УДК 539.3

А.О. РАМСЬКИЙ
Хмельницький національний університет

ПОВЕДІНКА В НУЛІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПЛИТИ, ПОКРИТОЇ ШАРОМ ІЗ ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Розглянута двошарова плита з початковими напруженнями. Конструкція лежить на жорсткому абсолютно гладкому півпросторі. Міжшаровий контакт – ідеальний. Представлено розв'язок задачі. Метою роботи є дослідження поведінки розв'язку в околі нуля.

Ключові слова: двошарова плита, початкові напруження.

A.O. RAMSKY
Khmelnytskyi National University

THE BEHAVIOR OF SOLUTION IN ZERO FOR PLATE UNDER EXTERNAL LOAD BY ITS COVER LAYER WITH INITIAL STRESSES

The double layer plate with initial tension is considered. The structure lays on absolutely rigid smooth half-space. Interlayer contact is perfect. The plate is under combined normal and tangential load. The plate and the load are axisymmetric. The solution of the problem is presented. The aim of the article is the research of behaviour of solutions in a neighborhood of zero. The functional system of equations was implemented by Gauss method. Solutions near origin are obtained. The analysis of the results was carrying out. Obtained results are using at further numerical realization of problem.

Keywords: double layer plate, initial stresses.

У роботі [1]отримано розв'язок осесиметричної задачі для нескінченної плити, що лежить на жорсткій основі, покритої шаром-протектором із початковими напруженнями.

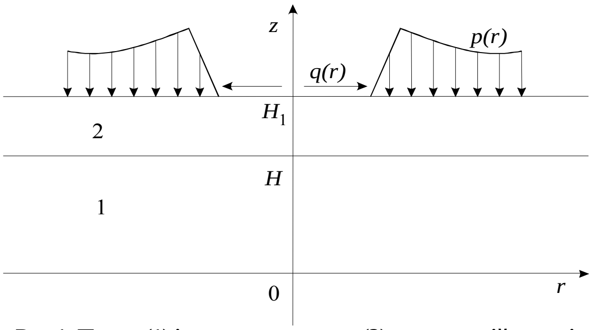

Рис.1. Плита (1) із захисним шаром (2) на жорсткій основі

Граничні умови:

$$\tilde{Q}^{(2)}_{33|z=H_1} = p(r),\ \tilde{Q}^{(1)}_{3r|z=0} = 0,$$
$$\tilde{Q}^{(2)}_{3r|z=H_1} = q(r),\ u^{(1)}_{3|z=0} = 0, \qquad (1)$$

$0 \le r \le a$, a – радіус завантаженого кругу.

Умови спряження шарів

$$\tilde{Q}^{(1)}_{33|z=H} = \tilde{Q}^{(2)}_{33|z=H},\ u^{(1)}_{3|z=H} = u^{(2)}_{3|z=H},$$
$$\tilde{Q}^{(1)}_{3r|z=H} = \tilde{Q}^{(2)}_{3r|z=H},\ u^{(1)}_{r|z=H} = u^{(2)}_{r|z=H} \qquad (2)$$

Конструкція знаходиться під дією осесиметричного нормального розподіленого навантаження інтенсивністю $p(r)$, та дотичного $q(r)$. Міжшаровий контакт – ідеальний. Розв'язки задачі будуються в циліндричній системі координат $r,\theta,z.$

Задача розглядається в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями. Згідно до [3], [4], загальні розв'язки для нормальних та дотичних напружень $\tilde{Q}^{(i)}_{33}$ та $\tilde{Q}^{(i)}_{3r}$ *i*-го шару, а також осьові та радіальні переміщення $u_3^{(i)}$ та $u_r^{(i)}$ мають наступний вигляд:

для шару 1, що лежить на жорсткій основі

$$u_r^{(1)} = -\int_0^\infty \xi\left[\xi A_1(\xi)\left(2ch\xi z + \xi z sh\xi z\right) + B_1(\xi)ch\xi z\right]J_1(\xi r)\,d\xi$$

$$u_3^{(1)} = \frac{m_1^{(1)}}{\sqrt{n_1^{(1)}}}\int_0^\infty \xi\left[\left(\xi\left(1+s_1^{(1)}\right)sh\xi z + \xi^2 z ch\xi z\right)A_1(\xi) + B_1(\xi)sh\xi z\right]J_0(\xi r)\,d\xi$$

$$\tilde{Q}^{(1)}_{33} = c_{44}^{(1)}\left(1+m_1^{(1)}\right)l_1^{(1)}\int_0^\infty \xi^2\left[\left(\left(1+s_1^{(1)}\right)ch\xi z + \xi z sh\xi z\right)A_1(\xi) + B_1(\xi)ch\xi z\right]J_0(\xi r)\,d\xi$$

$$\tilde{Q}^{(1)}_{3r} = -\frac{c_{44}^{(1)}\left(1+m_1^{(1)}\right)}{\sqrt{n_1^{(1)}}}\int_0^\infty \xi^2\left[\left(\xi + \xi^2 z\right)ch\xi z A_1(\xi) + B_1(\xi)sh\xi z\right]J_1(\xi r)\,d\xi;$$

