УДК 681.513

О.О. БРОВАРЕЦЬ
Київський кооперативний інститут бізнесу і права

ЙМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ ЗОН ВАРІАБЕЛЬНОСТІ АГРОБІОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ УГІДЬ ДЛЯ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАЛЕЖНОЇ ЯКОСТІ ВИКОНАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОПЕРАЦІЙ У РОСЛИННИЦТВІ НА ОСНОВІ ДАНИХ ЛОКАЛЬНОГО ОПЕРАТИВНОГО МОНІТОРИНГУ

Методика виділення зон варіабельності агробіологічного стану сільськогосподарських угідь як основа ефективного використання технологій точного землеробства призначена для використання у галузі сільськогосподарського господарства і може бути використана в сучасний технологіях сільськогосподарського виробництва, технологіях точного землеробства, безпосередньо у рослинництві, загальному землеробстві і призначена для підвищення достовірності визначення агрохімічного стану ґрунтового середовища при оперативному агрохімічному обстеженні ґрунтів шляхом моніторингу агробіологічного стану ґрунтового середовища сільськогосподарських угідь, зокрема відбору проб ґрунту, оперативного визначення потенційної родючості ґрунтів для застосування технологій диференційованого локально-дозованого внесення технологічного матеріалу (добрив, насіння тощо), а також може бути застосована при виконанні агрохімічного обстеження ґрунтів власниками земель та землекористувачами. Сьогодні при впровадженні сучасних технологій сільськогосподарського виробництва, зокрема диференційованого внесення технологічного матеріалу (насіння, добрив тощо) не вистачає інформації про зони та величину зон варіабельності агробіологічних праматерів сільськогосподарських угідь, володіння якими дозволяє отримати достовірну інформацію вірно скорегувавши точки відбору проб, виділити зони внесення технологічного матеріалу тощо. Так, наприклад, при відборі зразків ґрунтових проб. Як правило, на поле накладають сітку розмірами від 2 до 20 га, яка ув'язана з геометрією поля, контурами, рельєфом тощо. Проте вона не ув'язана з агробіологічними параметрами сільськогосподарських угідь та не має жодного відношення до величини їх варіабельності. Це накладає відбиток на достовірність отриманих даних, а відповідно і ефективність реалізації сучасних технологій землеробства, такий як диференційоване внесення технологічного матеріалу як в системі точного землеробства, так і окремо.

Ключові слова: *точне землеробство, варіабельність, агробіологічний стан.*

O.O. BROVARETS
Kyiv Cooperative Institute of Business and Law

PROBABILISTIC AND STATISTICAL METHODS DETERMINATION OF AGROBIOLOGICAL ZONES VARIABILITY PARAMETERS FARMLAND TO ENSURE PROPER QUALITY OF PERFORMANCE OF MANUFACTURING OPERATIONS IN PLANT BASED LOCAL OPERATIONAL MONITORING

The method of allocating zones of variability of the agrobiological state of agricultural lands - as the basis of the effective use of precision farming technologies, is intended for use in agriculture and can be used in modern agricultural technology technologies, precision agriculture technologies, directly in crop production, general agriculture and is intended to increase the reliability of the definition Agrochemical state of the soil environment under operational agrochemical soil survey by monitoring the agrobiological state of the soil environment of agricultural lands, in particular soil sampling, the operative determination of the potential fertility of soils for the application of technologies of differentiated locally-dosed introduction of technological material (fertilizers, seeds, etc.), and can also be applied when performing agrochemical soil surveys by land owners and land users. Today, when introducing modern technologies of agricultural production, in particular, the differentiated introduction of technological material (seeds, fertilizers, etc.), there is insufficient information about the zone and the magnitude of the zones of variability of agrobiological primates of agricultural lands, the possession of which allows obtaining reliable information by correcting the sampling points, allocating the zone of introduction of technological material etc. So for example, when sampling ground samples. As a rule, a grid of 2 to 20 hectares is imposed on the field, which is connected with the geometry of the field, contours, relief, and the like. However, it is not related to the agrobiological parameters of agricultural land and has nothing to do with the magnitude of their variability. This imposes an imprint on the reliability of the data obtained, and, accordingly, the efficiency of the implementation of modern agricultural technologies, such as the differentiated introduction of technological material in the system of precision agriculture and separately.

Key words: *precision agriculture, variability, agrobiological condition.*

Постановка проблеми. Огляд сучасних літературних джерел та наукових розробок [1] показує, що останніми роками відбувається процес інтеграції натурального (органічного або біологічного), біодинамічного, екстенсивного, інтенсивного (промислового) та no-till землеробства з новітніми технологіями, зокрема з інформаційно-технічними системами оперативного моніторингу стану сільськогосподарських угідь. При цьому останній напрям є найбільш актуальним та перспективним для умов України.

Один з головних підходів при застосуванні сучасних технологій землеробства – оптимізувати урожайність і забезпечити екологічну якість сільськогосподарської продукції із врахуванням варіабельності зон управління сільськогосподарським полем (рис. 1). Знання певної структура варіабельності ґрунтового покриву дозволяє прийняти ефективні рішення для управління агробіологічним потенціалом сільськогосподарських угідь [1–17].

Таким чином, схема сучасного управління агробіологічним потенціалом сільськогосподарського агропідприємства (рис. 1) передбачає наявності загальних елементів: склад технологічних матеріалів, виробництво та склад нафтопродуктів та сільськогосподарських підприємств та новітніх елементів для ефективного функціонування сільськогосподарського виробництва шляхом підвищення якості виконання технологічних операцій.

Точне землеробство передбачає виконання [1, 2, 3, 7] кожної технологічної операції згідно відповідної картограми, яка розробляється попередньо на основі різнопланової інформації. Загальну схему реалізації точного землеробства наведено на рис. 1.

