигналов, устойчивых к дисперсии представляется неисчерпаемо актуальной. Понятно, что радикальными способами уменьшения дисперсии и, тем самым, увеличения протяженности регенерационных участков и пропускной способности каналов передачи данных, является совершенствование технологии изготовления оптического волокна. Однако, в Украине, как и в остальном мире уже проложено, что проложено. Поэтому представляет интерес решение задачи повышения эффективности волоконно-оптических систем передачи за счет формирования оптимальных оптических сигналов и за счет совершенствования методов их распознавания.

В заключение зададим пару вопросов, не требующих однозначного ответа.

Могут ли сами по себе аналитические преобразования улучшить качество связи? Пожалуй, нет. Могут ли теоретические исследования привести к более глубокому пониманию явлений, которые могут наблюдаться в оптической среде? Пожалуй, да. Но окончательную точку в ответах на эти вопросы все равно поставит кабельщик-спайщик, который может любую точку сварки превратить в неплохой аттенюатор.

Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 848 с.

2. Бондаренко О.В. Волоконно-оптические кабели. Теоретические основы, конструирование и расчет, технология производства и эксплуатация: монография. / О.В. Бондаренко, Д.В. Иоргачев, А.Ф. Данченко, А.В. Усов. – Одесса, Астропринт, 2000. –536 с.

3. Стащук О.М. Вплив хімічного складу скла оптичного волокна на матеріальну дисперсію сигналу / О.М. Стащук, Д.М. Степанов, Д.Г. Багачук // Вісник Хмельницького Національного Університету – Хмельницький, 2015. – Вип. 6, С. 234 – 237.

4. Стащук О.М. Вплив хімічного складу скла оптичного волокна на хвилеводну дисперсію сигналу / Стащук О.М., Степанов Д.М., Багачук Д.Г. // Науковий журнал Вісник Вінницького політехнічного інституту. – Вінниця, 2016. – Вип. № 2 (125). – С. 157 – 160.

5. Багачук Д.Г. Компенсація поляризаційної модової дисперсії на основі одномодового оптичного волокна з анізотропними властивостями: дис. канд. техн. наук. – Одеса, 2015. – 160 с.

6. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика / Агравал Г. – М.: Мир, 1996. – 323 с.

7. Решетникова О.С. Оценка влияния фазовой самомодуляции на качество каналов ВОСП СРК с прямой модуляцией // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2012, № 1 – Одеса, 2012. – С. 158-166.

8. Иванов М.Т. Радиотехнические цепи и сигналы / Иванов М.Т., Сергиенко А.Б., Ушаков В.Н. – СПб: Питер, 2014. – 336 с.

9. Одегов Н.А. Тестовые сигналы и показатели в задачах исследования материальной дисперсии // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2017, № 1 – Одеса, 2017. – с. 124-131.

10. Корнейчук В.И. Оптические системы передачи / Корнейчук В.И., Макаров Т.В., Панфилов И.П. – К: Техніка, 1994. – 388 с.

11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М: Наука, 1981. – 800 с.

12. Ч.Чук, М.Бернефельд. Радиолокационные сигналы. Теория и применение. – М.: Сов. Радио, 1971. – 568 с.

13. Решетняк Г.Ю. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. – Наука, Сибирское отделение, 1982. – 228 с.

14. Варакин Л.Е. Теория сложных сигналов. – М.: Советское радио, 1970. – 376 с.

References

1. Landsberg G.S. Optika. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 848 s.

2. Bondarenko O.V. Volokonno-opticheskie kabeli. Teoreticheskie osnovy, konstruirovanie s raschet, tehnologija proizvjdstva I ekspluatacija: monographija. / O.V. Bondarenko, D.V. Iorgachev, A.F. Danchenko, A.V. Usov. – Odessa, Astroprint, 2000. – 536 s.

3. Stashuk O.M. Vplyv hivichnogo skladu skla optychnogo volokna na materialnu dyspersiju sygnalu / O.M. Stashuk, D.M. Stepanov, D.G. Bagachuk // Visnyk Hmelnickogo Nacionalnogo Universytetu . – Hmelnickij, 2015. – Vyp. 6, S. 234– 237.

4. Stashuk O.M. Vplyv hivichnogo skladu skla optychnogo volokna nahvylevodnu dyspersiju sygnalu / O.M. Stashuk, D.M. Stepanov, D.G. Bagachuk // Naukovyj ghurnal Visnyk Vinnyckogo politehnichnogo instytutu. – Vinnycja, 2016. – Vyp. 6 (125), S. 157– 160.

5. Bagachuk D.G. Kompensacija poljaryzacijnoji modovoji dyspersiji na osnovi odnomodovogo optycnogo volokna z anizatropnymy vlastyvostjamy: dys. kand. tehn. nauk. – Odesa, 2015. – 160 s.

6. Agraval G. Nelinejnaja volokonnaja optika / Agraval G. – M.: Mir, 1996. – 323 s.

7. Reshetnikova O.S. Ocenka vkijanija fazovoj samomoduljacii na kachestvo kanalov VOSP SRK s prjamoj moduljaciej // Naukovi praci ONAZ im. O.S. Popova, 2012, № 1 – Odesa, 2012. – S. 158-166.

8. Ivanov M.T. Radiotehnicheskie cepi i sygnaly / Ivanov M.T., Sergienko A.B., Ushakov V.N. – SPb: Piter, 2014. – 336 s.

9. Odegov N.A. Testovye signaly I pokazateli v zadachah issledovanija materialnoj dispersii // Naukovi praci ONAZ im. O.S. Popova, 2017, № 1 – Odesa, 2017. – S. 124-131.

10. Kornejchuk V.I. Opticheskie systemy peredachi / Kornejchuk V.I., Makarov T.V., Panfilov I.P. – K: Tehnika, 1994. – 388 s.

11. Prudnikov A.P., Brychkov J.A., Marichev O.I. Integraly I rjady. Elementarnyji funkciji. – M., Nauka, 1981. – 800 s.

12. C. Cukh, M. Bernefeld. Radiolokacionnye sygnaly. Teorija i primenenie. . – M.: Sov. Radio, 1971. – 568 s.

13. Reshetnjak G.Y. Teoremy ustojchivosti v geometrii i analize. – Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1982. – 228s.

14. Varakin L.E. Teorija slozhnyh sygnalov. . – M.: Sovetskoe radio, 1970. – 376 s.

Рецензія/Peer review : 19.07.2017 р. Надрукована/Printed :30.10.2017 р.
Рецензент: стаття прорецензована редакційною колегією