УДК 623.396

О.В. БОРОВИК, Л.В. БОРОВИК, В.А. КРИСЬКОВ
Хмельницький національний університет

МЕТОД РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ У ЗАДАЧАХ ПРОТИДІЇ ДВОХ СТОРІН ПРИ КОНФЛІКТІ СТРАТЕГІЙ

Метою даного дослідження є обґрунтування методу розкриття невизначеності у задачах протидії двох сторін при конфлікті стратегій, що визначаються функціями двох змінних за наявності специфічних додаткових умов і обмежень.

Ключові слова: невизначеність, протидія, стратегії, конфлікт, функція двох змінних, специфічні умови та обмеження.

O.V. BOROVYK, L.V. BOROVYK, V.A. KRYSKOV
Khmelnytsky National University

THE METHOD OF DISCLOSURE OF UNIQUENESS IN THE PROBLEMS OF CONTINGENCY OF TWO PARTIES AT STRATEGY CONFLICT

For a significant class of formal problems of system analysis, an important problem is the disclosure of uncertainties. Applied tasks that do not contain uncertainties are rather an exception than a rule. An adequate description of the problem usually contains various types of uncertainty, reflecting the natural state in which the researcher is located. The most common practice is the uncertainty of goals, situations, conflicts. One of the most important classes of problems of uncovering the problems is the problems in which cases of conflict between the strategies of subjects are investigated. Tasks of this class, for example, include tasks of choosing a rational strategy of competitors' actions in the common market, if there are no agreements between them and restrictions in behaviour. Study of the properties and features of conflict situations - one of the main tasks of such discipline, as the theory of games. In the framework of this theory, cases of counteraction to the parties whose strategies are determined by the payment matrix are sufficiently fully analysed. Cases of disclosure of uncertainty in counteracting two opponents related to the assessment of the degree and level of risk based on point and interval principle are also researched. However, for today, the question of determining the optimal (rational) compromise in the event of counteraction to the parties, the strategies of which are described functionally, in the presence of additional conditions and assumptions, have not yet been fully studied. The paper defines a class of problems of counteraction of two parties in the conflict of strategies determined by the functions of two variables in the presence of restrictions and additional conditions that provide an opportunity: to achieve a guaranteed result at the worst variants of the situation for the party; achieve the maximum possible result in the worst case scenario for the party; achievement of the best result for the party at the most probable variants of behaviour of the opposing party. On the basis of the analysis of existing methods of solving such problems, approaches to the solution of the investigated problem in all possible described cases of the implementation of specific conditions are proposed.

Keywords: uncertainty, counteraction, strategy, conflict, function of two variables, specific conditions and constraints.

Постановка проблеми у загальному вигляді.

Для значного класу формалізованих задач системного аналізу важливою проблемою є розкриття невизначеностей. Це зумовлено різноманітністю цілей, властивостей і особливостей об’єктів системного аналізу. Прикладні задачі, які не містять невизначеностей, є скоріше винятком, ніж правилом. Адекватний опис проблеми зазвичай містить різного типу невизначеності, що відображає той природний стан, у якому перебуває дослідник. Будь-яке його знання завжди є відносно неповним і неточним. Це безпосередньо випливає з теореми Геделя про неповноту [1] та еволюцію розвитку людського пізнання.

Найпоширенішими на практиці є невизначеності цілей, ситуацій, конфліктів. Суть цих невизначеностей наведена у роботах [2–6]. Одним із достатньо важливих класів задач розкриття невизначеностей є задачі, в яких досліджуються випадки протистояння стратегій суб’єктів. До задач цього класу, наприклад, належать задачі вибору раціональної стратегії дій конкурентів на спільному ринку, якщо немає договорів між ними та обмежень у поведінці. Основна відмінність задач протидії стратегій від інших задач взаємодії партнерів полягає в такому: сторони не лише не повідомляють одна одній які-небудь достовірні відомості про свої дії, але й свідомо дезінформують як щодо цілей, так і певних параметрів; ситуації, за яких розвиваються події, залежать не лише від зовнішніх умов, але й від стратегії дії сторін; дії сторін зумовлюють потребу зміни не тільки параметрів, але й цілей у процесі розвитку ситуацій; цілі сторін не тільки не збігаються, але зазвичай є протилежними і часто конфліктними.