Рис. 1. Схема сучасного управління агробіологічним потенціалом агропідриємством

Закономірним за сучасних умов розвитку техніки та ринкових відносин, що характеризуються розвитком інформаційних технологій і неухильним зростанням цін на енергоносії, є використання нових технологій для моніторингу, застосування яких дає можливість одержувати значний економічний ефект завдяки оптимальному використанню виробничих засобів і технологічних процесів. Невід'ємною складовою сучасного сільського господарства є моніторинг агробіологічного та фітосанітарного стану сільськогосподарських угідь перед сівбою, протягом вегетації та при збиранні врожаю (рис. 2).

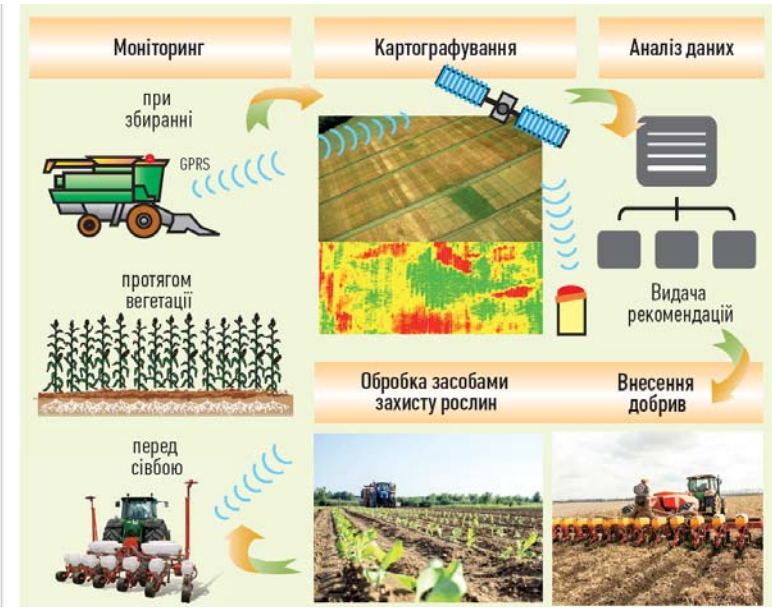


Рис. 2. Схема реалізації сучасних технологій землеробства

Аналіз публікацій по темі дослідження. Сьогодні при впровадженні сучасних технологій сільськогосподарського виробництва, зокрема диференційованого внесення технологічного матеріалу (насіння, добрив тощо) не вистачає інформації про зони та величину зон варіабельності агробіологічних праматерів сільськогосподарських угідь, володіння якими дозволяє отримати достовірну інформацію вірно скорегувавши точки відбору проб, виділити зони внесення технологічного матеріалу тощо.

Так на приклад, при відборі зразків ґрунтових проб. Як правило, на поле накладають сітку розмірами від 2 до 20 га, яка ув'язана з геометрією поля, контурами, рельєфом тощо. Проте вона не ув'язана з агробіологічними параметрами сільськогосподарських угідь та не має жодного відношення до величини їх варіабельності. Це накладає відбиток на достовірність отриманих даних, а відповідно і ефективність реалізації сучасних технологій землеробства, такий як диференційоване внесення технологічного матеріалу як в системі точного землеробства так і окремо [1–17].

Мета досліджень є відображення ймовірнісно-статистичних методів визначення величини зон варіабельності агробіологічних параметрів сільськогосподарських угідь для забезпечення належної якості виконання технологічних операцій у рослинництві на основі даних локального оперативного моніторингу.

Виклад основного змісту дослідження. У зв'язку з цим виникає необхідність у розробці методики визначення величини зон варіабельності агробіологічних параметрів сільськогосподарських угідь для забезпеченні належної якості виконання технологічних операцій у рослинництві. Це дає можливість підвищити достовірність отриманих даних, а відповідно і ефективність впровадження сучасних технологій сільськогосподарського виробництва.

Виділення таких зон можливо з врахування величини варіабельності цих показників по трьох рівнях:

1. Дані дистанційного моніторингу агробіологічних параметрів сільськогосподарських угідь на основі даних супутникового моніторингу або з використанням дронів X_1 X_1.

2. Моніторингу урожайності, а відповідно і рельєфу поля X_2.

3. Дані отриманні з використанням пристрою моніторингу електропровідних характеристик ґрунтового середовища X_3.

Кожен із цих даних може бути використаний окремо X_1, X_2, X_3 або у комплексі із коефіцієнтами вагомості впливу на кінцевий коефіцієнт зон варіабельності X_3:

$$X_3 = K_1 \cdot X_1 + K_2 \cdot X_2 + K_3 \cdot X_3 \, X_3 = k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot X_2 + k_3 \cdot X_3, \tag{1}$$

де K_1, K_2, K_3 – коефіцієнти вагомості кожного показника, при визначенні зон варіабельності.

Такі дані будуть актуальні при роботі із рівнями варіювання, які до речі не регламентовані нормативними документами та стандартами.

Для цього спочатку отримані дані довільно з рівними інтервалами потрібно розбити на рівних частин. Рекомендовано 5 рівнів.

Далі маємо візуально оцінити закон по якому закону такі дані можемо апроксимувати.

Як правило дані по трьох рівнях підлягають нормальному закону розподілу.

У цьому випадку їх доцільно розбити на 3 або 6 рівні, залежно величини σ^2. У випадку $\sigma^2 > 1$ доцільно виділяти три зони варіабельності. У випадку $\sigma^2 < 1$ доцільно виділяти 6 зон варіабельності

Також ці дані залежать від математичного сподівання. У нашому випадку приймаємо $\mu = 0$.

При $\mu < 0$. Математичне сподівання встановлює пріоритет величини показників, залежно від яких може зміщуватися крива розподілу випадкових величини.

Математичне сподівання, середнє значення – одна з основних числових характеристик кожної випадкової величини. Воно є узагальненим поняттям середнього значення сукупності чисел на той випадок, коли елементи множини значень цієї сукупності мають різну "вагу", ціну, важливість, пріоритет, що є характерним для значень випадкової змінної [1].

