

В.І. ЧУПРИНКА, Г.Ю. ЗЕЛІНСЬКИЙ, Н.В. ЧУПРИНКА
Київський національний університет технологій та дизайну

ЗГЛАДЖУВАННЯ ЗОВНІШНІХ КОНТУРІВ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ДУГ КІЛ

В роботі наведені результати досліджень зі згладжування ділянок на зовнішньому контурі плоского геометричного об'єкту за допомогою дуг кіл. На основі отриманих в роботі залежностей був розроблений алгоритм та програмне забезпечення для згладжування ділянок на зовнішньому контурі плоского геометричного об'єкту за допомогою дуг кіл, які можуть бути корисні в САПР виробів легкої промисловості.

Ключові слова: плоский геометричний об'єкт, дуга кола, згладжування.

V.I. CHUPRYNKA, G.YU. ZELINSKY, N.V. CHUPRYNKA
Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, Ukraine

SMOOTHING OF EXTERNAL CONTOURS OF FLAT GEOMETRICS FOR HELP ARCS OF CIRCLES

External contours of the details of light industry products in most cases have a complex configuration and cannot be described analytically. Therefore, we will approximate them. To do this, in most cases, the piecewise-linear method of approximation is used, because it is universal, suitable for any form of flat geometric objects, does not require a high amount of time with a manual approximation method, is easily automated. So, in this method of approximation the appearance of the external contour of a flat geometric object does not satisfy the designer. Therefore, it is necessary to smooth some areas in this contour. Hence the relevance of the problem of smoothing some sections on the external contour of a plane geometric object follows. The paper presents the results of researches on smoothing of sections on the external contour of a flat geometric object with the help of circles arcs. The algorithm for smoothing the area of the external contour of a flat geometric object can be represented as follows:

1. Select a section on the external contour of a flat geometric object, which must be smoothed out;

2. Conjugate each corner of the allocated section of the external contour of the plane geometric object with an arc of radius $R/2$, where R - is the maximum permissible radius of the arc of the conjugation for this angle;

3. Replace the selected section of the external contour of a flat geometric object with a sequence of conjugate arcs for angles.

The most difficult of the stages of smoothing area of the external contour of a flat geometric object is the conjugation of the angle with the arc of a given radius can be represented as follows:

1. Find a bisector of a given angle;

2. On the bisector of the angle, find the center of the conjugate arc of the maximum permissible radius R and value of this radius;

3. On the bisector of the angle, find the center of the conjugate arc of radius $R/2$;

4. Find the start and end angles for the conjugate arc of radius $R/2$;

5. Find the minimum number of vertices on the conjugate arc and their coordinates for approximating this arc with given accuracy.

On the basis of the dependences obtained in this work, an algorithm and software for smoothing sections on the external contour of a flat geometric object with the help of circles arcs were developed. They could be useful in the CAD of light industry products and in the learning process when studying courses with CAD / CAM / CAE systems of light industry.

Keywords: flat geometric object, circle arc, smoothing.

Вступ

Зовнішні контури деталей виробів легкої промисловості в більшості випадків мають складну конфігурацію і не можуть бути описані аналітично. Тому ми будемо їх апроксимувати. Для цього виберемо кусково-лінійний спосіб апроксимації, так як він є універсальним, тобто придатним до будь-якої форми плоских геометричних об'єктів, не потребує великих затрат часу при ручному способі апроксимації, легко автоматизується [1–6].

Крім того інформація при кусково-лінійному способі апроксимації піддається ущільненню, тобто відсів зайвих точок без втрат точності апроксимації.

Кусково-лінійна апроксимація являє собою заміну дійсного контуру плоского геометричного об'єкту відрізками прямих, причому відстань від відрізків до точок контуру не перевищує похибки апроксимації. Найбільше розповсюдження отримав кусково-лінійний спосіб апроксимації. При цьому способі апроксимації зовнішній контур плоского геометричного об'єкту апроксимується багатокутником. Довжина сторін багатокутника залежить від кривизни контуру і вибраної погрішності апроксимації. Сторони апроксимуючого багатокутника можуть бути дотичними до контуру деталі, січними, хордами. Проведені дослідження показали доцільність використання за сторони апроксимуючого багатокутника дотичні до зовнішнього контуру плоского геометричного об'єкту [1, 2]. Тому в подальшому будемо використовувати кусково-лінійну апроксимацію, при якій сторонами апроксимуючого багатокутника є дотичні (рис. 1).