На сьогодні ще не до кінця вивченими є питання розкриття невизначеності у задачах конфлікту стратегій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано вирішення даної проблеми та на які опираються автори

Вивчення властивостей та особливостей конфліктних ситуацій – одне з головних завдань такої дисципліни, як теорія ігор [4–6]. У межах цієї теорії достатньо повно проаналізовані випадки протидії сторін, стратегії яких визначаються платіжною матрицею.

Випадки розкриття невизначеності при протидії двох супротивників, що стосуються оцінювання ступеня і рівня ризику на базі точкового та інтервального принципу, досліджені у роботі [2].

Однак на сьогодні ще не до кінця повно вивчені питання визначення оптимального (раціонального) компромісу у випадку протидії сторін, стратегії яких описані функціонально за наявності додаткових умов і припущень.

Саме тому метою даної роботи є обґрунтування методу розкриття невизначеності у задачах протидії двох сторін при конфлікті стратегій, що визначаються функціями двох змінних за наявності специфічних додаткових умов і обмежень.

Для досягнення мети вбачається за доцільне:

чітко окреслити клас задач розкриття невизначеності, що досліджуватимуться у роботі;

обґрунтувати авторський можливий підхід щодо вирішення досліджуваних задач.

Отже, розглянемо задачу протидії двох сторін при конфлікті стратегій, що визначаються функціями двох змінних, у наступній постановці.

Задано дві сторони (суб’єкта), кожна з яких має свою цільову функцію:

$$\text{суб'єкт 1 - } f_1(x_1, x_2), \qquad (1)$$

$$\text{суб'єкт 2 - } f_2(x_1, x_2). \qquad (2)$$

Суб’єкти діють незалежно – жодний не знає ні цільової функції, ні параметрів протилежної сторони.

Областю визначення стратегій для суб’єктів 1, 2 є проміжки

$$x_1 \in [a; b],\ x_2 \in [c; d]. \qquad (3)$$

Обмеження на цільові функції мають вигляд

$$f_1(x_1, x_2) \geq f_1^*, \qquad (4)$$

$$f_2(x_1, x_2) \geq f_2^*. \qquad (5)$$

У виразах (4)-(5) f_1^*, f_2^* – це умови, що визначають цілі сторін.

В якості умов розглядається можливість:

досягнення гарантованого результату при найгірших варіантах розвитку ситуації для сторони;

досягнення максимально можливого результату при найгірших варіантах розвитку ситуації для сторони;

досягнення найкращого результату для сторони при найбільш ймовірних варіантах поведінки протидіючої сторони.

Аналіз підходів щодо вирішення досліджуваних задач

Випадок 1. Розв’язати задачу (1)–(5) за умови, що f_1^*, f_2^* визначають можливість досягнення гарантованого результату при найгірших варіантах розвитку ситуації для сторони.

У цьому випадку кожний суб’єкт прагне забезпечити собі певні гарантовані результати за найкращих умов, створюваних активною протидією конкурента або супротивника. Для досягнення гарантованого результату кожен суб’єкт виходить із наступних умов: супротивник вибрав для себе такі параметри дії, які завдають протидіючій стороні найбільших збитків; з огляду на першу умову супротивник вибирає такі параметри власної діяльності, щоб при найгіршій ситуації мати максимально можливі для себе значення цільової функції.

У такому разі гарантований результат f_1^* для першого суб’єкта виражатиме таке співвідношення

$$f_1^* = \max_{x_1} \min_{x_2} f_1(x_1, x_2), \qquad (6)$$

а для другого суб’єкта –

$$f_2^* = \max_{x_2} \min_{x_1} f_2(x_1, x_2). \qquad (7)$$

Якщо умова (6) виконується за $x_1 = x_1^*$, а умова (7) - якщо $x_2 = x_2^*$, то

$$x_1^* = \arg\max_{x_1} \min_{x_2} f_1(x_1, x_2), \qquad (8)$$

$$x_2^* = \arg\max_{x_2} \min_{x_1} f_2(x_1, x_2). \qquad (9)$$

За такого вибору $x_1 = x_1^*$ для першого суб’єкта гарантовано, що за будь-якого значення x_2 виконується умова

$$f_1(x_1, x_2) \geq f_1^*. \qquad (10)$$

Аналогічно для другого суб’єкта гарантовано, що за $x_2 = x_2^*$ і будь-якого значення x_1 виконується умова

$$f_2(x_1, x_2) \geq f_2^*. \qquad (11)$$

З інструментальної точки зору у цьому випадку f_1^*, f_2^* можна знаходити різними способами, наприклад, табличним методом, класичним методом, який базується на дослідженні екстремальних властивостей функцій, графічним методом. Особливості застосування цих методів при розв'язуванні відповідних задач можна оцінити з роботи [2].