Контроль якості виконання технологічних операцій у рослинництві базується на виконанні вимірювань. Наприклад, для оцінки якості виконання оранки необхідно зробити певну кількість вимірів глибини обробітку ґрунту, для оцінки якості виконання сівби-певну кількість вимірів глибини загортання насіння у ґрунт і величини відхилення рослин від осьової лінії рядка тощо. В усіх цих випадках в результаті виконання вимірювань одержують масиви (тобто велику кількість) значень глибини обробітку ґрунту, глибини загортання насіння у ґрунт і величини відхилення рослин від осьової лінії рядка.

Аналіз цих масивів показує, що їх окремі значення відрізняються одне від одного. Наприклад, можемо мати такий масив даних глибини обробітку ґрунту (см) у порядку виконання вимірювань: 25; 26,3; 24,5; 25; 27,2; 25,8; 27,2 і т.д. Результати вимірювань вказують на наявність відхилень фактичної глибини обробітку ґрунту від заданої(наприклад, 25 см), які, в свою чергу, можуть бути обумовлені рядом факторів, таких як нерівності поверхні ґрунту, різна щільність і вологість ґрунту по напрямку руху орного агрегату і т.д. Виконуючи вимірювання глибини обробітку ґрунту, кожного разу отримують її значення, наперед невідомо, яке саме. Тобто глибина обробітку ґрунту є випадковою величиною.

Переважна більшість процесів і явищ у сільськогосподарському виробництві мають своїми характеристиками саме випадкові величини. Наприклад: 1 – кількість стебел пшениці на 1 м^2 поля, 2 – вага коренеплоду цукрового буряка, 3 – глибина загортання насінин у ґрунт при сівбі, 4 – кількість відказів у роботі трактора протягом року.

Випадкові величини у прикладах 1 і 4 є дискретними, тобто такими, які набувають тільки відділених одне від одного значень. Випадкові величини у прикладах 2 і 3 є безперервними, тобто такими, можливі значення яких безперервно заповнюють деякий проміжок.

При дослідженні процесу чи явища, характеристикою якого є випадкова величина, важливо знати (або встановити) закон її розподілу. *Законом розподілу випадкової величини* називається всяке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини А- a_1, a_2, ... , a_n і відповідними їм ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$. Найпростішою формою представлення такого закону є таблиця:

a_i	a_1	a_2	…	a_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Така таблиця називається рядом розподілу випадкової величини А.

Ряд розподілу існує тільки для дискретних величин. Для характеристики безперервних величин застосовується функція розподілу F(x). Похідна від функції розподілу f(x)=F`(x) характеризує щільність, з якою розподіляються значення випадкової величини в даній точці, і називається щільністю розподілу або щільністю імовірності. Щільність розподілу є одна з форм закону розподілу, а крива f(x) називається кривою розподілу.

1. Числові характеристики випадкових величин.

Одними з основних числових характеристик випадкових величин є середнє значення і середнє квадратичне, або стандартне відхилення.

Середнє значення є характеристикою положення випадкової величини на числовій осі, тобто вказує деяке середнє, орієнтовне значення, навколо якого групуються всі можливі значення випадкової величини.

Воно обчислюється як

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad (2)$$

де $x_1,\dots,x_n$ – значення випадкової величини,

n – кількість значень випадкової величини

Середнє квадратичне відхилення є характеристикою ступеня розсіювання значень випадкової величини навколо її середнього значення.

Воно обчислюється як

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \quad (3)$$

де x_i – поточні значення випадкової величини

Середнє значення і середнє квадратичне відхилення мають розмірність відповідної випадкової величини.

Безрозмірною характеристикою ступеня розсіювання значень випадкової величини навколо її середнього значення є коефіцієнт варіації, який обчислюється за формулою:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% \quad (4)$$

***2.* Нормальний закон розподілу випадкових величин.**

Нормальний закон розподілу випадкових величин-це закон, який найбільш часто зустрічається на практиці. Головна його особливість в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу.

Крива нормального закону розподілу (рис. 3) симетрична відносно середнього значення $\bar{x}$, а її положення на осі абсцис визначається величиною середнього значення. Форма кривої нормального закону розподілу визначається величиною середнього квадратичного відхилення σ.

Нормальний закон розподілу характеризується наступною закономірністю: практично всі, а саме 99,73%, значення випадкової величини, яка підлягає нормальному закону розподілу, знаходяться в інтервалі $\bar{x} \pm 3\sigma$. Ця закономірність називається правилом 3σ.

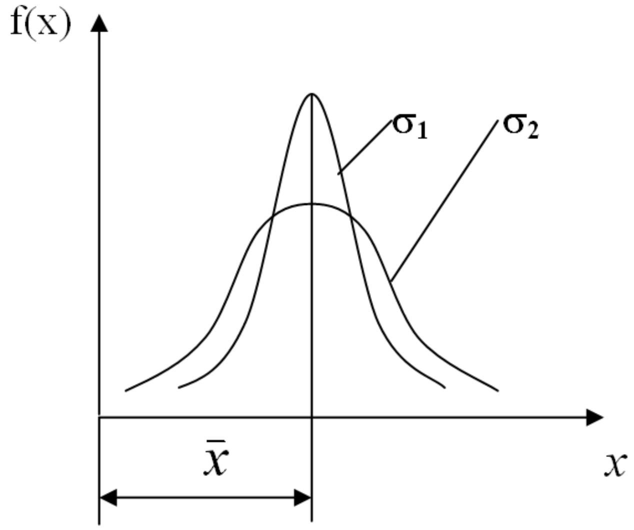


Рис. 3. Криві нормального закону розподілу випадкової величини σ2 > σ1

Правило 3σ знаходить застосування при вирішенні практичних задач. Наприклад, при аналізі результатів вимірювань випадкової величини може трапитись ситуація, коли поряд з близькими значеннями вимірів трапляється значення, яке суттєво відрізняється від інших. В цьому випадку виникає питання: ″Враховувати значення, яке суттєво відрізняється, в подальшому аналізі результатів вимірювань, чи знехтувати ним?″

Таке питання вирішується наступним чином. Маючи на увазі, що результати вимірювань мають нормальний закон розподілу (для перевірки, чи це дійсно так, існують спеціальні методи), визначають значення $\overline{x}$ і σ випадкової величини без врахування значення, яке суттєво відрізняється. Далі, за обчисленими значеннями будують інтервал $\overline{x} \pm 3\sigma$. Якщо значення, яке суттєво відрізняється, потрапляє в цей інтервал, то його приймають для подальших розрахунків, а якщо виходить за межі інтервалу-то ним нехтують.

