

УДК 621.365.5:537.856

Ю. В. БАТЫГИН, Е. А. ЧАПЛЫГИН, О. С. САБОКАРЬ, В. А. СТРЕЛЬНИКОВА

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

## ИНДУКЦИОННЫЙ НАГРЕВ ВО ВНУТРЕННЕЙ ПОЛОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОЛЕНОИДА. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

*В работе рассматривается аналитическое описание электродинамической задачи модели индукционного нагрева зубчатых цилиндрических заготовок. Полученные в ходе решения зависимости позволяют качественно и количественно оценить процесс нагрева и ключевые параметры системы, влияющие на его эффективность. Окончательные математические выражения, представленные в работе, могут быть использованы для дальнейшего теоретического анализа, а также для расчёта возможных технических реализаций подобной системы. Представленные результаты работы показывают, что наиболее существенным параметром, оказывающим влияние на процесс нагрева, является количество ампер-витков рабочего индуктора.*

*Ключевые слова: индукционный нагрев, электродинамическая задача, вихревые токи, уравнения Максвелла, скин-слой.*

YU. V. BATYGIN, YE. A. CHAPLYGIN, O. S. SABOKAR, V. A. STRELNIKOVA

Kharkov National Automobile and Highway University

## INDUCTION HEATING IN THE INNER CAVITY OF THE CYLINDRICAL SOLENOID. RUNNING PROCESSES MAIN RELATIONSHIPS

*The paper deals with an analytical description of the electrodynamic problem of the induction heating model of gear cylindrical blanks. The dependencies obtained in the course of the solution make it possible to qualitatively and quantitatively evaluate the heating process and the key parameters of the system that affect its efficiency. The final mathematical expressions presented in the paper can be used for further theoretical analysis, as well as for calculating possible technical realizations of such a system. The presented results show that the most significant parameter affecting the heating process is the number of ampere-turns of the working inductor.*

*Keywords: induction heating, electrodynamic problem, eddy currents, Maxwell's equations, skin layer.*

### Введение

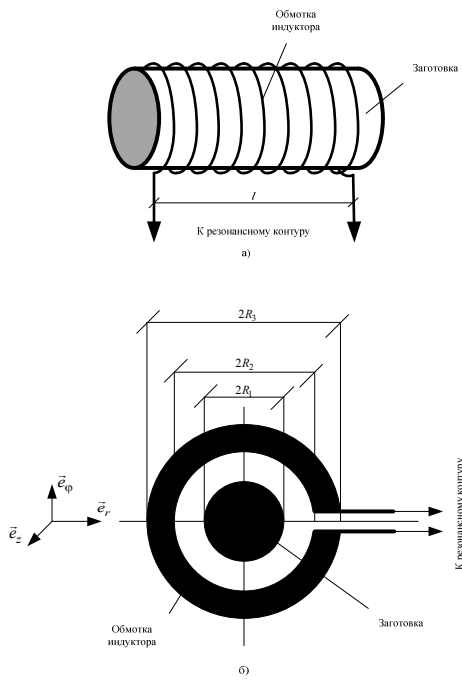
Индукционный нагрев является одним из основных технологических этапов большого количества производственных операций в машиностроительной отрасли. Альтернативой последним является предложение использования индукционного нагрева не только на этапах производства узлов и деталей механизмов, но и на этапах их дальнейшего обслуживания и ремонта. Использование локального и быстрого нагрева, по мнению исследователей, позволяет решить техническую проблему, связанную с выполнением демонтажа или разборки деталей, контактный слой которых подвергался коррозионному воздействию со стороны среды, что в большинстве случаев делает невозможным выполнение упомянутой операции. Несмотря на достаточное количество инженерных решений связанных с описанием процессов нагрева и электродинамических процессов, решение конкретной электрофизической и термодинамической задачи является ключевым этапом в создании высокоэффективных систем индукционного нагрева. Использование готовых решений для количественного описания процессов нагрева, несмотря на их обобщенность, имеет достаточно узкий круг использования, так как имеет ряд ограничений, связанных с конкретно выбранной моделью системы, поэтому они не могут быть использованы в качестве фундаментального описания физического процесса. Именно по этой причине задачи связанные с разработкой новых систем, повышением эффективности нагрева или повышением общего КПД системы требуют выполнения аналитического анализа, основанного на рассмотрении конкретно выбранной модели с ее полным описанием.