Далі знаходиться множина Парето D, як перетин областей, що визначаються обмеженнями (4), (5). Оптимальні ж значення $\bar{x}_1^*$ і $\bar{x}_2^*$, які визначають розв'язок задачі (1)-(5), знаходяться з умови

$$\max_{i=1,2} | f_i(x_1, x_2) - f_i^* | \to \min \tag{12}$$

в області Парето D, тобто $\forall (x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in D$.

<u>Випадок 2.</u> Розв'язати задачу (1)-(5) за умови, що f_1^*, f_2^* визначають можливість досягнення максимально можливого результату при найгірших варіантах розвитку ситуації для сторони.

У такому разі результат f_1^* для першого суб'єкта виражатиме співвідношення

$$f_1^* = \max_{x_1} \max_{x_2} f_1(x_1, x_2) , \tag{13}$$

а для другого суб'єкта –

$$f_2^* = \max_{x_2} \max_{x_1} f_2(x_1, x_2) . \tag{14}$$

Якщо умова (13) виконується за $x_1 = x_1^*$, а умова (14), якщо $x_2 = x_2^*$, то

$$x_1^* = \arg \max_{x_1} \max_{x_2} f_1(x_1, x_2) , \tag{15}$$

$$x_2^* = \arg \max_{x_2} \max_{x_1} f_2(x_1, x_2) . \tag{16}$$

З інструментальної точки зору f_1^*, f_2^* у цьому випадку можна знаходити також різними способами.

Однак, з точки зору спрощення процедури розв'язування задачі та автоматизації процесу найбільш доцільним видається метод, який базується на дослідженні екстремальних властивостей функцій.

Для цього, насамперед на основі застосування теорії диференціального числення функції багатьох змінних [7] знаходиться точка $M^*\left(x_1^*; x_2^*\right)$, в якій функція $f_1(x_1, x_2)$ досягає максимуму. Далі формується функція однієї змінної $f_1(x_1, x_2^*)$. Застосування теорії диференціального числення функції однієї змінної [7] дозволяє знайти точку максимуму $\bar{x}_1$ функції однієї змінної $f_1(x_1, x_2^*)$. На основі цього визначається f_1^*, як

$$f_1^* = f_1(\bar{x}_1, x_2^*) . \tag{17}$$

Аналогічно здійснюється пошук величини f_2^*.

Знаходиться точка $N^*\left(x_1^*; x_2^*\right)$, в якій функція $f_2(x_1, x_2)$ досягає максимуму. Далі формується функція однієї змінної $f_2(x_1^*, x_2)$. Знаходиться точка максимуму $\bar{x}_2$ функції однієї змінної $f_2(x_1^*, x_2)$. На основі цього визначається f_2^*, як

$$f_2^* = f_2(x_1^*, \bar{x}_2) . \tag{18}$$

Далі знаходиться множина Парето D, як і у випадку 1.

Оптимальні ж значення $\bar{x}_1^*$ і $\bar{x}_2^*$, які визначають розв'язок задачі (1)–(5), знаходяться з умови

$$\max_{i=1,2} | f_i(x_1, x_2) - f_i^* | \to \max \tag{19}$$

в області Парето D, тобто $\forall (x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in D$.

<u>Випадок 3.</u> Розв'язати задачу (1)-(5) за умови, що f_1^*, f_2^* визначають можливість досягнення найкращого результату для сторони при найбільш ймовірних варіантах поведінки протидіючої сторони.

У такому разі результат f_1^* для першого суб'єкта виражатиме співвідношення [8]

$$f_1^* = \frac{1}{S} \iint_D f_1(x, y) dS , \tag{20}$$

де D - область, у якій досліджується функція $f_1(x, y)$ (у досліджуваній задачі – це прямокутник, що визначається обмеженнями (3), а S - це площа області D (у досліджуваній задачі $S = (b - a) \times (d - c)$).

Результат f_2^* для другого суб'єкта виражатиме співвідношення

$$f_2^* = \frac{1}{S}\iint\limits_D f_2(x,y)dS\,. \qquad (21)$$

У (21) D і S мають ті ж позначення і значення, що і в (20).