а для захисного шару, що лежить на пружній основі (на плиті)

$$u_r^{(2)} = -\int_0^\infty \xi^2\left[\left(A_2(\xi) + zB_2(\xi)\right)e^{\xi z} + \left((1-\xi z)C_2(\xi) + z(2-\xi z)D_2(\xi)\right)e^{-\xi z}\right]J_1(\xi r)\,d\xi$$

$$u_3^{(2)} = \frac{m_1^{(2)}}{\sqrt{n_1^{(2)}}}\int_0^\infty \xi\left[\left(\xi A_2(\xi) + (1+z)B_2(\xi)\right)e^{\xi z} + \left(\xi\left(\xi z - s_1^{(2)}\right)C_2(\xi) + \left(s_1^{(2)} - \xi z(3-\xi z)\right)D_2(\xi)\right)e^{-\xi z}\right]J_0(\xi r)\,d\xi$$

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)}=c_{44}^{(2)}\left(1+m_1^{(2)}\right)l_1^{(2)}\int_0^\infty\xi^2\left[\left(\xi A_2(\xi)+(2+\xi z)B_2(\xi)\right)e^{\xi z}+\left(\xi\left(s^{(2)}+\xi z\right)C_2(\xi)+\left(\xi z(3-\xi z)-s^{(2)}(2-\xi z)\right)D_2(\xi)\right)e^{-\xi z}\right]J_0(\xi r)d\xi$$

$$\tilde{Q}_{3r}^{(2)}=-\frac{c_{44}^{(2)}\left(1+m_1^{(2)}\right)}{\sqrt{n_1^{(2)}}}\int_0^\infty\xi^2\left[\left(\xi A_2(\xi)+(1+\xi z)B_2(\xi)\right)e^{\xi z}+\left(-\xi\left(s_0^{(2)}-\xi z\right)C_2(\xi)+\left(s_0^{(2)}-3\xi z-\xi^2z^2\right)D_2(\xi)\right)e^{-\xi z}\right]J_1(\xi r)d\xi.$$

З урахування початкових умов (1), (2), а також інтегрального перетворення Ханкеля функцій розподілу зовнішнього навантаження $p(r),q(r)$:

$$p(r)=\int_0^\infty\xi\,\overline{p}(\xi)\,J_0(\xi r)\,d\xi,\ q(r)=\int_0^\infty\xi\,\overline{q}(\xi)\,J_1(\xi r)\,d\xi,$$

введення нових безрозмірних незалежних змінних $\rho=\dfrac{r}{a},\ t=\dfrac{z}{H_1}$ та змінної інтегрування $\beta=a\xi$, параметрів

$$\lambda=\frac{H_1}{a},\mu_1=\frac{H}{H_1},\delta=\frac{\sqrt{n_1^{(2)}}}{\sqrt{n_1^{(1)}}}\frac{c_{44}^{(1)}\left(1+m_1^{(1)}\right)}{c_{44}^{(2)}\left(1+m_1^{(2)}\right)},\chi=\frac{\sqrt{n_1^{(2)}}}{\sqrt{n_1^{(1)}}}\frac{m_1^{(1)}}{m_1^{(2)}},\kappa=\frac{c_{44}^{(1)}\left(1+m_1^{(1)}\right)l_1^{(1)}}{c_{44}^{(2)}\left(1+m_1^{(2)}\right)l_1^{(2)}},$$

та нових невідомих функцій параметру інтегрування β:

$$\overline{A}_1(\beta)=\frac{\beta^2}{a^4}A_1\left(\frac{\beta}{a}\right)ch\beta\lambda\mu_1,\overline{B}_1(\beta)=\frac{\beta}{a^3}B_1\left(\frac{\beta}{a}\right)ch\beta\lambda\mu_1,$$

$$\overline{A}_2(\beta)=\frac{\beta^2}{a^4}A_2\left(\frac{\beta}{a}\right)e^{\beta\lambda\mu_1},\overline{B}_2(\beta)=\frac{\beta}{a^3}B_2\left(\frac{\beta}{a}\right)e^{\beta\lambda\mu_1},\overline{C}_2(\beta)=\frac{\beta^2}{a^4}C_2\left(\frac{\beta}{a}\right)e^{-\beta\lambda\mu_1},\overline{D}_2(\beta)=\frac{\beta}{a^3}D_2\left(\frac{\beta}{a}\right)e^{-\beta\lambda\mu_1}$$

