

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МЕТРОЛОГИЯ: БИКОЛЬЦОИДЫ И КОЛЬЦОИДЫ — ПЛОСКИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

В работе дальнейшее развитие и исследование получили плоские вещественные алгебраические кривые шестого порядка — бикольцоиды и кольцоиды, используемые при решении задач теории и практики магнитопольных измерений, описании траектории движения отрицательно заряженных квазичастиц внутри механической системы замкнутого типа и совершаемой ими работе на отдельных участках этого пути. Построены графики бикольцоид и кольцоид с разными параметрами, графики левосторонней и правосторонней кольцоид, приведены условия и ограничения по их воспроизведению с помощью ППП Grapher 7.0. Работа представляет интерес для метрологов, специалистов, магистров и аспирантов, изучающих кривые шестого порядка и возможности их применения в метрологии.

Ключевые слова: кривые шестого порядка, аналитическое выражение, кольцоида, бикольцоида.

V.T. KONDRATOV

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Science of Ukraine

FUNDAMENTAL METROLOGY: BIRINGOIDS AND RINGOIDS — FLAT MATERIAL ALGEBRAIC CURVES OF THE SIXTH ORDER

In the paper the further development and research have received flat material algebraic curves of the sixth order — biringoids and ringoids. It is ascertained, that the problem «about a parity between algebraic formulas and geometrical images» is one of fundamental problems of mathematics. The author in the world proves for the first time existence of flat material algebraic curves of the sixth order — biringoids and their special cases: link sided and right-hand ringoids the opened and closed types and other curves received at set restrictions of parameters of binary function of transformation and a range of change by a variable x_i . For the first time in the world analytical expressions of flat material algebraic curves of the sixth order are deduced, the beginning is necessary to their researches and development. Demand the further research of the restrictions imposed on topology of a curve of the sixth order by directly its algebraic nature. Development of flat material algebraic curves of the sixth order is caused by necessity of the description of an average trajectory of movement negatively charged quasiparticles in mechanical system of the closed type and definition of made work on separate sites of this way at the decision of problems of the theory and practice magnetic-field measurements. In paper possibility of reception of curves both closed, and opened kinds is shown. Flat material algebraic curves of 6th order — biringoid, link sided and right-hand ringoids with different parameters are constructed, conditions and restrictions on their reproduction by means of the Grapher 7.0 are resulted. For the first time in metrology classification bikoltoids which in enough full measure reflects all variety of flat material algebraic curves of 6th order is developed and resulted. Paper has scientific and practical value as promotes the decision of technical problems of the description of movement and others negatively charged quasiparticles in wave guides specified above a configuration.

Schedules of bikoltoids and ringoids with different parameters, schedules link sided and right-hand ringoids are constructed, conditions and restrictions on their reproduction by means of the Grapher 7.0 are resulted. Work is of interest for metrologists, experts, masters and the post-graduate students studying curves of the sixth order and possibility of their application in metrology.

Keywords: curves of the sixth order, analytical expression, biringoid, ringoid.

Введение. Одной из фундаментальных проблем математики является проблема «о соотношении между алгебраическими формулами и геометрическими образами». Несмотря на простоту и важность этой проблемы, в том числе и для многочисленных ее приложений, она до сих пор не решена [1]. В метрологии, как и в математике, также существуют проблемы построения геометрических образов плоских фигур с помощью вещественных алгебраических кривых заданной степени с предписанным расположением компонент этих фигур.

Согласно [2], в изучении топологии вещественных алгебраических кривых выделяют два естественных направления исследований: 1) поиск и установление ограничений, налагаемых на топологию кривой непосредственно ее алгебраической природой, и 2) доказательство существования плоских вещественных алгебраических кривых, удовлетворяющих этим ограничениям.

Существенный вклад в развитие данных направлений в алгебраической топологии, особенно в развитие контролируемых изменений топологий, внесли О.Я. Виро, Д.А. Гудков, В.И. Арнольд и др. [1–4].

В течение последних 10 лет особое внимание стало уделяться доказательству существования и развитию топологии плоских вещественных алгебраических кривых.

Плоская алгебраическая кривая — это геометрическое место точек на плоскости $(O; x, y)$, которое определяется как множество нулей многочлена от двух переменных. Порядком (или степенью) n этой кривой называется степень этого многочлена. Алгебраические кривые степеней $n = 1, 2, 3, \dots, 8$ кратко называются, соответственно, прямыми, кониками, кубиками, кватриками, пентиками, секстиками, септиками, октиками [5].

Часто кривым 3-го порядка и выше присваивается имя автора, впервые получившего и рассмотревшего эту кривую. Например, лемнисектата Жероно (2-го порядка), циссоида Диокла (3-го порядка), лемниската Бернулли (4-го порядка), лемниската Бута (4-го порядка), улитка Паскаля (4-го

порядка), овал Кассини (5-го порядка) и др. [5].

В настоящей работе дальнейшее развитие и исследование получили кривые шестого порядка — бикольцоида и кольцоида¹, используемые, в частности, для решения задач теории и практики магнитопольных измерений, — для описания пути или траектории движения отрицательно заряженных квазичастиц в теле механической системы замкнутого типа, и для определения совершаемой ими работы на отдельных участках этого пути.

Приведены варианты построения графиков бикольцоид с разными параметрами, графиков левосторонней и правосторонней кольцоид, изложены условия и ограничения по воспроизведению плоских вещественных кривых с помощью ППП Grapher 7.0.

Объектом исследований являются плоские вещественные алгебраические кривые шестого порядка.

Предметом исследований являются бикольцоиды и кольцоиды — кривые шестого порядка, выведенные аналитически и воспроизведенные автором.

Целью работы является построение в прямоугольной системе шкал бикольцоид и кольцоид по полученным аналитическим выражениям (уравнениям величин).