За даними варіанту обчислити значення $\overline{x}$ і σ (без урахування значення, яке суттєво відрізняється).

3. Точність розмірів.

В результаті виникнення похибок при обробці дійсні розміри деталей однієї партії різняться між собою, тобто відбувається розсіювання розмірів.

Оскільки діє велика кількість факторів, які не піддаються регулюванню, тому при виготовленні чи відновленні великих партій однакових деталей оцінка точності виготовлення може провадитись з використанням положень теорії ймовірності і математичної статистики.

Похибки можуть бути систематичні, випадкові й грубі (промашки).

Систематичні похибки сталі за значенням і знаком або закономірно змінні.

Джерелом систематичних похибок можуть бути неправильне настроювання верстата, спрацювання та неточність вимірювального інструмента, непрямолінійність напрямних верстата, неточність мірного інструмента тощо.

Значення та знак систематичної похибки заздалегідь можна передбачити і врахувати у тих випадках, коли її неможливо усунути.

Випадкові похибки нестали за значенням і знаком. Передбачити заздалегідь їх значення і знак неможливо, тому що вони не підпорядковані будь-якій закономірності. Джерелом випадкових похибок є пружкі й температурні деформації системи верстат — пристосування — інструмент — деталь, неоднорідність механічних властивостей матеріалів, значення припуску тощо. Оцінити їх можна тільки методами теорії ймовірності.

Грубі похибки виникають при допущених грубих помилках, а саме: попадання стружки під встановлену деталь та при вимірюванні, помилки при відліку поділок на лімбі, вимірювальному інструменті.

Запобігти похибкам обробки неможливо, тому при виготовленні чи відновленні деталей відхилення геометричних параметрів від заданих обмежують, забезпечуючи більшу чи меншу точність обробки.

Точність розміру визначається встановленим допуском на обробку.

Точність партії деталей може характеризуватися величинами, які використовуються в теорії математичної статистики.

Велика кількість факторів та їх неоднаковий вплив призводить до того, що значення і знак похибки виготовлення чи вимірювання заздалегідь передбачити неможливо, тобто похибка є випадковою величиною*. Тому для аналізу похибок обробки чи вимірювання використовують положення теорії ймовірності і математичної статистики. Наявність похибок обробки чи вимірювання призводить до розсіювання розмірів в партії деталей чи результатів вимірювання.

4. Статистичні параметри розсіювання.

Аналіз випадкових величин можна виконувати тільки тоді, коли є масив експериментальних даних, представлених таблицею чи графічно у вигляді гістограми чи полігона розсіювання [17].

При побудові гістограми по осі абсцис відкладають розмір, а по осі ординат — відносну частоту:

$$\omega = \frac{n_{xi}}{N} \tag{5}$$

де n_{xi} — частота чи кількість розмірів, які потрапляють в один і той же інтервал; N — загальна кількість розмірів (рис. 4).

Сума прямокутників, шириною яких є прийнятий інтервал розмірів, а висотою відносна частота ω, і є гістограмою [17].

Якщо середини верхньої частинки прямокутників з'єднати прямими лініями, то одержимо ламану лінію, яка є емпіричною кривою розсіювання розмірів, чи полігоном розсіювання. Гістограма і полігон дають наочне уявлення про характер розсіювання випадкової величини (в нашому випадку розміру).

Якби була можливість збільшувати n, то при $n \to \infty$ полігон перетворився б на криву щільності розсіювання ймовірності p_x, описаної одним із теоретичних законів розсіювання.

На гістограмі чи полігоні розсіювання площа в межах інтервалу дорівнює відносній частоті, а на теоретичній кривій — ймовірність появи розміру в даному інтервалі [17].

Закон великих чисел говорить: з ймовірністю, близькою до достовірної, можна стверджувати, що при достатньо великій кількості дослідів частота спостерігаючої події може як завгодно мало відрізнятися від її ймовірності [17].

Виходячи із цього, для практичних розрахунків використовують теоретичні криві розсіювання, одержані апроксимацією гістограм чи емпіричних кривих розсіювання.

Для апроксимації існує ряд теоретичних законів розсіювання.

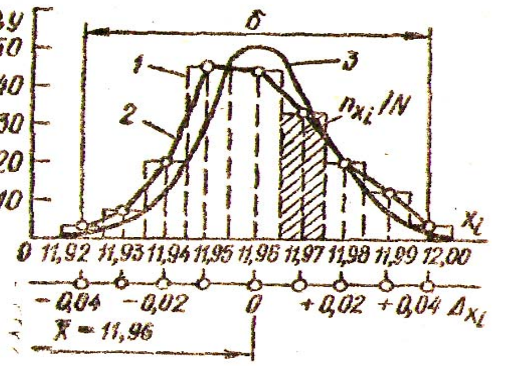


Рис. 4. Гістограма (1), полігон і теоретична крива розсіювання (3)