Постановка завдання

Для кута заданого координатами вершин встановити залежності параметрів спряженої дуги від координат вершин цього кута. На основі встановлених залежностей розробити математичне та програмне забезпечення для згладжування ділянок на зовнішньому контурі плоского геометричного об'єкту за допомогою дуг кіл.

Основна частина

Нехай S – плоский геометричний об’єкт. Зв’яжемо з ним координатну систему XOY , де O – полюс деталі, обраний в будь-якій її внутрішній точці. Контур цього плоского геометричного об’єкту апроксимуємо ламаною дотичною лінією до зовнішнього контуру плоского геометричного об’єкту (рис. 1).

Будь-який плоского геометричного об’єкту S може бути представлений координатами вершин апроксимуючої ламаної лінії, тобто масивом $\{Xa_j, Ya_j\}, j=1..n$, а координати будь-якої точки на прямій між вершинами j та $j+1$ можна визначити наступним чином

$$X = Xa_j + (Xa_{j+1} - Xa_j)t$$

$$Y = Ya_j + (Ya_{j+1} - Ya_j)t$$

$$0 \leq t \leq 1; j = 1, 2..n$$

де j – порядковий номер відрізка між вершинами j та $j+1$;
 n – кількість точок апроксимації для плоского геометричного об’єкту S .

Так як апроксимуюча ламана не завжди задовольняє вимогам до відображення зовнішнього контуру плоского геометричного об’єкту (особливо при ручному способі апроксимації), то деякі ділянки контуру необхідно згладити. Для цього використаємо дуги кіл.

Алгоритм згладжування ділянки зовнішнього контуру плоского геометричного об’єкту можна представити наступним чином:

- 1) Виділимо ділянку $A_{i+1}..A_m..A_k$ зовнішнього контуру плоского геометричного об’єкту, яку необхідно згладити.
- 2) Спряжемо кожен кут $\angle A_{j-1}A_jA_{j+1}$ ($j=i+1, i+2..k-1$) виділеної ділянки зовнішнього контуру плоского геометричного об’єкту дугою радіусу $R_j = R_j/2$, де R_j – максимально допустимий радіус дуги спряження для цього кута.
- 3) Замінити виділену ділянку зовнішнього контуру плоского геометричного об’єкту послідовністю спряжених дуг для кутів $\angle A_{j-1}A_jA_{j+1}$ ($j=i+1, i+2..k-1$).

Більш детально розглянемо перший та другий пункти алгоритму.

Для виділення ділянки зовнішнього контуру плоского геометричного об’єкту, яку необхідно згладити необхідно ідентифікувати початкову та кінцеву вершини ділянки цього контуру. Нехай це буде контур $A_iA_{i+1}..k$ (рис. 1). Для ідентифікації початкової та кінцевої вершин необхідно підвести курсор до цих вершин і натиснути на кнопку миші. Вершина A_j ($j=1, 2, i, i+1..k..n$), що лежить найближче до курсору з координатами (Xc, Yc) і буде шуканою початковою (кінцевою) вершиною вибраної ділянки зовнішнього контуру плоского геометричного об’єкту (рис.1). Тоді задача пошуку початкової та кінцевої вершин зводиться до наступної: серед множини вершин A_j ($j=1, 2, i, i+1..k..n$) знайти ту вершину A_q , для якої справедливий наступний вираз:

$$\sqrt{(Xa_q - Xc)^2 + (Ya_q - Yc)^2} = \min_{j=1, 2..n} \left\{ \sqrt{(Xa_j - Xc)^2 + (Ya_j - Yc)^2} \right\}$$

Для того щоб спрягти кут $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ дугою заданого радіусу, необхідно виконати наступні етапи алгоритму(рис. 2):

1. Знайдемо довжину відрізків A_iA_{i-1} та A_iA_{i+1} .

$$|A_iA_{i-1}| = \sqrt{(Xa_i - Xa_{i-1})^2 + (Ya_i - Ya_{i-1})^2}$$

$$|A_iA_{i+1}| = \sqrt{(Xa_i - Xa_{i+1})^2 + (Ya_i - Ya_{i+1})^2}$$

2. Визначимо $D = \min\{|A_iA_{i-1}|, |A_iA_{i+1}|\}$.