Из физических соображений, очевидно, что уровень электромагнитной связи в системе «индуктор – нагреваемый металл» достаточно высок, когда по условиям выполняемой производственной операции объект обработки может быть помещён во внутреннюю полость индуктора. К таковым, например, можно отнести ремонтные операции по разьему болтовых соединений, разборке узлов сочленения компонент разного рода сложных конструкций, выпрессовки наглухо посаженных фиксаторов и др. [1]. Инструментом вышеуказанных производственных операций может служить протяженный многовитковой цилиндрический соленоид. Его внутренняя полость является рабочей зоной, где осуществляется индукционный нагрев обрабатываемого объекта. Собственно соленоид является элементом – L-резонансного «LC»-контура и подключается параллельно емкостному накопителю энергии – C [2].

### Цель и задачи исследования

Целью настоящего рассмотрения является теоретический анализ электромагнитных и тепловых процессов в системе из протяжённого многовиткового соленоида, во внутреннюю полость которого помещен коаксиальный сплошной металлический цилиндр (рис. 1а).

Следует отметить, что подобные задачи решались в работах [3, 4]. Однако, непосредственное использование полученных результатов невозможно, ввиду их ограниченности рамками поставленных задач.



**Рис. 1. Цилиндрическая система индукционного нагрева:** а) схематическое изображение,  $l$  – длина обмотки индуктора; б) расчётная модель в цилиндрической системе координат

**Электромагнитные процессы, основные соотношения.**

В качестве расчётной модели можно рассмотреть и принять геометрию поперечного сечения системы «многовитковой индуктор – внутренний сплошной коаксиальный цилиндр» в цилиндрических координатах (рис. 1б.)

При решении поставленной задачи полагаем, что:

- наличием разреза в области токоподводов можно пренебречь и считать, что имеет место круговая симметрия,

когда  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$  ( $\varphi$  – азимутальный угол);

- индуктор является достаточно протяжённым  $\left(\frac{l}{R_1} \gg 1\right)$  так, что реальной неоднородностью поля в

направлении орта  $\vec{e}_z$  можно пренебречь и считать, что  $\frac{\partial}{\partial z} \approx 0$ ;

- энергия возбуждаемого магнитного поля сконцентрирована во внутренней полости соленоида и на его внутренней поверхности продольная  $z$ -компонента

напряжённости будет равна:  $H_i(t) = \frac{W \cdot J_i(t)}{l_i}$ , где  $t$  – время,  $W$

– число витков,  $J_i(t)$  – возбуждающий ток,  $l_i$  – длина обмотки индуктора;

- приемлемо условие квазистационарности, так что  $\omega \cdot \frac{a}{c} \ll 1$  где  $\omega$  – характерная циклическая

частота в спектре возбуждающего тока,  $a$  – характерный размер системы,  $c$  – скорость света в вакууме.

Что бы избежать излишнего загромождения ссылками на использованные литературные источники, укажем, что решение поставленной задачи проведено аналогично тому, как это было сделано авторами работ [3–5]. Дополнительную информацию о применяемом математическом аппарате можно найти в справочном руководстве [6].

Соответственно принятым допущениям и расчётной модели на (рис. 1б) уравнения Максвелла для нетривиальных составляющих напряжённости электромагнитного поля ( $E_\varphi \neq 0, H_z \neq 0$ ), преобразованных по Лапласу с учетом нулевых начальных условий, могут быть записаны в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot (r \cdot E_\varphi(p, r)) &= -\mu_0 p \cdot H_z(p, r) & (1) \\ -\frac{\partial H_z(p, z)}{\partial r} &= \varepsilon_0 p \cdot E_\varphi(p, r) & (2) \\ -\frac{\partial H_z(p, r)}{\partial r} &= \gamma \cdot E_\varphi(p, r) & (3) \end{aligned} \right.$$

где  $p$  – параметр преобразования Лапласа,  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  – магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума,  $\gamma$  – электропроводность металла заготовки.