Результаты исследований

1. Вывод уравнения величин бикольцоиды

На рис. 1 приведен чертеж механической системы замкнутого типа — двухконтурного волновода, на котором пунктирной линией изображена замкнутая кривая шестого порядка — бициклоида. Поставлена задача вывода аналитического выражения (уравнения величин), описывающего данную кривую и получение графического отображения этой кривой с помощью ППП Grapher 7.0. Решение поставленной задачи возможно осуществить двумя методами: а) графоаналитическим и б) аналитическим.

Представим замкнутую кривую (идеальную бикольцоиду) в декартовой системе координат с указанием характеристических точек A, C_1, D_1, B, D_2 и B_2 бициклоиды, ее фокусов F_1 и F_2 , длины $2\Delta r$ линейного участка C_1D_1 и C_2D_2 кривой, а также расстояния $2\Delta h$ (щели) между линиями C_1D_1 и C_2D_2 (рис. 2, а). На рис. 2, б приведена бициклоида в прямоугольной системе шкал. Горизонтальная шкала содержит 80 делений с оцифровкой от $-1,60$ мм до $1,60$ мм при цене деления $0,02$ мм. Вертикальная шкала содержит 50 делений с оцифровкой от $-1,00$ мм до $1,00$ мм.

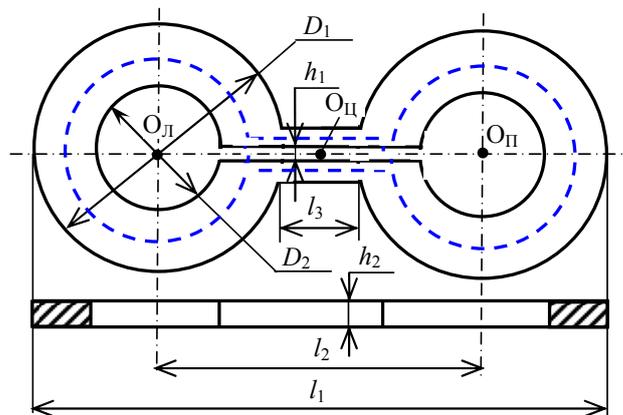


Рис. 1. Изображение бикольцоиды в виде пунктирной кривой на чертеже двухконтурного волновода

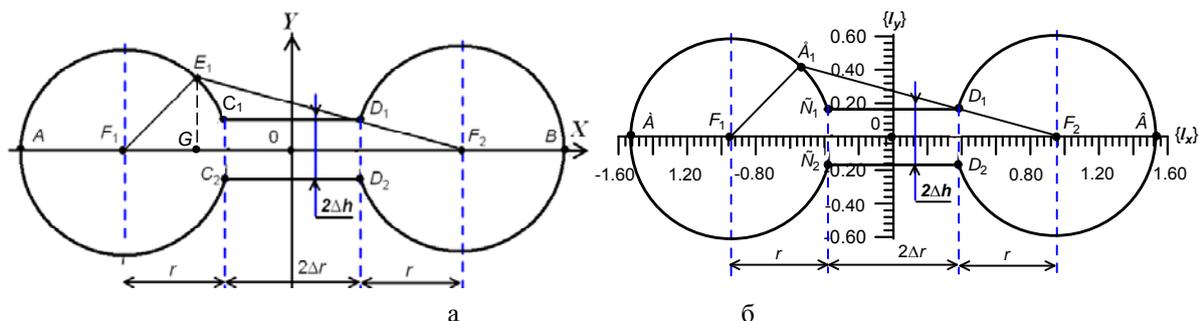


Рис. 2. Изображение идеально симметричной бикольцоиды: а) в декартовой системе координат; б) в прямоугольной системе шкал

¹ название кривых дано автором настоящей статьи

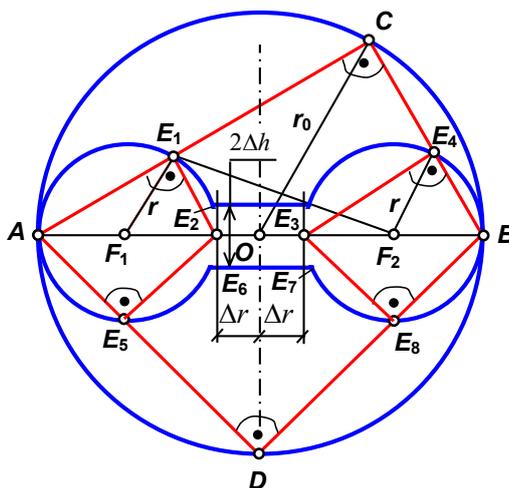


Рис. 3. Графические построения для вывода уравнения бициклоиды графоаналитическим методом

Строгие геометрические построения, обеспечивающие вывод аналитического выражения бикольцоиды, и отвечающие на вопрос, «почему две окружности встроены в третью, с нормированным по значению радиусом r_0 ?» имеют вид, приведенный на рис. 3. На приведенном рисунке кривая $AE_1(E_2E_3)E_4BE_8(E_7E_6)E_5A$ представляет бикольцоиду. Жирными точками обозначены прямые углы при характеристических точках, отмеченных на окружностях буквами $A, B, C, D, E_1, E_4, E_8, E_5$. Они характеризуют свойства треугольников, вписанных в окружность.

Вывод уравнений величин, описывающих бикольцоиду, кольцоиду и их варианты чисто аналитическим методом оказалось не простой задачей. Более глубокий ее разбор оставим математикам.

Ниже приводится решение поставленной задачи графоаналитическим методом с использованием некоторых рекомендаций методики вывода уравнения величин, описывающего овал Кассини, и которая изложена в работе [6].