Отже, у цьому випадку

$$x_1^* = \arg f_1^*, \qquad (22)$$

$$x_2^* = \arg f_2^*. \qquad (23)$$

Далі знаходиться множина Парето D, як і у випадках 1, 2.

Оптимальні ж значення $\bar{x}_1^*$ і $\bar{x}_2^*$, які визначають розв'язок задачі (1)-(5), можуть бути знайдені з такої x умови (19), як і у випадку 2.

Розглянемо приклад розв'язування досліджуваної задачі у випадку 1.

Цільові функції сторін наступні:

$$\text{суб'єкт 1 - } f_1(x_1,x_2) = -x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 8\,, \qquad (24)$$

$$\text{суб'єкт 2 - } f_2(x_1,x_2) = x_1^2 - 6x_1 - x_2^2 + 2x_2 + 2\,. \qquad (25)$$

Суб'єкти діють незалежно – жодний не знає ні цільової функції, ні параметрів протилежної сторони.

Областю визначення стратегій для суб'єктів 1, 2 є проміжки $x_1 \in [0;4]$, $x_2 \in [0;4]$.

Обмеження на цільові функції мають вигляд (4), (5).

Знайти оптимальний розв'язок задачі .у постановці випадку 1.

Для розв'язання задачі насамперед необхідно знайти значення f_1^*, f_2^*.

Результати відшукання цих значень за табличним методом можна оцінити з (табл. 1, 2).

Таблиця 1

Знаходження гарантованого результату f_1^*

$x_1 \in [0;4]$	**0**					**1**					**2**					**3**					**4**				
$x_2 \in [0;4]$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
$f_1(x_1,x_2)$	8	5	<u>4</u>	5	8	9	6	<u>5</u>	6	9	8	5	<u>4</u>	5	8	5	2	<u>1</u>	2	5	0	-3	<u>-4</u>	-3	0

З (табл. 1) видно, що $f_1^* = \max\limits_{x_1} \min\limits_{x_2} f_1(x_1,x_2) = f_1^*(1;2) = 5$.

Таблиця 2

Знаходження гарантованого результату f_2^*

$x_2 \in [0;4]$	**0**					**1**					**2**					**3**					**4**				
$x_1 \in [0;4]$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
$f_2(x_1,x_2)$	2	-3	-6	<u>-7</u>	-6	3	-2	-5	<u>-6</u>	-5	2	-3	-6	<u>-7</u>	-6	-1	-6	-9	<u>-10</u>	-9	-6	-11	-14	<u>-15</u>	-14

З (табл. 2) видно, що $f_2^* = \max\limits_{x_2} \min\limits_{x_1} f_2(x_1,x_2) = f_2^*(3;1) = -6$.

Результати відшукання значень f_1^*, f_2^* за класичним методом наведені нижче.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 = 0\,. \qquad (26)$$

З останнього рівняння випливає, що мінімуму функція досягає при $x_2 = 2$.

Потрібно відшукати значення x_1, за якого функція досягатиме максимуму. Для цього в $f_1(x_1,x_2)$ підставимо одержане значення $x_2 = 2$ і розв'яжемо наступне рівняння:

$$\frac{\partial f_1(x_1,2)}{\partial x_1} = -2x_1 + 2 = 0\,.$$

Звідси маємо $x_1 = 1$. У точці $x_1 = 1$ досягається максимум. Отже,

$$\max_{x_1}\min_{x_2} f_1(x_1,x_2) = f_1^*(1;2) = 5\,.$$

Такі самі дії виконуються для другого суб'єкта, тобто для функції $f_2(x_1, x_2)$.

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2x_1 - 6 = 0.$$

Одержимо мінімум у точці $x_1 = 3$.

$$\frac{\partial f_2(3, x_2)}{\partial x_1} = -2x_2 + 2 = 0,$$

звідки випливає, що в точці $x_2 = 1$ функція досягає максимуму. Отже,

$$f_2^* = \max_{x_2} \min_{x_1} f_2(x_1, x_2) = f_2^*(3;1) = -6 \cdot$$

Отриманий результат співпав з отриманим за табличним методом.

Скористаємось тепер для знаходження f_1^*, f_2^* графічним методом.

Щоб знайти f_1^*, фіксуючи послідовність значень x_1, будуються графіки функції $f_1(x_1, x_2)$ за x_2 (рис. 1). З цього рис. видно, що максимальний мінімум досягається при $x_2 = 2$ і $x_1 = 1$, а $f_1^* = 5$.