Из дифференциальной системы (1)–(3) получаем уравнение для напряжённости электрического поля в средах с различными электрофизическими характеристиками:

$$\frac{\partial}{\partial r} \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi(p, r)) \right) - k_{1,2}^2(p) \cdot E_\varphi(p, r) = 0 \quad (4)$$

где  $k_{1,2}(p)$  – волновые числа,

$$k(p) = \begin{cases} k(p) = \frac{p}{c}, & \text{– для областей с диэлектрическим заполнением} \\ c & \text{– скорость света в вакууме} \\ k(p) = \sqrt{p\mu\gamma}, & \text{– для областей с конечной проводимостью} \end{cases}$$

Фундаментальная система решений уравнения (4) есть модифицированные функции Бесселя

первого порядка –  $I_1(z), K_1(z)$ .

Соответственно, общие интегралы для напряженности электрического поля запишутся в виде:

а) в воздушном зазоре между внутренней поверхностью обмотки индуктора и внешней поверхностью заготовки,  $r \in [R_1, R_2]$ :

$$E_{\varphi}^{(1)}(p, r) = A(p) \cdot I_1(k_1(p) \cdot r) + B(p) \cdot K_1(k_1(p) \cdot r) \quad (5)$$

б) в металле цилиндрической заготовки,  $r \in [0, R_1]$  условие ограниченности в нуле пространственной переменной удовлетворяет функция:

$$E_{\varphi}^{(2)}(p, r) = C(p) \cdot I_1(k_2(p) \cdot r) \quad (6)$$

где  $A(p), B(p), C(p)$  – произвольные постоянные интегрирования.

Неизвестные произвольные постоянные интегрирования в выражениях для компонент векторов электромагнитного поля можно найти с помощью соответствующих граничных условий и выразить их, в конечном итоге, через величину операторной формы тока  $J_i(p) = L\{J_i(t)\}$ .

В конечном итоге нас интересуют процессы в нагреваемом объекте. Из системы линейных алгебраических уравнений известными методами находим, что

$$H_z^{(2)}(p, r) = - \left( \frac{Z_0 \cdot \gamma \cdot W \cdot R_1}{l} \right) \cdot \frac{J_i(p)}{(k_1(p) \cdot R_1)(k_2(p) \cdot R_1)} \cdot \frac{1}{\Delta(p)} \cdot I_0(k_2(p) \cdot r) \quad (7)$$

где  $\Delta(p) = I_1(k_2(p) \cdot R_1) \cdot F_1(p) - \sqrt{\frac{\gamma}{p \cdot \epsilon_0}} \cdot I_0(k_2(p) \cdot R_1) \cdot F_2(p)$ ,

$$F_1(p) = K_0(k_1(p) \cdot R_2) \cdot I_0(k_1(p) \cdot R_1) - K_0(k_1(p) \cdot R_1) \cdot I_0(k_1(p) \cdot R_2),$$

$$F_2(p) = K_1(k_1(p) \cdot R_1) \cdot I_0(k_1(p) \cdot R_2) + K_0(k_1(p) \cdot R_2) \cdot I_1(k_1(p) \cdot R_1).$$

#### Индукционный ток

С помощью закона полного тока  $L$ -изображение индуцированного тока  $J(p)$  можно найти, полагая, что он протекает по азимуту в сплошной цилиндрической заготовке радиуса –  $R_1$  и длиной –  $l$ .