В общем виде координаты фокусов бикольцоиды могут быть записаны через радиус и его приращение: $F_1(-r + \Delta r); 0$ и $F_2(r + \Delta r); 0$ (рис. 2, рис. 3). Возьмем произвольную точку $E_1(x, y)$ на левой части бикольцоиды. Определим расстояние от фокусов F_1 и F_2 до точки E_1 :

$$E_1F_1 = \sqrt{(y_i^2 + \Delta h^2 + (x_i - (r + \Delta r))^2)} - (2x_i(r + \Delta r))$$

и

$$E_1F_2 = \sqrt{(y_i^2 + \Delta h^2 + (x_i + (r + \Delta r))^2)} + (2x_i(r + \Delta r))$$

Исследования показали, что при выводе уравнения величин бикольцоиды предложенным методом необходимо использовать нелинейную систему координат, — (x, y^2) , в которой положение точки описывается как $E_i(x_i, y_i^2)$. В данной системе координат горизонтальная шкала линейная, а вертикальная — квадратичная.

На оси абсцисс выбранной системы координат отметим также две точки, являющиеся фокусами $F_1(-r + \Delta r); 0$ и $F_2(r + \Delta r); 0$ двух окружностей радиуса r , смещенных относительно начала координат на расстояние $\pm(r + \Delta r)$ (рис. 2, рис. 3). Ограничим расстояние c между фокусами условием: $2(r + \Delta r) \leq c \leq k(r + \Delta r)$, где $k \geq 2$.

В общем виде, в выбранной системе координат уравнение окружности с центром в начале координат, при нормированном значении радиуса r_0 , примет вид (см. рис. 3):

$$x_i^2 + (y_i^2)^2 = r_0^2. \tag{1}$$

Для двух окружностей радиуса $r_1 = r_2 = r$, смещенных по оси абсцисс относительно начала координат на $\pm \Delta x = \pm(r + \Delta r)$, где $\pm \Delta r$ — расстояние от центра координат до первой (левой) и второй (правой) окружности. При неизменном значении радиуса ($r_0 = \text{const}$) приращение радиуса r на $\pm \Delta r$ приведет к приращению ординаты на $(\pm \Delta y)^2 = \Delta y^2 = \Delta h^2$, т.е. имеет место однозначное приращение ординаты на Δh^2 . В выбранной системе координат уравнения величин для первой и второй окружностей с изменяющимися параметрами Δr и Δh примут вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[(y^2 + \Delta h^2)^2 + (x - (r + \Delta r))^2 \right] &= r_0^2, \\ \left[(y^2 + \Delta h^2)^2 + (x + (r + \Delta r))^2 \right] &= r_0^2. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\left[(y^2 + \Delta h^2)^2 + (x + (r + \Delta r))^2 \right] = r_0^2. \quad (3)$$

Проведем некоторые преобразования над полученной системой уравнений величин (2) и (3). Вначале, в левой части уравнений величин (2) и (3) возведем в квадрат разность и сумму величин, связанных с осью абсцисс, и запишем полученное аналитическое выражение в виде

$$\left. \begin{aligned} \left[(y_i^2 + \Delta h^2)^2 + (x_i^2 + (r + \Delta r)^2) - (2x_i(r + \Delta r)) \right] &= r_0^2 \\ \left[(y_i^2 + \Delta h^2)^2 + (x_i^2 + (r + \Delta r)^2) + (2x_i(r + \Delta r)) \right] &= r_0^2 \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Сгруппируем слагаемые по «квадратичному» признаку и получим:

$$\left[(y_i^2 + \Delta h^2)^2 + x_i^2 + (r + \Delta r)^2 \right] - [2x_i(r + \Delta r)] = r_0^2 \quad (5)$$

и

$$\left[(y_i^2 + \Delta h^2)^2 + x_i^2 + (r + \Delta r)^2 \right] + [2x_i(r + \Delta r)] = r_0^2. \quad (6)$$

Перемножим левые и правые части равенств (5) и (6) и получим выражение для разности квадратов:

$$\left[(y_i^2 + \Delta h^2)^2 + (x_i^2 + (r + \Delta r)^2) \right]^2 - (2x_i(r + \Delta r))^2 = r_0^4, \quad (7)$$

которое в нелинейной системе координат связывает обе окружности с радиусом r .

Каким же образом связаны переменные x_i и y_i между собой и с параметрами $r, \Delta r$ и Δh ? Из уравнения величин (7) найдем в явном виде зависимость $y_i = f(x_i, r, \Delta r, \Delta h)$.

Перенесем вычитаемое из левой части равенства (7) в правую часть:

$$\left[(y_i^2 + \Delta h^2)^2 + (x_i^2 + (r + \Delta r)^2) \right]^2 = r_0^4 + (4x_i^2(r + \Delta r))^2. \quad (8)$$

Извлечем корень квадратный из обеих частей равенства (8):

$$(y_i^2 + \Delta h^2)^2 + [x_i^2 + (r + \Delta r)^2] = \sqrt{r_0^4 + (4x_i^2(r + \Delta r))^2}. \quad (9)$$

Перенесем вправо слагаемое в квадратных скобках:

$$(y_i^2 + \Delta h^2)^2 = \sqrt{r_0^4 + (4x_i^2(r + \Delta r))^2} - x_i^2 - (r + \Delta r)^2. \quad (10)$$

Извлечем корень квадратный из обеих частей равенства (10):

$$y_i^2 + \Delta h^2 = \sqrt{\sqrt{r_0^4 + (4x_i^2(r + \Delta r))^2} - x_i^2 - (r + \Delta r)^2}. \quad (11)$$

В (11) перенесем влево второе слагаемое (Δh^2):

$$y_i^2 = \sqrt{\sqrt{r_0^4 + (4x_i^2(r + \Delta r))^2} - x_i^2 - (r + \Delta r)^2} - \Delta h^2. \quad (12)$$

Извлечем корень квадратный из обеих частей равенства (12) и получим бинарное* уравнение величин

$$y_{i1,2} = \pm \sqrt{\sqrt{\sqrt{r_0^4 + (4x_i^2(r + \Delta r))^2} - x_i^2 - (r + \Delta r)^2} - \Delta h^2}. \quad (13)$$

(со знаками «+» и «-»), описывающее бикольцоиду — плоскую вещественную алгебраическую кривую шестого порядка.