отримано функціональну систему відносно шести функцій $\overline{A}_1(\beta),\overline{B}_1(\beta),\overline{A}_2(\beta),\overline{B}_2(\beta),\overline{C}_2(\beta),\overline{D}_2(\beta)$:

$$\begin{pmatrix} N^{(2,4)} & 0 \\ M^{(4,4)} & P^{(4,2)} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\overline{A}_2(\beta)\\ \overline{B}_2(\beta)\\ \overline{C}_2(\beta)\\ \overline{D}_2(\beta)\\ \overline{A}_1(\beta)\\ \overline{B}_1(\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{p}(\beta)\\ \overline{q}(\beta)\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad (3)$$

де матриці $N^{(2,4)},M^{(4,4)},P^{(4,2)}$ мають такий вигляд:

$$N^{(2,4)}=\begin{pmatrix} 1 & 2+\beta\lambda & \left(s^{(2)}+\beta\lambda\right)e_1(\beta) & \left[\beta\lambda(3-\beta\lambda)-s^{(2)}(2-\beta\lambda)\right]e_1(\beta) \\ -1 & -1-\beta\lambda & \left(s_0^{(2)}-\beta\lambda\right)e_1(\beta) & -\left(s_0^{(2)}-3\beta\lambda-\beta^2\lambda^2\right)e_1(\beta) \end{pmatrix},$$

$$M^{(4,4)}=\begin{pmatrix} e_1(\beta) & (2+\beta\lambda\mu_1)e_1(\beta) & s^{(1)}+\beta\lambda\mu_1 & \beta\lambda\mu_1(3-\beta\lambda\mu_1)-s^{(1)}(2-\beta\lambda\mu_1) \\ -e_1(\beta) & -(1+\beta\lambda\mu_1)e_1(\beta) & s_0^{(1)}+\beta\lambda\mu_1 & -s_0^{(1)}+3\beta\lambda\mu_1+(\beta\lambda\mu_1)^2 \\ -e_1(\beta) & -\beta\lambda\mu_1 e_1(\beta) & -1+\beta\lambda\mu_1 & -\beta\lambda\mu_1(2-\beta\lambda\mu_1) \\ e_1(\beta) & (1+\beta\lambda\mu_1)e_1(\beta) & \beta\lambda\mu_1-s_1^{(1)} & s_1^{(1)}-\beta\lambda\mu_1(3-\beta\lambda\mu_1) \end{pmatrix},$$

$$P^{(4,2)}=\begin{pmatrix} -\kappa\left(1+s^{(1)}+\beta\lambda\mu_1 th\beta\lambda\mu_1\right) & -\kappa \\ \delta\left(th\beta\lambda\mu_1+\beta\lambda\mu_1\right) & \delta th\beta\lambda\mu_1 \\ 2+\beta\lambda\mu_1 th\beta\lambda\mu_1 & 1 \\ -\chi t\left(\left(1+s_1^{(1)}\right)th\beta\lambda\mu_1+\beta\lambda\mu_1\right) & -\chi th\beta\lambda\mu_1 \end{pmatrix},\ \text{ääå}\ e_1(\beta)=e^{-\beta\lambda(1-\mu_1)}.$$

У роботі [2] знайдено асимптотичну поведінку розв'язку системи (3).

Проте, як виявляється, визначник цієї системи дорівнює нулю в точці $\beta=0$. Тому виникає необхідність аналітичної побудови розв'язку при $\beta\to 0$, оскільки без вирішення цього питання не можна навіть стверно відповісти про існування та єдності розв'язку в околі нуля. Крім того, якщо вдасться вирішити це завдання, можна буде конструктивно підійти до наступного кроку – побудови числового розвязку задачі, розділивши усю область параметру інтегрування β на три ділянки: область в околі нуля, область в достатній віддаленості від початку координат, та решту інтервалу, для якого задача розв'язана [1]. Розв'язок в нулі будемо шукати за правилом Крамера:

$$X(\beta)=\frac{\Delta_X(\beta)}{\Delta(\beta)}\left(X=\bar{A}_1(\beta),\bar{B}_1(\beta),\bar{A}_2(\beta),\bar{B}_2(\beta),\bar{C}_2(\beta),\bar{D}_2(\beta)\right). \quad (4)$$

Оскільки $\bar{q}(0)=0$, то усі визначники $\Delta_X(0)=0$, бо у них другий та четвертий рядки однакові. Тому при $\beta\to 0$ формула (4) дає невизначеність $\frac{0}{0}$. Для розкриття цієї невизначеності знайдемо головні члени визначників $\Delta(\beta)$ та $\Delta_X(\beta)$:

$$\Delta(\beta)\approx\kappa\left(s^{(1)}-1\right)\left(s^{(1)}-s_0^{(1)}\right)\beta\lambda\left(\delta\mu_1\left(1-s^{(1)}\right)+\left(1-\mu_1\right)\left(s_1^{(1)}+s_0^{(1)}\right)\left(3s^{(1)}+1\right)\right).$$