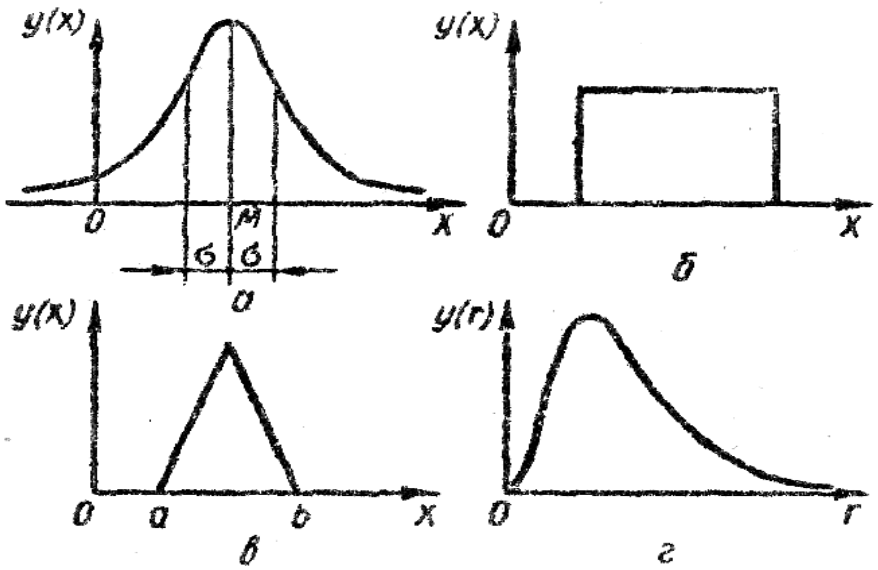


Рис. 5. Закон розсіювання випадкових величин: а — закон нормального розсіювання; б — закон рівної ймовірності; в — закон рівнобедреного трикутника; г — закон ексцентриситета

Дуже поширений закон нормального розсіювання (закон Гауса), який характеризується рівнянням:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} . \quad (6)$$

Цей закон має місце, коли із великої кількості факторів жоден не є домінуючим, а кожний відіграє відносно малу роль у загальній сукупності (рис. 5, а). Він виражається кривою, розміщеною симетрично відносно центру групування.

Закон нормального розсіювання розмірів часто має місце при обробці деталей, особливо на верстатах-автоматах, а також при вимірюванні розмірів універсальними засобами вимірювання. Закон рівної ймовірності характеризується рівнянням:

$$y = \frac{1}{x_n - x_1} = const . \quad (7)$$

Він характерний для випадкових величин, на які впливає різке домінуючий фактор, що рівномірнозмінюється в просторі чи часі (рис. 5, б) [17].

Закон Сімпсона (рівнобедреного трикутника) має математичний вираз:

$$y = \begin{cases} \dfrac{4}{(x_n - x_1)^2} \cdot (\mathrm{x_n - x_1})\_при\_\mathrm{x_i} \prec \mathrm{x'_n}; \\ \dfrac{4}{(x - x_1)^2} \cdot (\mathrm{x_n - x})\_при\_\mathrm{x_n} \succ \mathrm{x}. \end{cases} \quad (8)$$

Цьому закону підпорядковуються випадкові величини, на які впливають сумарно два домінуючих фактори (рис. 5, в). Закон ексцентриситету (закон Максвела) має вираз:

$$y = \frac{r}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}. \qquad (9)$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Цьому закону підпорядковуються величини, які можуть мати тільки позитивні значення, наприклад, ексцентриситет, неспіввісності, торцеве чи радіальне биття, непаралельність і неперпендикулярності двох площин, осі і площини (рис. 5, г).

При апроксимації той чи інший закон вибирають як із загальних міркувань про закон розсіювання, так і виходячи з форми зображення емпіричної розсіювання, яка може допомогти і попередньо вибрати теоретичну криву без розсіювання.

Остаточний висновок вибору закону розсіювання, який характеризує розсіювання випадкової величини, роблять після визначення відповідності експериментальної і теоретичної кривих розсіювання по одному із критеріїв погодження (Критерій Колмогорова, Пірсона тощо).

Знання закону розсіювання випадкової величини дозволяє вирішувати практичні завдання, пов'язані з аналізом точності обробки і вимірювання.

Наближене обчислення закону розсіювання ймовірностей дає його числові характеристики чи моменти. Усі вони — середні величини. Якщо вони відраховуються від початку координат, то моменти називаються початковими, якщо від центру закону розсіювання, то — центральними.

Важливим початковим моментом є перший — середнє значення:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \qquad (10)$$

яке характеризує математичне очікування.

Чим більша кількість експериментальних даних, тим більше серед не значення наближається до математичного очікування. При обмежені кількості дослідів:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i , \qquad (11)$$

N — кількість дослідів (розмірів деталей в партії, замірів при вимірюванні).

Мірою розсіювання окремих результатів є другий центральний момент — дисперсія:

$$\sigma_x^2 = (x - \bar{x})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx \qquad (12)$$

Чи середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x = +\sqrt{\sigma x^2}. \qquad (13)$$

При обмеженій кількості дослідів:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \qquad (14)$$

Якщо кількість дослідів більше 25, то з достатньою достовірністю можна визначити середнє квадратичне відхилення за формулою:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}. \qquad (15)$$

Третій центральний момент є мірою несиметричності розсіювання чи асиметрії:

$$\mu = \frac{(x_1 - \bar{x})^3}{\sigma_x^3}. \qquad (16)$$

Четвертий центральний момент характеризує ексцес:

$$V = \frac{(x_1 - \bar{x})^4}{\sigma_x^4}. \qquad (17)$$

Функції розсіювання ймовірності і всі моменти мають важливі властивості (якості): будучи характеристиками випадкової величини, самі не є випадковими.

Оскільки практично завжди маємо справу з обмеженою кількістю експериментальних даних, то функції використовуються тільки як математичні моделі.

5. Визначення ймовірного проценту браку.

Вирішення деяких практичних завдань доцільно розглядати на прикладі найбільш поширеного закону нормального розсіювання.

Площа, обмежена кривою нормального розподілу і віссю абсцис (по осі ординат відкладається щільність ймовірності і $F(x)$ для випадку, коли початок координат збігається а середнім арифметичним значенням, визначається рівнянням:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx \quad (18)$$

У теорії ймовірності часто користуються коефіцієнтом ризику:

$$t=\frac{x}{\sigma} \quad (19)$$

Якщо замість x до рівняння ввести коефіцієнт ризику t, то воно набуде вигляду:

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdot e^{\frac{-t^2}{2}}dt \quad (20)$$

Площа, обмежена кривою нормального розподілу і віссю абсцис, дорівнює ймовірності повної сукупності подій, тобто дорівнює одиниці.

При симетричному розміщенні кривої відносно осі у можна записати:

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdot e^{\frac{-t^2}{2}}dt=0{,}5 \quad (21)$$

де $\Phi(t)$ – площа, обмежена кривою і віссю абсцис у межах інтегрування від 0 до оо.