3. Серед відрізків A_iA_{i-1} та A_iA_{i+1} на відрізку, довжина якого не дорівнює величині D від точки A_i відкладемо відрізок A_i довжиною D .

4. Знайдемо координати точки враховуючи те, що вектори A_iA_{i-1} (A_iA_{i+1}) та A_i паралельні та виходять із однієї точки A_i . Матимемо [7]:

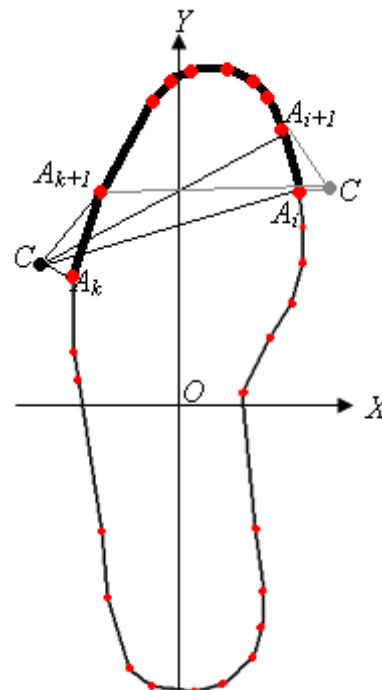


Рис. 1. Виділення ділянки на зовнішньому контурі плоского геометричного об’єкту, яку необхідно згладити

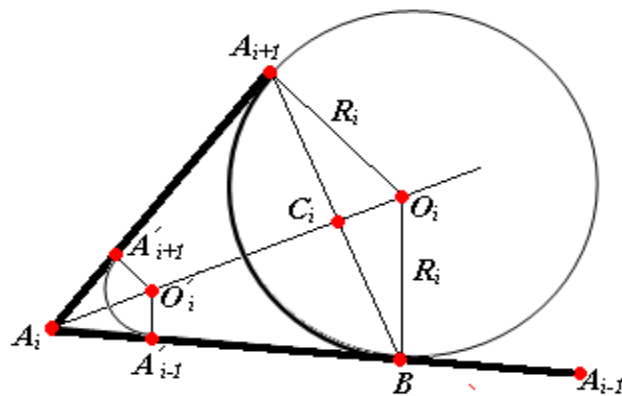


Рис. 2. Спряження кута дугою з радіусом R_i

) якщо $|A_i A_{i-1}| \geq |A_i A_{i+1}|$

$$X_b = X_{a_i} + \frac{D}{|A_i A_{i-1}|} \times (X_{a_{i-1}} - X_{a_i}) = X_{a_i} + \frac{D}{\sqrt{(X_{a_i} - X_{a_{i-1}})^2 + (Y_{a_i} - Y_{a_{i-1}})^2}} \times (X_{a_{i-1}} - X_{a_i})$$

$$Y_b = Y_{a_i} + \frac{D}{|A_i A_{i-1}|} \times (Y_{a_{i-1}} - Y_{a_i}) = Y_{a_i} + \frac{D}{\sqrt{(X_{a_i} - X_{a_{i-1}})^2 + (Y_{a_i} - Y_{a_{i-1}})^2}} \times (Y_{a_{i-1}} - Y_{a_i})$$

) інакше

$$X_b = X_{a_i} + \frac{D}{|A_i A_{i+1}|} \times (X_{a_{i+1}} - X_{a_i}) = X_{a_i} + \frac{D}{\sqrt{(X_{a_i} - X_{a_{i+1}})^2 + (Y_{a_i} - Y_{a_{i+1}})^2}} \times (X_{a_{i+1}} - X_{a_i})$$

$$Y_b = Y_{a_i} + \frac{D}{|A_i A_{i+1}|} \times (Y_{a_{i+1}} - Y_{a_i}) = Y_{a_i} + \frac{D}{\sqrt{(X_{a_i} - X_{a_{i+1}})^2 + (Y_{a_i} - Y_{a_{i+1}})^2}} \times (Y_{a_{i+1}} - Y_{a_i})$$

5. Знайдемо координати точки (X_c, Y_c) , що є серединою відрізка $A_i C_i$ ($A_i B$).