Исследования показали, что при воспроизведении кривой весьма важно указывать пределы изменения переменной x_i . В этом случае запись бинарного¹ уравнения величин (13) будет иметь вид (при x_i , изменяющейся в пределах $-x_1 \leq x_i \leq x_2$):

$$y_{i1,2} = \pm \sqrt{\sqrt{\sqrt{r_0^4 + (4x_i^2(r + \Delta r))^2} - x_i^2 - (r + \Delta r)^2} - \Delta h^2} \Bigg|_{-x_1}^{+x_2}. \quad (14)$$

Запишем уравнение величин (14) в самом общем виде, т.е. с учетом введенных масштабных коэффициентов k_y и k_x и смещения $\Delta y_0 = \Delta h_0$:

$$y_{i1,2} = \pm k_y \sqrt{\sqrt{\sqrt{r_0^4 + 4x_i^2(r + \Delta r)^2} - x_i^2 - (r + \Delta r)^2} - \Delta h^2} \mp \Delta h_0 \Bigg|_{-x_1}^{+x_2}, \quad (15)$$

¹ два одинаковых уравнения величин с противоположными знаками, описывающие плоскую вещественную алгебраическую кривую

$$y_{i1,2} = \pm k_y \sqrt{\sqrt{\sqrt{r_0^4 + 4x_i^2(r + \Delta r)^2} - (k_x x_i)^2 - (r + \Delta r)^2 - \Delta h^2} \mp \Delta h_0} \Big|_{-x_1}^{+x_2}. \quad (16)$$

$$y_{i1,2} = \pm k_y \sqrt{\sqrt{\sqrt{r_0^4 + 4(k_x x_i)^2(r + \Delta r)^2} - (k_x x_i)^2 - (r + \Delta r)^2 - \Delta h^2} \mp \Delta h_0} \Big|_{-x_1}^{+x_2}. \quad (17)$$

В (15) и (16) значения масштабного коэффициента k_y не равны нулю, т.е. $0 < k_y < 1$, $k_y = 1$ или $1 < k_y < k_d$ (где k_d — максимально допустимое значение масштабного коэффициента). В (17) значения масштабного коэффициента k_x отличаются от единицы на $\pm(1-3)$ цены деления соответствующей шкалы, т.е. $k_x = 1 \pm (1-3)\Delta_x$. При $\Delta_x = 0$ и $\Delta h_0 = 0$

$$y_{i1,2} = \pm k_y \sqrt{\sqrt{\sqrt{r_0^4 + (4x_i^2(r + \Delta r)^2 - x_i^2 - (r + \Delta r)^2 - \Delta h^2)} \mp \Delta h_0} \Big|_{-x_1}^{+x_2}. \quad (18)$$

Аналитическое выражение уравнения величин (15) может быть записано при разных положениях масштабного коэффициента k_y перед знаками радикала. Так, например, с учетом масштабного коэффициента

k_y^2 и смещения $k_y^2 \Delta h_0$, уравнение величин (15) может быть записаны в виде:

$$y_{i1,2} = \pm \sqrt{k_y^2} \sqrt{\sqrt{\sqrt{r_0^4 + (4x_i^2(r + \Delta r)^2 - x_i^2 - (r + \Delta r)^2 - k_y^2 \Delta h^2) \mp \Delta h_0} \Big|_{-x_1}^{+x_2}}, \quad (19)$$

а с учетом масштабного коэффициента k_y^4 и смещения $k_y^2 \Delta h_0$ — в виде:

$$y_{i1,2} = \pm \sqrt{k_y^4} \sqrt{\sqrt{\sqrt{r_0^4 + (4x_i^2(r + \Delta r)^2 - k_y^4(x_i^2 + (r + \Delta r)^2) - k_y^2 \Delta h^2) \mp \Delta h_0} \Big|_{-x_1}^{+x_2}}. \quad (20)$$

Исследования показали существование частных уравнений величин, описывающих бикольцоиды, которые могут быть воспроизведены при разных значениях параметров уравнения величин и при неизменном (заданном) диапазоне значений переменной x_i , т.е. при $\{\Delta h_0\} = 0$ и/или $\{\Delta h\} = 0$, при $\{\Delta h_0\} = \{\Delta h\}$ и $0 \leq \{\Delta h_0\} \leq r/2$, при $\{\Delta h\} \neq \{\Delta h_0\}$, при $\Delta r \neq 0$ или $\Delta r = 0$. Также возможно получение множества частных случаев уравнений величин для кольцоид при разных диапазонах изменения значения переменной x_i и тех же значениях параметров, что и для бикольцоиды.

С математической точки зрения уравнения величин (14), (15), (16), (17), (18) и (19) представляют собой функции шестого порядка, описывающие вещественные алгебраические кривые того же порядка. Они получены автором впервые.

2. Реальные изображения бикольцоид. Реальные изображения бикольцоид, полученные с использованием ППП Grapher 7.0, отличаются от идеальных из-за неадекватности и неидеальности математической модели кривой, связанной, например, с приблизительным заданием значения параметра Δr , например, с погрешностью большей 0,1%, и ограниченных возможностей ППП Grapher 7.0 по графическому отображению скачков этой кривой.