Щоб визначити ймовірність того, чи випадкова величина буде в інтервалах від x_1 до x_2, достатньо встановити відповідні значення (рис. 3):

$$t_1=\frac{x_1}{\sigma} \text{ і } t_2=\frac{x_2}{\sigma}, \quad (22)$$

а шукана величина дорівнюватиме їх різниці:

$$\Phi(t)=\Phi(t_2)-\Phi(t_1). \quad (23)$$

Величину $\Phi(t)$ називають інтегральною функцією, або нормованою функцією Лапласа. Рівняння має вигляд:

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdot e^{\frac{-t^2}{2}}dt. \quad (24)$$

З метою обмеження розрахунків значення $\Phi(t)$ наведено в додатку I.

Крива нормального розподілу по обидві сторони асиметрично наближається до осі абсцис. Для практичних розрахунків треба мати обмежене поле розсіювання, яке охоплювало б основну масу подій.

Оскільки основним параметром розсіювання є середнє квадратичне відхилення σ, то поле розсіювання приймають в межах $\pm 3\sigma$. За межами цього поля розсіювання, як видно із додатку I, залишається 0,25 % подій, що для технічних розрахунків цілком прийнято (рис. 4). Таким чином, поле розсіювання V дорівнює:

$$V=6\sigma \quad (25)$$

Для визначення проценту браку при виготовленні деталей спочатку визначають коефіцієнт ризику t. При нормальному розподілі, коли середина поля допуску збігається з центром розсіювання $x=\frac{T}{2}$.

Якщо в формулу коефіцієнта ризику підставити це значення х, а а визначити з попереднього рівняння через V, то одержимо:

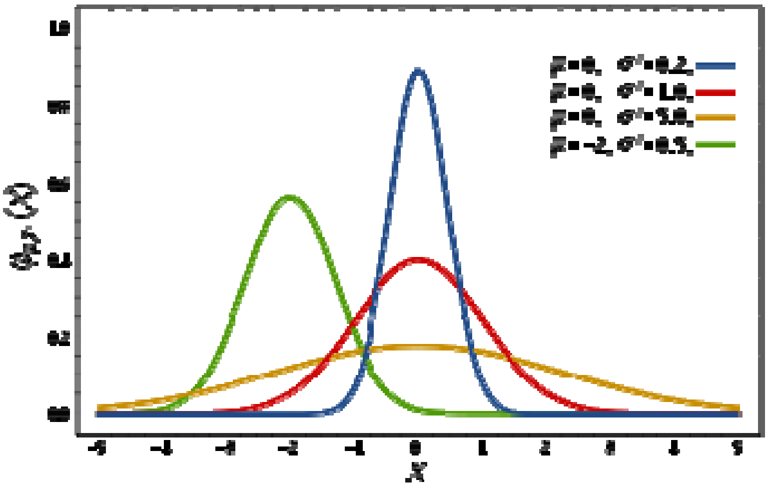
$$t=\frac{x}{\sigma}=\frac{T}{2\sigma}=\frac{T}{2\frac{V}{6}}=3\cdot\frac{T}{V}. \quad (26)$$

Таким чином, коефіцієнт ризику в цьому випадку показує співвідношення поля допуску і поля розсіювання (рис. 5) для технологічних процесів, які дають різні точність і поле розсіювання (V_1, V_2, V_3). Коли коефіцієнт ризику дорівнює 3, поле розсіювання V_2 дорівнює полю допуску і браку практично не буде (не більше 0,27 %). Якщо ж коефіцієнт ризику понад 3, браку не буде, але процес обробки вибраний надмірно точний, а, значить, дорожчий.

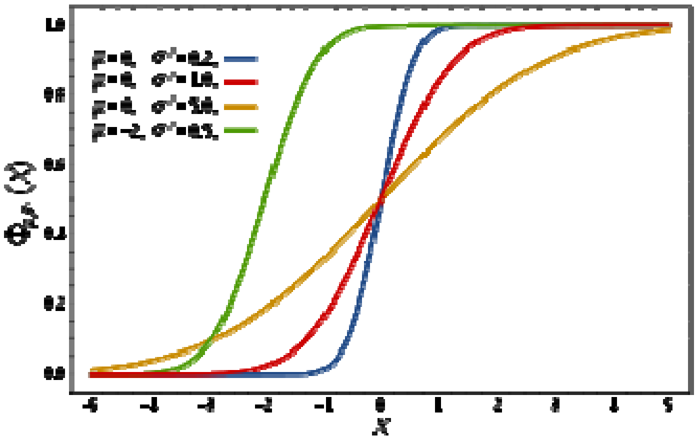
Якщо коефіцієнт ризику менше 3, брак ймовірний, і для вибору оптимального технологічного процесу обробки треба знати ймовірний процент браку.

Нормальний розподіл (розподіл Ґауса) – розподіл ймовірностей випадкової величини, що характеризується густиною ймовірності

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{27}$$



Червона крива відповідає стандартному нормальному розподілу.



Нормальний розподіл	
Функція ймовірностей	
Функція розподілу ймовірностей	
Параметри	$\mu \in \mathbf{R}$ — математичне сподівання $\sigma^2 > 0$ — дисперсія
Носій функції	$x \in \mathbf{R}$
Розподіл ймовірностей	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(\frac{x-\mu}{2\sigma^2}\right)^2}$
Функція розподілу ймовірностей (cdf)	$\frac{1}{2}\left[1+erf\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)\right]$
Середнє	μ
Медіана	μ
Мода	μ
Дисперсія	σ^2
Коефіцієнт асиметрії	0

Коефіцієнт ексцесу	0
Ентропія	$\frac{1}{2} In\left(2\pi e\sigma^2\right)$
Твірна функція моментів (mgf)	$\exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$
Характеристична функція	$\exp\left\{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$

де μ – математичне сподівання, σ^2 – дисперсія випадкової величини. Параметри σ також відомий, як стандартне відхилення . Розподіл із $\mu = 0$ та $\sigma^2 = 1$ називають стандартом нормальним розподілом.