С привлечением зависимости (7) получаем, что

$$J(p) \approx l \cdot \left( H_z^{(2)}(p, 0) - H_z^{(2)}(p, R_1) \right) = \frac{(W \cdot Z_0 \cdot \gamma \cdot R_1)}{((k_2(p) \cdot R_1) \cdot (k_1(p) \cdot R_1))} \cdot J_i(p) \cdot \frac{(I_0(k_2(p) \cdot R_1) - 1)}{\Delta(p)} \quad (8)$$

Выражение (8) можно упростить, если учесть реальные условия выполнения ремонтных операций, требующих индукционного нагрева рабочих объектов. Для конкретных оценок будем ориентироваться на их характерные радиальные размеры  $\sim 0,01-0,05$  м и рабочие частоты порядка  $\sim 30-50$  кГц. Как правило, элементы крепежа изготовлены из стали с удельной электропроводностью  $\sim 0,4 \cdot 10^7$  1/Ом·м.

Приближённые оценки показывают, что принятым характеристикам объектов индукционного нагрева, соответствуют предельные оценки аргументов модифицированных функций Бесселя:

$$|k_1(p) \cdot R_{1,2}| \approx \frac{\omega}{c} \cdot R_{1,2} \ll 1, \quad |k_2(p) \cdot R_{1,2}| \approx \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_0} \cdot R_{1,2} \gg 1. \quad (9)$$

*Примечание.* Оценка  $|k_2(p) \cdot R_{1,2}| \approx \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_0} \cdot R_{1,2} \gg 1$  соответствует минимуму значения волнового числа –  $k_2(p) = \sqrt{p \mu_0 \gamma}$ , поскольку в случае магнитного металла растёт величина магнитной проницаемости

( $\mu_0 \rightarrow \mu_0 \cdot \mu_r$ ,  $\mu_r > 1$ ,  $\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость). Данное обстоятельство позволяет считать справедливыми дальнейшие выводы и для ферромагнитных объектов нагрева.

Неравенства (9) позволяют воспользоваться асимптотическими представлениями и соответствующими разложениями в окрестности нуля для модифицированных функций Бесселя.

После необходимых тождественных преобразований в выражении (8) получаем, что

$$J(p) \approx W \cdot J_i(p) \cdot \frac{(1 - \sqrt{2\pi \cdot (k_2(p) R_1)} \cdot \exp(-k_2(p) R_1))}{\left( \frac{(k_1(p) R_1) \cdot (k_2(p) R_2)}{(Z_0 \gamma R_1)} \cdot \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \cdot \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) - 1 \right)} \quad (10)$$

Выражение (10) содержит неопределённости

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{(k_2(p) R_1) \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi \cdot (k_2(p) R_1)} \cdot \exp(-k_2(p) R_1) = \|\infty \cdot 0\|, \\ \lim_{\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \rightarrow 0} \left[ \left(\frac{R_1}{R_2}\right) \cdot \ln \left(\frac{R_1}{R_2}\right) - 1 \right] = \|0 \cdot \infty\| \end{array} \right. \quad (11)$$

Первое соотношение в (11) характеризует значимость процессов проникновения возбуждаемых

полей, второе определяет значимость расстояния между источником магнитного поля (рабочая поверхность соленоида) и заготовкой. В конечном итоге, вышеозначенные соотношения устанавливают влияние электромагнитных процессов и геометрии системы на величину индуцированного тока.

Раскрывая математические неопределённости в зависимостях (11), получаем, что оба предела будут равны нулю. С учетом данного результата можно получить в пространстве оригиналов прямопропорциональную связь между возбуждающим током соленоида и током, индуцированным в металле нагреваемой цилиндрической заготовки.

$$J(t) \approx W \cdot J_i(t) \quad (12)$$

Полученный результат (12) свидетельствует о том, что величина индуцированного тока в цилиндрических системах индукционного нагрева с рабочими частотами до  $\sim 30 \div 50$  кГц и стальными немагнитными образцами ( $\sim 0,4 \cdot 10^7$  1/Ом·м) с поперечными размерами  $\sim 0,01 \div 0,05$  м устанавливаются исключительно количеством витков обмотки возбуждающего соленоида –  $W$  и не зависит от временных характеристик электромагнитных процессов –  $\omega$ , а также от геометрии системы, определяемой соотношением  $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$ .