Рассмотрим некоторые варианты бикольцоид и кольцоид (усеченных бикольцоид).

1. По размерам радиуса колец и расстояниям между кольцами можно выделить бикольцоиды трех групп: 1) при $0 \leq 2\Delta r \leq r$; 2) при $r \leq 2\Delta r \leq 2r$ и 3) при $2r \leq 2\Delta r \leq kr$, где $k = 3, \dots, 10$ и даже более.

Различают: группы бикольцоид с разными значениями расстояний между кольцами (контуров), но при неизменных значениях их радиусов; группы бикольцоид с разными значениями радиусов колец, но при постоянном (неизменном) расстоянии между ними; группы бикольцоид с разными значениями радиусов и расстояний между кольцами.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Один из вариантов бикольцоиды, описываемой уравнением величин (15), приведен на рис. 4, Программа воспроизведения ППП Grapher 7.0 бикольцоиды, приведенной на рис. 4, а, записывается таким образом:

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\text{pow}(0.39,4)+4*\text{pow}(x,2)*\text{pow}((0.45+0.15),2)\right)}-\text{pow}((0.99*x),2)-\text{pow}(0.39,2)\right)}-0.1\right)}-0.1 \\ & -\sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\text{pow}(0.39,4)+4*\text{pow}(x,2)*\text{pow}((0.45+0.15),2)\right)}-\text{pow}((0.99*x),2)-\text{pow}(0.39,2)\right)}-0.1\right)}+0.1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x_2=1,316 \\ x_1=-1,316 \end{array}$$

(21) Программа воспроизводит бициклоиду при $k_y = 1$, $k_x = 0,99$, $k_0 = 0,39$, $r + \Delta r = 0,45 + 0,15$, $\mp \Delta h_0 = \mp 0,1$, $\Delta h^2 = 0,39$ и $-0,316 \leq x_i \leq 0,316$,

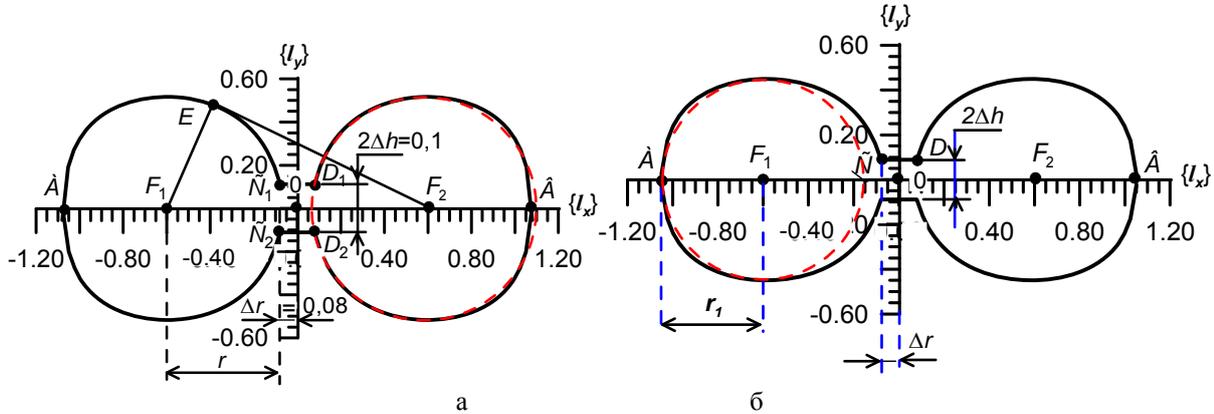


Рис. 4. Графическое изображение бициклоиды, отвечающей условию $0 \leq 2\Delta r \leq r$

На рис. 4, а латинскими буквами $A, C_1, D_1, B, D_2, C_2, A$ обозначен весь путь движения, например, электронов, по замкнутому контуру бикольцоиды. То же показано и на других рисунках. Точками F_1, F_2 и E

На рис. 4, а справа, окружность, изображенная пунктирной линией, показывает степень отклонения формы

«колец» от идеальной. Как видно из рисунка, данные отклонения незначительны. Это достигнуто за счет введения масштабного коэффициента $k_x = 0,99$ при члене x^2 .

Программа воспроизведения ППП Grapher 7.0 бикольцоиды, приведенный на рис. 4, б, при масштабном коэффициенте $k_y = 0,9$ и $k_x = 1$ записывается таким образом:

$$\left. \begin{aligned} & 0.9*\sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\text{pow}(0.39,4)+4*\text{pow}(x,2)*\text{pow}((0.45+0.15),2)\right)}-\text{pow}(x,2)-\text{pow}(0.39,2)\right)}-0.10\right)}-0.1 \\ & -0.9*\sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\text{pow}(0.39,4)+4*\text{pow}(x,2)*\text{pow}((0.45+0.15),2)\right)}-\text{pow}(x,2)-\text{pow}(0.39,2)\right)}-0.10\right)}+0.1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x_2=1,313 \\ x_1=-1,313 \end{array} \quad (22)$$

В результате введения масштабирования ($k_y = 0,9$), приведенный вариант бикольцоиды имеет уменьшенный радиус колец бикольцоиды и заметную погрешность воспроизведения колец (см. рис. 4, б, левую часть с окружностью, изображенной пунктирной линией).