Для відшукання f_2^* аналогічно, фіксуючи послідовність значень x_2, будуються графіки функції $f_2(x_1, x_2)$ за x_1 (рис. 1). Як видно з рисунка, максимальний мінімум досягається при $x_1 = 3$ і $x_2 = 1$, а $f_2^* = -6$ отже, $f_1^* = 5$ і $f_2^* = -6$./

Множину Парето знаходимо, виходячи з обмежень $f_1^*(x) \geq 5$; $f_2^*(x) \geq -6$. Систему нерівностей (4)-(5) у розглядуваному прикладі розв'язати нескладно. Графічна інтерпретація їх розв'язку наведена на (рис. 2)

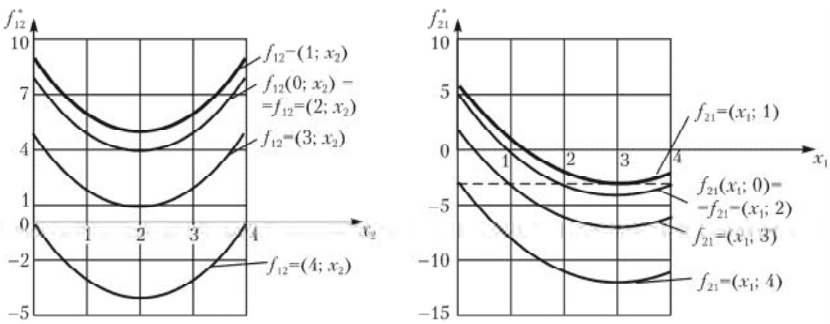
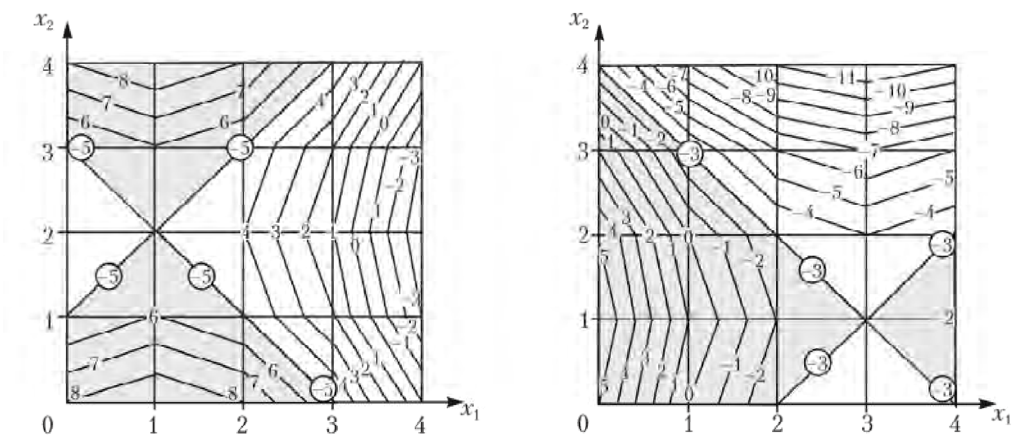


Рис. 1. Знаходження f_1^* та f_2^* графічним методом



Множина точок для нерівності 4.87, *а* Множина точок для нерівності 4.87, *б*

Рис. 2. Розв'язання системи нерівностей (4)-(5) графічним методом

Множину Парето у вигляді перетину цих областей, де лежать раціональні розв'язки для протидіючих суб'єктів, зображено на рис. 3. Тут же показано оптимальні значення $\bar{x}_1^*$ і $\bar{x}_2^*$, за яких виконується умова (12).

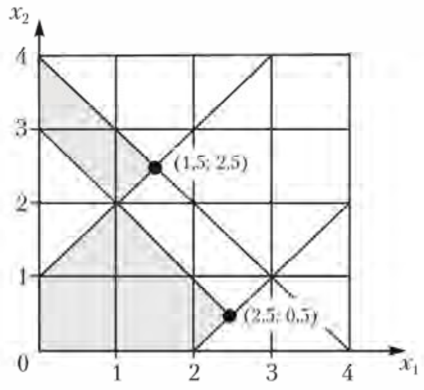


Рис. 3. Визначення множини Парето графічним методом

Висновки

Таким чином, за результатами проведеного дослідження у роботі визначено клас задач протидії двох сторін при конфлікті стратегій, що визначаються функціями двох змінних за наявності обмежень і додаткових умов, що забезпечують можливість: досягнення гарантованого результату при найгірших варіантах розвитку ситуації для сторони; досягнення максимально можливого результату при найгірших варіантах розвитку ситуації для сторони; досягнення найкращого результату для сторони при найбільш ймовірних варіантах поведінки протидіючої сторони. На основі аналізу існючих методів розв'язування подібних задач запропоновано підходи до вирішення досліджуваної задачі у всіх можливих описаних випадках реалізації специфічних умов.