### Температура нагрева

Индукционный нагрев рассматриваемой цилиндрической заготовки в случае гармонического тока в обмотке соленоида можно вычислить в адиабатическом приближении [2, 5].

Положим, что в отсутствии теплообмена имеет место Ленц–Джоулев нагрев лишь той части заготовки, где сконцентрирован индуцированный ток. Развитие процессов проникновения действующих полей позволяет считать, что область концентрации – это «условный» проводник с площадью поперечного сечения  $S \approx \delta \cdot l$ , где  $\delta$  – величина скин-слоя,  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_0}}$  [1], и длиной  $\sim 2\pi R_l$ .

Опуская промежуточные преобразования, в конечном итоге, находим приращение температуры образца за время –  $\Delta t \gg \frac{2\pi}{\omega}$ .

$$\Delta T^\circ \approx \Delta t \cdot \frac{2\pi}{C \cdot \rho \cdot \gamma} \cdot \left(\frac{R_l}{l}\right) \cdot \left(\frac{W \cdot J_m}{S}\right)^2 \quad (13)$$

где  $C$  – удельная теплоёмкость,  
 $\rho$  – плотность,  
 $\gamma$  – удельная электропроводность,  
 $J_m$  – амплитудное значение возбуждающего тока.

Из (13) определим соотношение  $\bar{V} = (\Delta T^\circ / \Delta t)$ , представляющее собой динамическую характеристику процесса – среднюю скорость индукционного нагрева.

Принимая,  $S = l \cdot \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_0}}$  получаем, что

$$\bar{V} = (\Delta T^\circ / \Delta t) \approx \frac{\pi \cdot \omega \cdot \mu_0}{C \cdot \rho} \cdot \left(\frac{R_l}{l^3}\right) \cdot (W \cdot J)^2 \quad (14)$$

Из соотношения (14) явно следует основные характерные зависимости средней скорости индукционного нагрева цилиндрической стальной заготовки (как немагнитной, так и магнитной) в поле многovitкового соленоида:

- прямая пропорциональность частоте возбуждающего тока и внешнему размеру заготовки,
- обратная пропорциональность удельной плотности нагреваемого металла,
- квадратичная зависимость от числа ампер-витков соленоида.

### Численные оценки, основные результаты

Полученные соотношения проиллюстрируем численными оценками для реальных условий, интересных с практической точки зрения. В качестве исходных возьмём типичные данные из практики известных авторемонтных технологий [1].

Дано:

1. Нагреваемый объект – стальной цилиндр.
2. Удельная электропроводность –  $\gamma = 0,4 \cdot 10^7$  1/Ом·м.
3. Удельная теплоёмкость –  $C = 460$  Дж/кг·град.
4. Плотность –  $\rho = 9000$  кг/м<sup>3</sup>.
5. Геометрия: длина –  $l = 0,05$  м, радиус –  $R_l = 0,025$  м.

6. Ампер-витки,  $x = W \cdot J$ ,  $x \in [100, 1000]$ .

Найти: Отношение температуры ко времени нагрева сплошной металлической заготовки – скорость теплового процесса  $\bar{V}(x)$  как функцию числа ампер-витков –  $x = W \cdot J$

Вычисления: Для визуальной наглядности результаты вычислений, выполненные с помощью формулы (14), в графическом виде приведены ниже на рис. 2.