Пример 2. На рис. 5 приведена бикольцоида, отвечающая условию $r \leq 2\Delta r \leq 2r$, согласно которому расстояние между кольцами не превышает удвоенного значения радиуса колец. Кроме того, кольца имеют одинаковые радиусы ($r_1 = r_2 = r$), симметричный «прямоугольный» элемент связи колец, которые смещены относительно начала координат на одинаковое расстояние, т.е. $\Delta r_1 = \Delta r_2 = \Delta r$. Бикольцоида описывается уравнением величин (15) при $r_0 = 0,6$, $r + \Delta r = 0,98 + 0,15$, $\mp \Delta h_0 = \mp 0,07$, $\Delta h^2 = 0,4$ и $-1,75 \leq x_i \leq 1,75$, Форма кольца незначительно отличается от идеальной окружности (см. рис. 5, окружность, изображенная пунктирной линией), что нарушает их симметрию. Подбором значений соответствующих параметров данная асимметрия может быть уменьшена или даже исключена.

Программа воспроизведения ППП Grapher 7.0 приведенной бикольцоиды имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\text{pow}(0.6,4)+4.0*\text{pow}(x,2)*\text{pow}(0.98,2)\right)}-\text{pow}(x,2)-\text{pow}(0.8,2)\right)}-0.07\right)}-0.07 \\ & -\sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\text{pow}(0.6,4)+4.0*\text{pow}(x,2)*\text{pow}(0.98,2)\right)}-\text{pow}(x,2)-\text{pow}(0.8,2)\right)}-0.07\right)}+0.07 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x_2=1,75 \\ x_1=-1,75 \end{array} \quad (23)$$

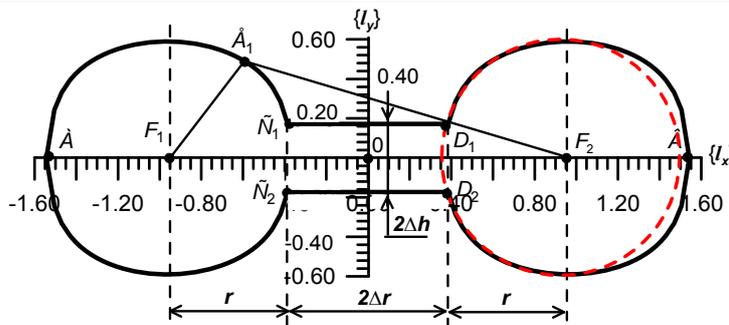


Рис. 5. Графическое изображение бикольцоиды, отвечающей условию $r \leq 2\Delta r \leq 2r$

Пример 3. На рис. 6 приведена бикольцоида с измененным на 5% масштабом по горизонтальной шкале значений ($x'_i = 1,05x_i$), Бикольцоида соответствует условиям: $2r < 2\Delta r \leq 3r$ и $\Delta h_1 > \Delta h_2$. Согласно этим условиям, расстояние между кольцами превышает удвоенное значение радиуса колец, а «прямоугольный» элемент связи смещен по оси ординат вверх. Кольца имеют одинаковые радиусы ($r_1 = r_2 = r$) и размещены относительно начала координат на одинаковом расстоянии. $\Delta r > r$. Форма колец практически не отличается от идеальной.

Программа воспроизведения ППП Grapher 7.0 приведенного варианта бикольцоиды записывается в виде:..

$$\begin{aligned} & \text{sqrt}\left(\text{sqrt}\left(\text{pow}(0,6,4)+4*\text{pow}(1,05*x,2)*\text{pow}(0,98,2)\right)-\text{pow}(1,05*x,2)-\text{pow}(0,8,2)-\text{pow}(0,4,2)\right)-0,25 \Big|_{x_2=1,8} \\ & -\text{sqrt}\left(\text{sqrt}\left(\text{pow}(0,6,4)+4*\text{pow}(1,05*x,2)*\text{pow}(0,98,2)\right)-\text{pow}(1,05*x,2)-\text{pow}(0,8,2)-\text{pow}(0,4,2)\right)+0,29 \Big|_{x_1=-1,8} \end{aligned} \quad (24)$$

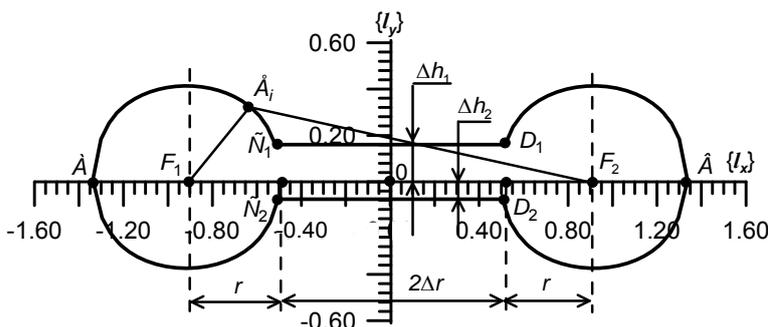


Рис. 6. Графическое изображение бикольцоиды с удлиненным путем перемещения некоторого объекта из точки A в точку B, отвечающей условию

Пример 4. На рис. 7 приведено графическое изображение сплюсненной бикольцоиды, похожей на «биэллипсоиду». Изображенная плоская вещественная алгебраическая кривая 6-го порядка получена при разных значениях параметров, в частности, при $2r \leq 2\Delta r$, $2\Delta h_1 < 2\Delta h_2$, $r_1 > r_2$.

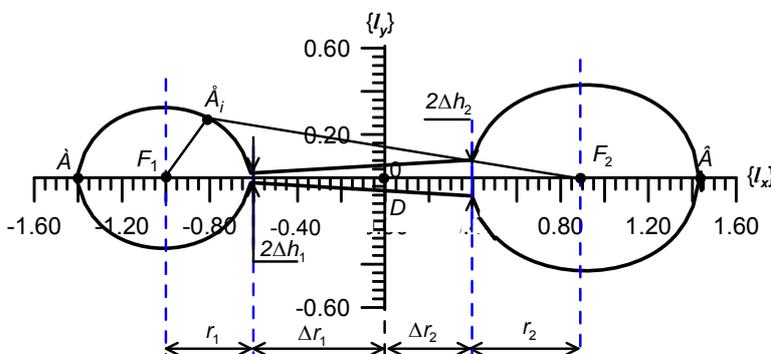


Рис. 7. Графическое изображение бикольцоиды с разной формой колец с соединением в виде конуса с вершиной слева от центра симметрии

Значения переменной x_i смещены на 0,08 и 0,05 единиц соответственно. Согласно указанным условиям, расстояние между кольцами по своему значению близко к удвоенному значению радиусов колец.