) якщо $|A_i A_{i-1}| \geq |A_i A_{i+1}|$

$$X_{c_i} = \frac{X_{i+1} + X_b}{2}$$

$$Y_{c_i} = \frac{Y_{i+1} + Y_b}{2}$$

) інакше

$$X_{c_i} = \frac{X_{i-1} + X_b}{2}$$

$$Y_{c_i} = \frac{Y_{i-1} + Y_b}{2}$$

6) Знайдемо довжину відрізків $A_i C_i$ та $B C_i$:

$$|A_i C_i| = \sqrt{(X_{a_i} - X_{c_i})^2 + (Y_{a_i} - Y_{c_i})^2}$$

$$|B C_i| = \sqrt{(X_b - X_{c_i})^2 + (Y_b - Y_{c_i})^2}$$

7) Знайдемо максимально допустимий радіус R_i дуги спряження для кута $\angle A_i A_i A_{i+1}$. З подоби трикутників $\Delta A_i B C_i$ та $\Delta A_i B O_i$ матимемо:

$$R_i = \frac{D \times |C_i B|}{|A_i C_i|}$$

8) Знайдемо довжину відрізка $A_i O_i$. $A_i O_i$ є гіпотенузою прямокутного трикутника $\Delta A_i B C_i$. Тоді:

$$|A_i O_i| = \sqrt{D^2 + R_i^2}$$

9) Знайдемо координати точки (X, Y) , що є центром дуги спряження з максимально допустимим радіусом R_i . Враховуючи те, що вектори $A_i O_i$ та $A_i C_i$ паралельні та виходять із однієї точки A_i , матимемо [7]:

$$Xo_i = Xa_i + \frac{|A_i O_i|}{|A_i A_{i-1}|} \times (Xc_i - Xa_i)$$

$$Yo_i = Ya_i + \frac{|A_i O_i|}{|A_i A_{i-1}|} \times (Yc_i - Ya_i)$$

10) Задаємо значення радіуса $R'_i \leq R_i$ шуканої спряженої дуги для кута $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$.
 11) Знайдемо довжини відріжків $|A_i O'_i|$ та $|A_i B|$. З подоби трикутників $\Delta A_i O'_i B$ та $\Delta A_i B O_i$ матимемо:

$$|A_i O'_i| = \frac{R'_i}{R_i} \times |A_i O_i|$$

$$|A_i A'_{i-1}| = |A_i A'_{i+1}| = \frac{R'_i}{R_i} \times |A_i B| = \frac{R'_i}{R_i} \times D$$

12) Знайдемо координати точки (X', Y') , що є центром дуги спряження з радіусом R'_i . Враховуючи те, що вектори $A_i O'_i$ та $A_i B$ паралельні та виходять із однієї точки A_i матимемо:

$$Xo'_i = Xa_i + \frac{|A_i O'_i|}{|A_i O_i|} \times (Xo_i - Xa_i)$$

$$Yo'_i = Ya_i + \frac{|A_i O'_i|}{|A_i O_i|} \times (Yo_i - Ya_i)$$

13) Знайдемо координати точок (X'_{-1}, Y'_{-1}) та (X'_{+1}, Y'_{+1}) , що є точками дотику з шуканої дуги спряження з кутом $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$. Враховуючи те, що вектори $A_i O'_{i-1}$ та $A_i O'_{i+1}$ ($A_i O'_{i-1}$ та $A_i O'_{i+1}$) паралельні та виходять із однієї точки A_i , матимемо:

) якщо $|A_i A_{i-1}| \geq |A_i A_{i+1}|$

$$Xa'_{i-1} = Xa_i + \frac{|A_i A'_{i-1}|}{D} \times (Xb - Xa_i)$$

$$Ya'_{i-1} = Ya_i + \frac{|A_i A'_{i-1}|}{D} \times (Yb - Ya_i)$$

$$Xa'_{i+1} = Xa_i + \frac{|A_i A'_{i+1}|}{D} \times (Xa_{i+1} - Xa_i)$$

$$Ya'_{i+1} = Ya_i + \frac{|A_i A'_{i+1}|}{D} \times (Ya_{i+1} - Ya_i)$$

) інакше

$$Xa'_{i+1} = Xa_i + \frac{|A_i A'_{i+1}|}{D} \times (Xb - Xa_i)$$

$$Ya'_{i+1} = Ya_i + \frac{|A_i A'_{i+1}|}{D} \times (Yb - Ya_i)$$

$$Xa'_{i-1} = Xa_i + \frac{|A_i A'_{i-1}|}{D} \times (Xa_{i-1} - Xa_i)$$

$$Ya'_{i-1} = Ya_i + \frac{|A_i A'_{i-1}|}{D} \times (Ya_{i-1} - Ya_i)$$

14) Визначаємо початковий φ_1 та кінцевий φ_2 кути для шуканої спряженої дуги (рис. 3.а). Для цього знайдемо $\sin \varphi_1$, $\sin \varphi_2$ та $\cos \varphi_1$, $\cos \varphi_2$ [8]:

$$\sin \varphi_1 = \frac{Ya'_{i-1} - Ya_i}{R'_i}; \quad \cos \varphi_1 = \frac{Xa'_{i-1} - Xa_i}{R'_i};$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{Ya'_{i+1} - Ya_i}{R'_i}; \quad \cos \varphi_2 = \frac{Xa'_{i+1} - Xa_i}{R'_i}.$$

Знаючи $\sin \varphi_1$, $\sin \varphi_2$ та $\cos \varphi_1$, $\cos \varphi_2$ легко обчислити початковий φ_1 та кінцевий φ_2 кути для

шуканої спряженої дуги.

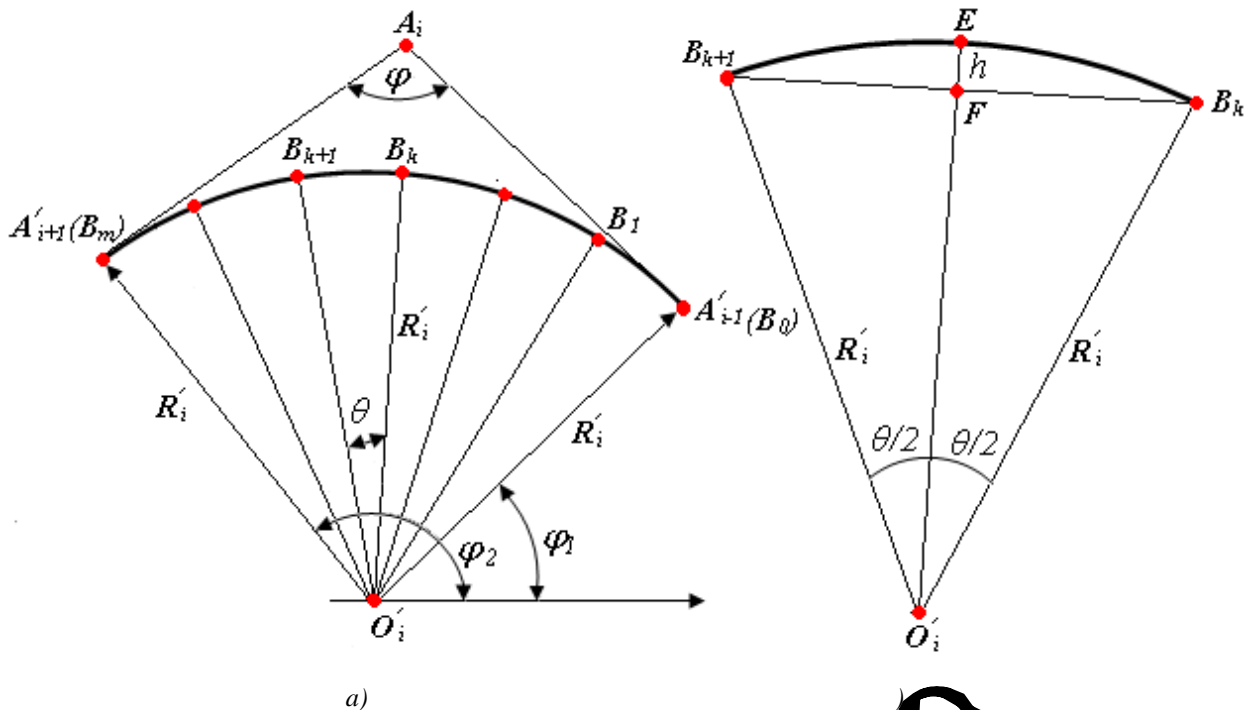


Рис. 3. Апроксимація дуги багатокутником із заданою точністю ϵ

15) Так як шукану спряжену дугу ми будемо апроксимувати у вигляді ломаної лінії $0 \dots +1 \dots m$, то необхідно визначити координати вершин цієї лінії. Вони визначаються наступним чином:

$$Xb_j = Xa_j + R_i' \times \cos(\varphi_1 + \theta \times j)$$

$$Yb_j = Ya_j + R_i' \times \sin(\varphi_1 + \theta \times j), \text{ де } j=0, 1..m \text{ та } \theta = |\varphi_2 - \varphi_1|/m.$$

16) Для апроксимації дуги кола ломаною лінією необхідно визначити оптимальну вершин цієї ломаної, тобто щоб дуга апроксимувалась із заданою точністю ϵ . Тому кількість сторін m ломаної лінії $0 \dots +1 \dots m$ визначимо із умови, що ця ломана лінія буде апроксимувати шукану спряжену дугу із заданою точністю ϵ . Для цього необхідно, щоб виконувалась наступна умова: $h \leq \epsilon$ (рис. 3.б). Очевидно, що $h = R_i' - R_i' \cdot \cos(\theta/2) \leq \epsilon$. Тоді

$$\cos(\theta/2) \leq \frac{R_i' - \epsilon}{R_i'} \text{ або } \cos(|\varphi_2 - \varphi_1|/2m) \leq \frac{R_i' - \epsilon}{R_i'}$$

Звідси отримаємо:

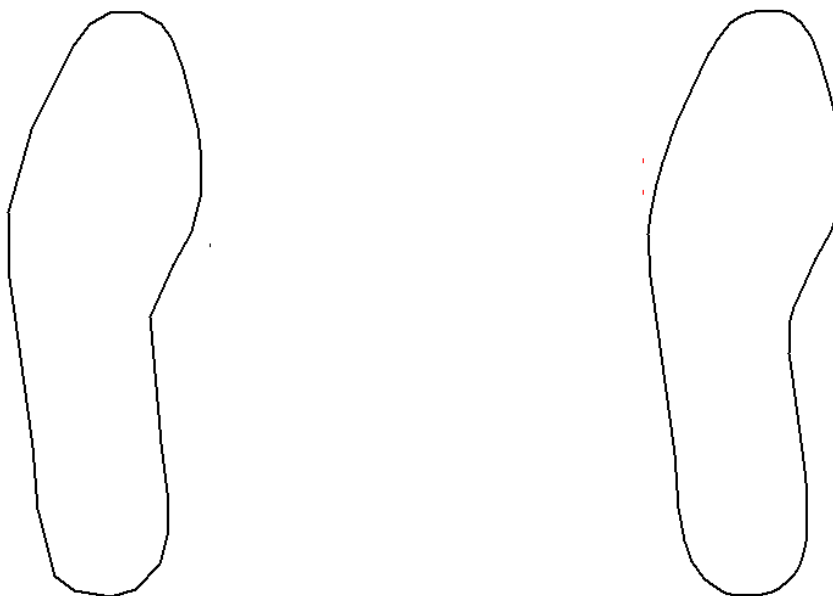
$$m \geq \frac{|\varphi_2 - \varphi_1|}{2 \arccos\left(\frac{R_i' - \epsilon}{R_i'}\right)}$$

Запропонований вище алгоритм згладжування ділянок на зовнішньому контурі був реалізований в програмний модуль для згладжування ділянок на зовнішньому контурі плоского геометричного об'єкту за допомогою дуг кіл. Цей програмний модуль був впроваджений в навчальний процес при вивченні дисципліни «CAD/CAM/CAE системи легкої промисловості».

Приклад згладжування зовнішнього контуру плоского геометричного об'єкту за допомогою цього модуля представлений на рис. 4.

Висновки

На основі отриманих в роботі залежностей були розроблені алгоритм та програмний модуль для згладжування зовнішніх контурів плоских геометричних об'єктів за допомогою дуг кіл. Ці алгоритм та програмний модуль можуть бути корисними при розробці різних CAD/CAM/CAE легкої промисловості та в навчальному процесі при вивченні дисциплін пов'язаних з проектуванням виробів легкої промисловості.