Центральна гранична теорема стверджує, що нормальний розподіл виникає тоді, коли дана випадкова величина являє собою суму великого числа незалежних випадкових величин, кожна з яких грає в утворенні всієї суми незначну роль. Наприклад, відстань від влучення снаряду гармати до цілі при великій кількості пострілів характеризується саме нормальним розподілом.

Нормально розподілена випадкова величина позначається так: $\xi \approx \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Якщо генеральна сукупність вимірів нормально розподілена, характеризується ступенем квантування вимірів $[Q]$, не має систематичних похибок, тоді:

– довірчий інтервал для величини X виглядатиме так:[1][2]

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}\left(x_{\min} - \frac{[Q]}{2} < \mathrm{X} < x_{\max} + \frac{[Q]}{2}\right) = 1 \qquad (28)$$

– з урахуванням ступеня квантування середнє значення μ визначається з імовірністю[3].

$$\mathrm{P}(\mu) = 1 \qquad (29)$$

Деякі випадкові величини не мають математичного сподівання, в такому випадку значення центрального моменту не визначене. Часто, центральний момент порядку *k* позначається як μ_k.

Для неперервного одновимірного розподілу ймовірностей з функцією розподілу $f(x)$ центральний момент порядку *k* відносно середнього ν дорівнює:

$$\mu k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - v)^k f(x) dx.$$

Для дискретного одновимірного розподілу з функцією розподілу $p(x)$ центральний момент порядку *k* відносно середнього ν дорівнює:

$$\mu k = \sum_i (x_i - v)^k p(x_i)$$

Дисперсія випадкової величини - це центральний момент другого порядку.

Рис. 6. Точки відбору зразків ґрунтових проб, отримані з використанням сітки

З врахуванням зазначеної методики можна визначити зони варіабельності сільськогосподарських угідь. Так, наприклад, за допомогою моделювання точок відбору проб без зазначеної методики схема відбору точок складає таким чином (рис. 6).

На основі запропонованої методики можна виділити зони варіабельності (рис. 7).

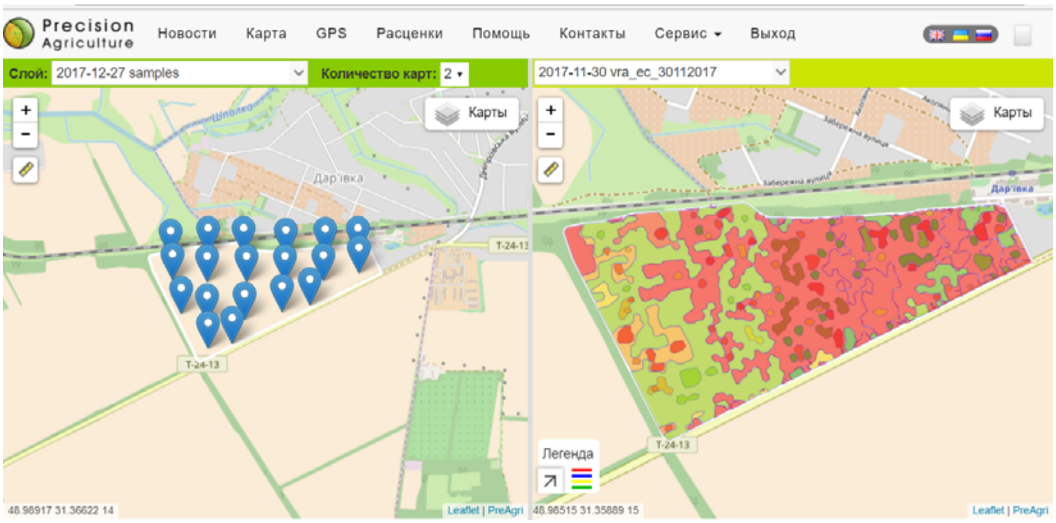


Рис. 7. Точки відбору зразків ґрунтових проб з врахуванням зон варіабельності агробіологічних параметрів ґрунтового середовища

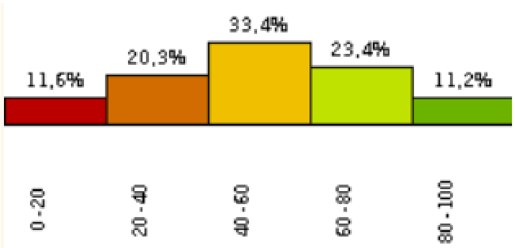


Рис. 8. Дані отримані з використанням інформаційно-технічної системи локального оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь розподілені згідно нормального закону розподілу

Рис. 9. Зони варіабельності агробіологічного стану сільськогосподарських угідь

Висновок

Запропонована методика з використанням ймовірнісно-статистичних методів визначення величини зон варіабельності агробіологічних параметрів сільськогосподарських угідь для забезпечення належної якості виконання технологічних операцій у рослинництві на основі даних локального оперативного моніторингу дозволяє виділити зони варіабельності та оптимізувати у подальшому точки відбору зразків ґрунтових проб з використанням неоднорідності ґрунтового середовища.

Література

1. Пряха Б. Г. Про точність геодезичних вимірювань / Б. Г. Пряха, Я. В. Білецький // Вісник геодезії

та картографії. — 2003. — № 3(30). — С. 43–49.

2. Пряха Б. Г. Про точність вимірювань / Б. Г. Пряха // Реконструкція житла : науково-виробничне видання. – К. : «Поліграф-експрес», 2006. – Вип. 7. – С. 122–123.

3. Пряха Б. Оцінювання середніх значень / Б. Пряха // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва : зб. наук. пр. – Л. : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка». – 2007. – Випуск I(13). – С. 140–145.

4. Пряха Б. Означення суми, різниці та добутку випадкових величин / Б. Пряха // Геодезія, картографія і аерофотознімання : міжвідомчий науково-технічний збірник. – Л. : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка». — 2009. — Вип. 72. — С. 41—49.