Элементом соединения колец разной формы является конус, вершина которого расположена слева от центра симметрии.

Программа воспроизведения ППП Grapher 7.0 бикольцоиды, приведенной на рис. 7, записывается в виде:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{\rho\omega(0,6,4)+4*\rho\omega((x+0,08),2)*\rho\omega(0,98,2)}-\rho\omega((x+0,05),2)-\rho\omega(0,8,2)\right)}-0,4*0,44-0,196\right)-0,09} \Big|_{x_2=1,802} \\ & -\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{\rho\omega(0,6,4)+4*\rho\omega((x+0,08),2)*\rho\omega(0,98,2)}-\rho\omega((x+0,05),2)-\rho\omega(0,8,2)\right)}-0,4*0,44-0,195\right)+0,09} \Big|_{x_1=-1,802} \end{aligned} \quad (25)$$

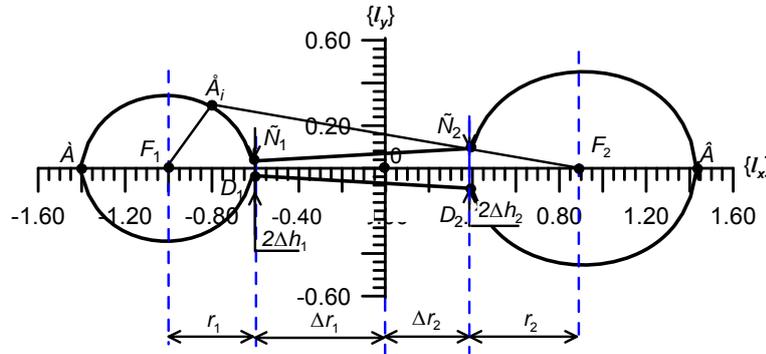


Рис. 8. Графическое изображение бикольцоиды с соединением в виде конуса с вершиной слева от центра симметрии

Если в бинарное уравнение величин (25) ввести коэффициент масштабирования $k_y = 1,08$ по вертикальной шкале и увеличить значение смещения до 0,11 единиц, то можно получить изображение бикольцоиды с более округленными кольцами (см. рис. 8) Уточненное уравнение величин примет вид:

$$\begin{aligned} & 1,08*\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{\rho\omega(0,6,4)+4*\rho\omega((x+0,08),2)*\rho\omega(0,98,2)}-\rho\omega((x+0,05),2)-\rho\omega(0,8,2)\right)}-0,4*0,44-0,196\right)-0,11} \Big|_{x_2=1,802} \\ & -1,08*\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{\rho\omega(0,6,4)+4*\rho\omega((x+0,08),2)*\rho\omega(0,98,2)}-\rho\omega((x+0,05),2)-\rho\omega(0,8,2)\right)}-0,4*0,44-0,195\right)+0,11} \Big|_{x_1=-1,802} \end{aligned} \quad (26)$$

Рассмотрим еще два примера изображения левосторонней и правосторонней кольцоид разомкнутого и замкнутого типов, как частных случаев бикольцоиды.

Пример 5. На рис. 9 приведены два частных случая левосторонней и правосторонней кольцоид разомкнутого типа. Они получены путем ограничения нижнего и верхнего значений диапазона изменения переменной x_i . Для построения левосторонней и правосторонней кольцоид использовалось уравнение величин (15) при $k_y = 1,08$, $k_x = 0,99$, $k_0 = 0,39$, $r + \Delta r = 0,45 + 0,15$, $\mp \Delta h_0 = \mp 0,177$ и $\Delta h^2 = 0,1$. Причем для левосторонней кольцоиды значения переменной ограничиваются диапазоном значений $-0,078 \leq x_i \leq -0,41$, а для правосторонней — $0,08 \leq x_i \leq 1,35$.

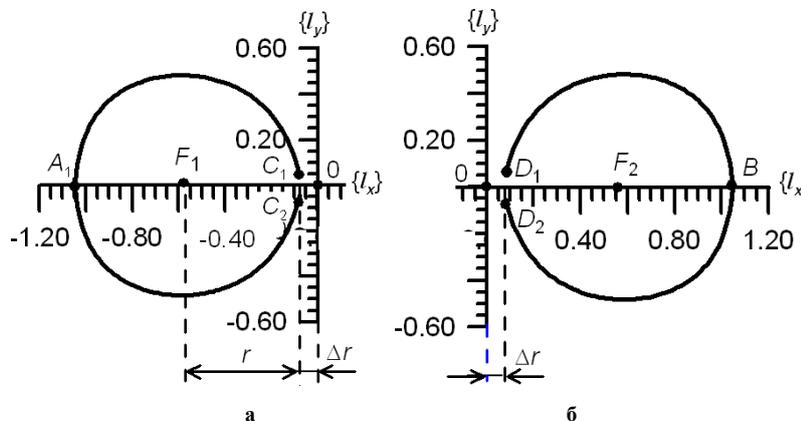


Рис. 9. Графическое изображение левосторонней (а) и правосторонней (б) кольцоид разомкнутого типа