а) Вихідна кусково-лінійна апроксимація зовнішнього контуру плоского геометричного об'єкту

б) Кусково-лінійна апроксимація зовнішнього контуру плоского геометричного об'єкту після згладжування за допомогою дуг кіл

Рис. 4. Апроксимація зовнішнього контуру плоского геометричного об'єкту

Література

1. Глинер М.И. Алгоритмы линейно-круговой аппроксимации / М.И. Глинер, С.М. Гончаров, Е.А. Смирнов // Известия ВУЗов. Технология легкой промышленности. – 1974. – № 2. – С. 79–82.
2. Глинер М.И. Об одном алгоритме аппроксимации контуров швейных лекал / М.И. Глинер, Е.А. Смирнов // Известия ВУЗов. Технология легкой промышленности. – 1976. – № 4. – С. 98–99.
3. Омельченко П.В. Разработка метода автоматизированного проектирования чехлов для мобильных телефонов / П.В. Омельченко, В.П. Коновал, В.И. Чупринка // Актуальные проблемы науки, техники и экономики производства изделий из кожи. – Витебск : ВГТУ, 2004. – С. 131–132.
4. Каган В.М. К вопросу аппроксимации контура подошвы // Известия ВУЗов. Технология легкой промышленности. – 1974. – № 2. – С. 34–38.
5. Храмова Е.П. Об алгоритме аппроксимации контуров деталей швейных изделий // Известия ВУЗов. Технология легкой промышленности. – 1978. – № 1. – С. 95–99.
6. Акулов В.Г. Цифровое описание обувных шаблонов в полярных координатах / В.Г. Акулов, Л.Н. Плужников // Известия ВУЗов. Технология легкой промышленности. – 1982. – № 2. – С. 90–93.
7. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике / Фильчаков П.Ф. – К. : Наукова думка, 1973. – 744 с.
8. Выгоцкий В.М. Справочник по высшей математике / Выгоцкий В.М. – М. : Наука, 1980. – 277 с.

References

1. Gliner M.I. Algoritmy lineynno-krugovoy approksimatsii / M.I. Gliner, S.M. Goncharov, E.A. Smirnov // Izvestiya VUZov. Tehnologiya legkoy promyishlennosti. – 1974. – № 2. – S. 79–82.
2. Gliner M.I. Ob odnom algoritme approksimatsii konturov shveynykh lekal / M.I. Gliner, E.A. Smirnov // Izvestiya VUZov. Tehnologiya legkoy promyishlennosti. – 1976. – № 4. – S. 98–99.
3. Omelchenko P.V. Razrabotka metoda avtomatizirovannogo proektirovaniya chehlov dlya mobilnykh telefonov / P.V. Omelchenko, V.P. Konoval, V.I. Chuprinka // Aktualnyye problemy nauki, tehniki i ekonomiki proizvodstva izdeliy iz koji. – Vitebsk : VGTU, 2004. – S. 131–132.
4. Kagan V.M. K voprosu approksimatsii kontura podoshvy // Izvestiya VUZov. Tehnologiya legkoy promyishlennosti. – 1974. – № 2. – S. 34–38.
5. Hramtsova E.P. Ob algoritme approksimatsii konturov detaley shveynykh izdeliy // Izvestiya VUZov. Tehnologiya legkoy promyishlennosti. – 1978. – № 1. – S. 95–99.
6. Akulov V.G. TSifrovoe opisanie obuvnykh shablonov v polyarnykh koordinatah / V.G. Akulov, L.N. Plujnikov // Izvestiya VUZov. Tehnologiya legkoy promyishlennosti. – 1982. – № 2. – S. 90–93.
7. Filchakov P.F. Spravochnik po vyisshey matematike / Filchakov P.F. – K. : Naukova dumka, 1973. – 744 s.
8. Vyigotskiy V.M. Spravochnik po vyisshey matematike / Vyigotskiy V.M. – M. : Nauka, 1980. – 277 s.

Рецензія/Peer review : 18.04.2018 р.

Надрукована/Printed : 18.05.2018 р.
Рецензент: д.т.н., проф. В.П. Коновал