Аналогічно отримуємо визначники $\Delta_X(\beta)$, заміняючи у визначнику $\Delta(\beta)$ відповідний стовпець на стовпчик $\left(\bar{p}(\beta)\ \bar{q}(\beta)\ 0\ 0\ 0\ 0\right)^{\grave{O}}$. В результаті, використовуючи правило Крамера, отримаємо головні члени шуканих функцій:

$$\bar{A}_1(\beta)\approx j_1\bar{p}(\beta)+j_2\frac{\bar{q}(\beta)}{\beta\lambda},\bar{B}_1(\beta)\approx g_1\bar{p}(\beta)+g_2\frac{\bar{q}(\beta)}{\beta\lambda},$$

$$\bar{A}_2(\beta)\approx a_1\bar{p}(\beta)+a_2\frac{\bar{q}(\beta)}{\beta\lambda},\bar{B}_2(\beta)\approx b_1\bar{p}(\beta)+b_2\frac{\bar{q}(\beta)}{\beta\lambda},$$

$$\bar{C}_2(\beta)\approx c_1\bar{p}(\beta)+c_2\frac{\bar{q}(\beta)}{\beta\lambda},\bar{D}_2(\beta)\approx d_1\bar{p}(\beta)+d_2\frac{\bar{q}(\beta)}{\beta\lambda},$$

де $a_i,b_i,c_i,d_i,\ j_i,g_i\ (i=1,2)$ – деякі константи.

Отримані результати дають змогу стверджувати, що розв'язок системи (3) в нулі існує і єдиний. Крім того, в подальшому вони використовуються при числовій реалізації задачі при наближенні параметру інтегрування β до нуля. Очевидно, що питання визначення зони, яку можна вважати достатньо близькою до нуля, залежить від величини визначника $\Delta(\beta)$, який залежить як від констант, що визначають характеристики матеріалів плити та покриваючого її поверхневого шару, а також величини початкових напружень конструкції, так і від функцій зовнішнього навантаження $p(r)$ та $q(r)$.

Отже, при $\beta\to 0$ головні члени функцій $\bar{A}_1(\beta),\bar{B}_1(\beta),\bar{A}_2(\beta),\bar{B}_2(\beta),\bar{C}_2(\beta),\bar{D}_2(\beta)$ є лінійними комбінаціями $\bar{p}(\beta)$ та $\frac{\bar{q}(\beta)}{\beta\lambda}$.

Література

1. Рамський А.О. Зменшення напружень плити під дією зовнішнього навантаження за допомогою покриття її шаром із початковими напруженнями / А.О. Рамський // Вісник Хмельницького національного університету. – 2017. – № 3.
2. Рамський А.О. Асимптотика розв'язку задачі для плити, покритої шаром із початковими напруженнями / А.О. Рамський // Вісник Хмельницького національного університету. – 2017. – № 4.
3. Гузь А.Н. О представлении общих решений линеаризованной теории упругости несжимаемых тел // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 12. – С. 1092–1096.
4. Гузь А.Н. О представлении общих решений линеаризованной теории упругости сжимаемого тела // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 8. – С. 700–703.
5. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Вісник Хмельницького національного університету. – Хмельницький : ХНУ, 2004. – 682 с.

References

1. Ramskyi A.O. Zmenshennia napruzhen plyty pid diieiu zovnishnoho navantazhennia za dopomohoiu pokryttia yii sharom iz pochatkovymy napruzhenniamy / A.O. Ramskyi // Herald of Khmelnytskyi National University. – 2017. – # 3.
2. Ramskyi A.O. Asymptotyka rozviazku zadachi dlia plyty, pokrytoi sharom iz pochatkovymy napruzhenniamy / A.O. Ramskyi // Herald of Khmelnytskyi National University. – 2017. – # 4.
3. Huz A.N. O predstavlenyy obshchykh reshenyi lynearyzovannoi teoryy upruhosty neszhymaemykh tel // Dokl. AN USSR. Ser. A. – 1975. – # 12. – S. 1092–1096.
4. Huz A.N. O predstavlenyy obshchykh reshenyi lynearyzovannoi teoryy upruhosty szhymaemoho tela // Dokl. AN USSR. Ser. A. – 1975. – # 8. – S. 700–703.
5. Huz A.N., Rudnytskyi V.B. Kontaktnye zadachy dlia upruhykh tel s nachalnymy (ostatochnыmy) napriazhenymy / A.N. Huz, V.B. Rudnytskyi // Herald of Khmelnytskyi National University. – Khmelnytskyi : KhNU, 2004. – 682 s.

Рецензія/Peer review : 08.07.2017 р. Надрукована/Printed :27.10.2017 р.
Рецензент: стаття прорецензована редакційною колегією