Перспективою для подальших досліджень авторів є автоматизація описаних у роботі процедур.

Література

1. Нагель Э. Теорема Геделя / Є. Нагель, Дж. Р. Ньюман – Москва : Знание, 1970. – 63 с.
2. Згуровський М. З. Основи системного аналізу : підручик для вищих навчальних закладів / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова – Київ : Видавнича група BHV, 2007. – 544 с.
3. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. / Моисеев Н. Н. – Москва : Наука, 1981. – 488 с.
4. Вентцель Е. С. Исследование операций : задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель – Москва : Советское радио, 1972. – 552 с.
5. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці: навчальний посібник. / Боровик О.В., Боровик Л.В. – Київ : Центр учбової літератури, 2007. – 424 с.
6. Боровик О. В. Дослідження операцій в оперативно-службовій діяльності органів охорони державного кордону : підручник / Боровик О. В., Боровик Л. В. – Хмельницький : Видавництво Національної академії Державної прикордонної служби України імені Б. Хмельницького, 2009. – 444 с.
7. Боровик О.В. Вища математика: Диференціальне числення функції однієї і багатьох змінних. Частина 2 : навчальний посібник / Боровик О.В., Боровик Л.В., Матохнюк Л.О. – Хмельницький : Видавництво НАДПСУ, 2016. – 640 с.
8. Боровик О.В. Вища математика: Інтегральне числення. Частина 3 : навчальний посібник / Боровик О.В., Гащук І.В., Трасковецька Л.М. – Хмельницький : Видавництво НАДПСУ, 2016. – 630 с.

References

1. Nagel E. Teorema gedelya / E. Nagel, Dzh. R. Nyuman – Moskva; Znanie, 1970. – 63 s.
2. Zgurovs'kij M. Z. Osnovi sistemnogo analizu : pidruchik dlya vishhix navchal'nix zakladiv / M.Z. Zgurovs'kij, N.D. Pankratova – Kiïv: Vidavnicha grupa BHV, 2007. – 544 s.
3. Moiseev N. N. Matematicheskie zadachi sistemnogo analiza. / Moiseev N. N. – Moskva.: Nauka, 1981. – 488 s.
4. Ventcel' E. S. Issledovanie operacij : zadachi, principy', metodologiya / E. S. Ventcel' – Moskva: Sovetskoe radio, 1972. – 552 s.
5. Borovik O.V. Doslidzhennya operacij v ekonomici: Navchal'nij posibnik / Borovik O.V., Borovik L.V. – Kiïv: Centr uchbovoï literaturi, 2007. – 424 s.
6. Borovik O. V. Doslidzhennya operacij v operativno-sluzhbovij diyal'nosti organiv oxoroni derzhavnogo kordonu: pidruchnik / Borovik O. V., Borovik L. V. – Xmel'nic'kij: Vidavnictvo Nacional'noï akademiï Derzhavnoï prikordonnoï sluzhbi Ukraïni imeni B. Xmel'nic'kogo, 2009. – 444 s.
7. Borovik O.V. Vishha matematika: Diferencial'ne chislennya funkciï odnieï i bagat'ox zminnix. Chastina 2: navchal'nij posibnik / Borovik O.V., Borovik L.V., Matoxnyuk L.O. – Xmel'nic'kij: Vidavnictvo NADPSU, 2016. – 640 s.
8. Borovik O.V. Vishha matematika: Integral'ne chislennya. Chastina 3: navchal'nij posibnik / Borovik O.V., Gashhuk I.V., Traskovec'ka L.M. – Xmel'nic'kij: Vidavnictvo NADPSU, 2016. – 630 s.

Отримана/Received : 27.2.2018 р. Надрукована/Printed :26.3.2018 р.
Рецензент: д.т.н., проф. О.В. Поморова