5. Опейда Й. Глосарій термінів з хімії / Й. Опейда, О. Швайка / Ін-т фізико-органічної хімії та вуглехімії ім. Л. М. Литвиненка НАН України, Донецький національний університет. — Донецьк : Вебер, 2008. — 758 с. — ISBN 978-966-335-206-0

6. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник / Сеньо П.С. – 2-е вид., перероб. і доп. – К. : Знання, 2007. — 556 с. — ISBN 966-346-284-1.

7. Чебышев П.Л. Полное собрание сочинений. Математический анализ / Чебышев П.Л. – М.–Л., 1947. – С. 431.

8. Пряха Б. Оцінювання середніх значень / Б. Пряха // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва : Зб. наук. пр. — Львів : Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2007. – Випуск I(13). – С. 140–145.

9. Пряха Б.Г. Про числові характеристики результатів вимірювань / Б.Г. Пряха // Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування — Європейський досвід. — Чернігів : ЧДІЕУ, 2008. — С. 97–108. — ISBN 978-966-2188-04-2.

10. Смирнов Н. В. Курс теории вероятности и математической статистики / Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. – Москва : Наука, 1965.

11. T. Soong (2004). Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers. Wiley. ISBN 0-470-86813-9.

12. Пряха Б. Г. Про числові характеристики результатів вимірювань / Б.Г. Пряха // Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування — Європейський досвід. — Чернігів : ЧДІЕУ, 2008. — С. 97–108. — ISBN 978-966-2188-04-2.

13. Walpole Roland E., Myers Raymond H. Probability and Statistics for Engineers and Scientists. — 3-th. edition, Macmillan Publishing Company. — New York, 1985. — 639 p. — ISBN 0-02-424170-9.

14. Пряха Б. Про зв'язок дисперсій та коваріацій / Б.Г. Пряха // Геодезія, картографія і аерофотознімання. — Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка». — 2009. — Вип. 71. — С. 262–271

15. Сірий І.С. Взаємозамінність, стандартизація і технічні вимірювання / Сірий І.С., Колісник В.С. – К. : Урожай. І995. – 264 с.

References

1. Priakha B. H. Pro tochnist heodezychnykh vymiriuvan / B. H. Priakha, Ya. V. Biletskyi // Visnyk heodezii ta kartohrafii. — 2003. — № 3(30). — S. 43–49.

2. Priakha B. H. Pro tochnist vymiriuvan / B. H. Priakha // Rekonstruktsiia zhytla : naukovo-vyrobnychne vydannia. – K. : «Polihraf-ekspres», 2006. – Vyp. 7. – S. 122–123.

3. Priakha B. Otsiniuvannia serednikh znachen / B. Priakha // Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva : zb. nauk. pr. – L. : Vydavnytstvo Natsionalnoho universytetu «Lvivska politekhnika». – 2007. – Vypusk I(13). – S. 140–145.

4. Priakha B. Oznachennia sumy, riznytsi ta dobutku vypadkovykh velychyn / B. Priakha // Heodeziia, kartohrafiia i aerofotoznimannia : mizhvidomchyi naukovo-tekhnichnyi zbirnyk. – L. : Vydavnytstvo Natsionalnoho universytetu «Lvivska politekhnika». — 2009. — Vyp. 72. — S. 41—49.

5. Opeida Y. Hlosarii terminiv z khimii / Y. Opeida, O. Shvaika / In-t fizyko-orhanichnoi khimii ta vuhlekhimii im. L. M. Lytvynenka NAN Ukrainy, Donetskyi natsionalnyi universytet. — Donetsk : Veber, 2008. — 758 s. — ISBN 978-966-335-206-0

6. Seno P.S. Teoriia ymovirnostei ta matematychna statystyka : pidruchnyk / Seno P.S. – 2-e vyd., pererob. i dop. – K. : Znannia, 2007. — 556 s. — ISBN 966-346-284-1.

7. Chebyshev P.L. Polnoe sobranye sochynenyi. Matematycheskyi analyz / Chebyshev P.L. – M.–L., 1947. – S. 431.

8. Priakha B. Otsiniuvannia serednikh znachen / B. Priakha // Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva : Zb. nauk. pr. — Lviv : Vydavnytstvo Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnika", 2007. – Vypusk I(13). – S. 140–145.

9. Priakha B.H. Pro chyslovi kharakterystyky rezultativ vymiriuvan / B.H. Priakha // Novitni dosiahnennia heodezii, heoinformatyky ta zemlevporiadkuvannia — Yevropeiskyi dosvid. — Chernihiv : ChDIEU, 2008. — S. 97–108. — ISBN 978-966-2188-04-2.

10. Smyrnov N. V. Kurs teoryy veroiatnosty y matematycheskoi statystyky / Smyrnov N. V., Dunyn-Barkovskyi Y. V. – Moskva : Nauka, 1965.

11. T. Soong (2004). Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers. Wiley. ISBN 0-470-86813-9.

12. Priakha B. H. Pro chyslovi kharakterystyky rezultativ vymiriuvan / B.H. Priakha // Novitni dosiahnennia heodezii, heoinformatyky ta zemlevporiadkuvannia — Yevropeiskyi dosvid. — Chernihiv : ChDIEU, 2008. — S. 97–108. — ISBN 978-966-2188-04-2.

13. Walpole Roland E., Myers Raymond H. Probability and Statistics for Engineers and Scientists. — 3-th. edition, Macmillan Publishing Company. — New York, 1985. — 639 p. — ISBN 0-02-424170-9.

14. Priakha B. Pro zviazok dyspersii ta kovariatsii / B.H. Priakha // Heodeziia, kartohrafiia i aerofotoznimannia. — Lviv : Vydavnytstvo Natsionalnoho universytetu «Lvivska politekhnika». — 2009. — Vyp. 71. — S. 262–271

15. Siryi I.S. Vzaiemozaminnist, standartyzatsiia i tekhnichni vymiriuvannia / Siryi I.S., Kolisnyk B.C. – K. : Urozhai. I995. – 264 s.

Рецензія/Peer review : 21.9.2018 р. Надрукована/Printed : 20.9.2018 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Троцишин І.В.