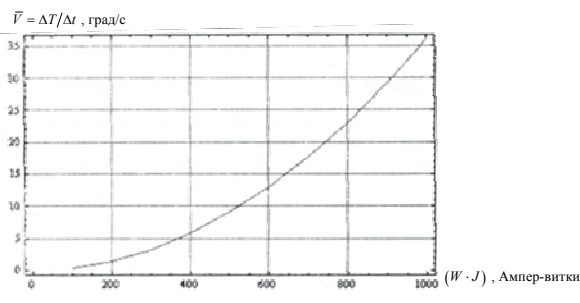


Рис. 2. Характерная зависимость средней скорости индукционного нагрева металлической заготовки в поле цилиндрического соленоида

Из зависимости на рис. 2 следует, что уже при  $W \cdot J \approx 550$ , что может соответствовать числу витков соленоида 55 и амплитуде возбуждающего тока 10 А, средняя скорость индукционного нагрева составляет 10 град/с, то есть за время 60 с температура нагреваемого объекта может достичь величины 600°.

#### Выводы

К основным результатам проведенного анализа можно отнести следующее. Получены аналитические соотношения, позволяющие производить оценки характеристик процессов индукционного нагрева с помощью цилиндрических соленоидов.

Показано, что величина индуцируемого тока не зависит от временных параметров возбуждающего поля, размеров заготовки и прямопропорционально зависит только от числа ампер-витков соленоида.

Кроме того, средняя скорость нагрева прямопропорциональна частоте возбуждающего тока и внешнему размеру заготовки; обратнопропорциональна удельной плотности нагреваемого металла; находится в квадратичной зависимости от числа ампер-витков соленоида.

#### Литература

1. Синельников А. Ф. Кузова легковых автомобилей: обслуживание и ремонт / А. Ф. Синельников, Ю. Л. Штоль, С. А. Скрипников. – М. : Транспорт, 1995. – 256с.
2. Яворский Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский Б. М., А. А. Детлаф. – М. : Наука, 1968. – 940 с.
3. Слухоцкий А. Е. Установки индукционного нагрева / А. Е. Слухоцкий. – Л. : Энергоиздат, 1981. – 328 с.
4. Батыгин Ю. В. Лавинский В. И. Особенности магнитно-импульсной «раздачи» тонкостенных трубчатых заготовок / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский // Москва, Электричество. – 2005. – № 11. – С. 62–68.
5. Батыгин Ю. В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий : Т. 1 / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский, Л. Т. Хименко / [изд. 2-е, перераб. и доп. ; под общ. ред. Батыгина Ю. В.]. – Х. : «ТОРНАДО-Мост», 2003. – 284 с.
6. Корн Т. Справочник по математике / Т. Корн, Г. Корн. – М. : Наука, 1973. – 831 с.

#### References

1. Synelnykov A. F. Kuzova lehkovykh avtomobylei: obsluzhyvanye y remont / A. F. Synelnykov, Yu. L. Shtol, S. A. Skrypnykov. – M. : Transport, 1995. – 256s.
2. Yavorskyi B. M. Spravochnyk po fyzyke / B. M. Yavorskyi B. M., A. A. Detlaf. – M. : Nauka, 1968. – 940 s.
3. Slukhotskyi A. E. Ustanovky ynduktsyonnoho nahreva / A. E. Slukhotskyi. – L. : Enerhoizdat, 1981. – 328 s.
4. Batyhyn Yu. V. Lavynskiy V. Y. Osobennosti mahnytno-ympulsnoi «razdachy» tonkostennykh trubchatykh zahotovok / Yu. V. Bathyhyn, V. Y. Lavynskiy // Moskva, Elektrichestvo. – 2005. – Issue 11. – S. 62–68.
5. Bathyhyn Yu. V. Ympulsnye mahnytnye polia dlia prohressyvnykh tekhnolohiy : T. 1 / Yu. V. Bathyhyn, V. Y. Lavynskiy, L. T. Khymenko / [yzd. 2-e, pererab. y dop. ; pod obshch. red. Bathyhyna Yu. V.]. – Kh. : «TORNADO-Most», 2003. – 284 s.
6. Korn T. Spravochnyk po matematyke / T. Korn, H. Korn. – M. : Nauka, 1973. – 831 s.

Рецензія/Peer review : 19.11.2017 р.

Надрукована/Printed :04.12.2017 р.  
Рецензент: д.т.н., проф. Бажинов О.В.