Программы воспроизведения левосторонней и правосторонней кольцоид, приведенных на рис. 9, а, имеют, соответственно, вид:

$$\left. \begin{aligned} &1.08 * \sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\text{pow}(0.39, 4) + 4 * \text{pow}(x, 2) * \text{pow}((0.45 + 0.15), 2)\right)} - \text{pow}(x, 2) - \text{pow}(0.39, 2)\right)} - 0.10\right)} - 0.177 \\ &- 1.08 * \sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\text{pow}(0.39, 4) + 4 * \text{pow}(x, 2) * \text{pow}((0.45 + 0.15), 2)\right)} - \text{pow}(x, 2) - \text{pow}(0.39, 2)\right)} - 0.10\right)} + 0.177 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x_2 = -0,078 \\ x_1 = -1,41 \end{array} \quad (27)$$

и

$$\left. \begin{aligned} &1.08 * \sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\text{pow}(0.39, 4) + 4 * \text{pow}(x, 2) * \text{pow}((0.45 + 0.15), 2)\right)} - \text{pow}(x, 2) - \text{pow}(0.39, 2)\right)} - 0.10\right)} - 0.177 \\ &- 1.08 * \sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\text{pow}(0.39, 4) + 4 * \text{pow}(x, 2) * \text{pow}((0.45 + 0.15), 2)\right)} - \text{pow}(x, 2) - \text{pow}(0.39, 2)\right)} - 0.10\right)} + 0.177 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x_2 = 1,35 \\ x_1 = 0,08 \end{array} \quad (28)$$

Как видно из рис. 9, левосторонняя и правосторонняя кольцоиды незамкнутого типа отличаются между собой, при прочих равных условиях (см. аналитические выражения (27) и (28)), расположением и размерами $2\Delta h$ разрывной части кривой («щели»). Последние получают путем установления в (27) и (28) начального значения переменной x_2 и x_1 соответственно.

Пример 6. На рис 10 приведены изображения левосторонней и правосторонней кольцоиды замкнутого типа. Как и в предыдущем примере, они получены путем ограничения нижнего и верхнего значений диапазона изменений переменной x_i в пределах от $-1,313$ до $-0,053$ и от $0,053$ до $1,313$.

Для построения левосторонней и правосторонней кольцоид замкнутого типа использовалось уравнение величин (15) при $k_y = 1,08$, $k_x = 1$, $k_0 = 0,39$, $r + \Delta r = 0,45 + 0,15$, $\mp \Delta h_0 = \mp 0,17$ и $\Delta h^2 = 0,1$.

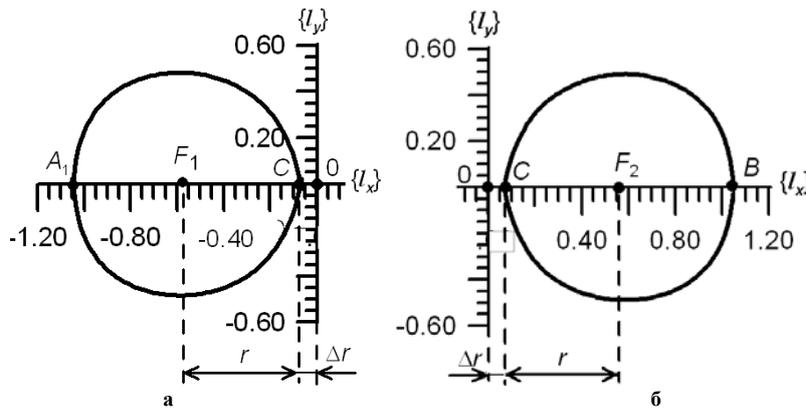


Рис. 10. Графическое изображение левосторонней (а) и правосторонней (б) кольцоид замкнутого типа

Программы воспроизведения левосторонней и правосторонней кольцоид, приведенных на рис. 10, имеют, соответственно, вид:

$$\left. \begin{aligned} &1.08 * \sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\text{pow}(0.39, 4) + 4 * \text{pow}(x, 2) * \text{pow}((0.45 + 0.15), 2)\right)} - \text{pow}(x, 2) - \text{pow}(0.39, 2)\right)} - 0.1\right)} - 0.17 \\ &- 1.08 * \sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{\left(\text{pow}(0.39, 4) + 4 * \text{pow}(x, 2) * \text{pow}((0.45 + 0.15), 2)\right)} - \text{pow}(x, 2) - \text{pow}(0.39, 2)\right)} - 0.1\right)} + 0.17 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x_2 \\ x_1 \end{array} \quad (29)$$

Причем для левосторонней кольцоиды значения переменной ограничиваются диапазоном значений $-1,30 \leq x_i \leq -0,52$, а для правосторонней — $0,052 \leq x_i \leq 1,30$.

Возможны и другие частные случаи бикольцоид и кольцоид, которые могут представлять тот или иной научный и практический интерес для метрологов и математиков.

Следует отметить сложность настройки и доведения графического изображения до требуемого качества, формы и вида. Не изученными остаются вопросы установления пределов задания переменных величин, вопросы взаимосвязей постоянных величин между собой и с переменными величинами. Для плоских вещественных алгебраических кривых шестого порядка ее изученными остаются ограничения, налагаемые на топологию кривой непосредственно ее алгебраической природой.

Таким образом, впервые в мире доказано существование плоских вещественных алгебраических кривых шестого порядка — бикольцоид и их частных случаев: левосторонней и правосторонней кольцоид разомкнутого и замкнутого типов и других кривых, полученных при заданных ограничениях параметров бинарных уравнений величин (бинарных функций преобразования) и диапазона изменения значений переменной x_i .

Полученные данные позволяют предложить классификацию плоских вещественных алгебраических кривых 6-го порядка.

4. Классификация бикольцоид. Впервые предложена классификация бикольцоид (см. рис. 11), в основу которой положено ряд существенных классификационных признаков. Рассмотрим используемые

признаки при описании классификации бикольцоид.

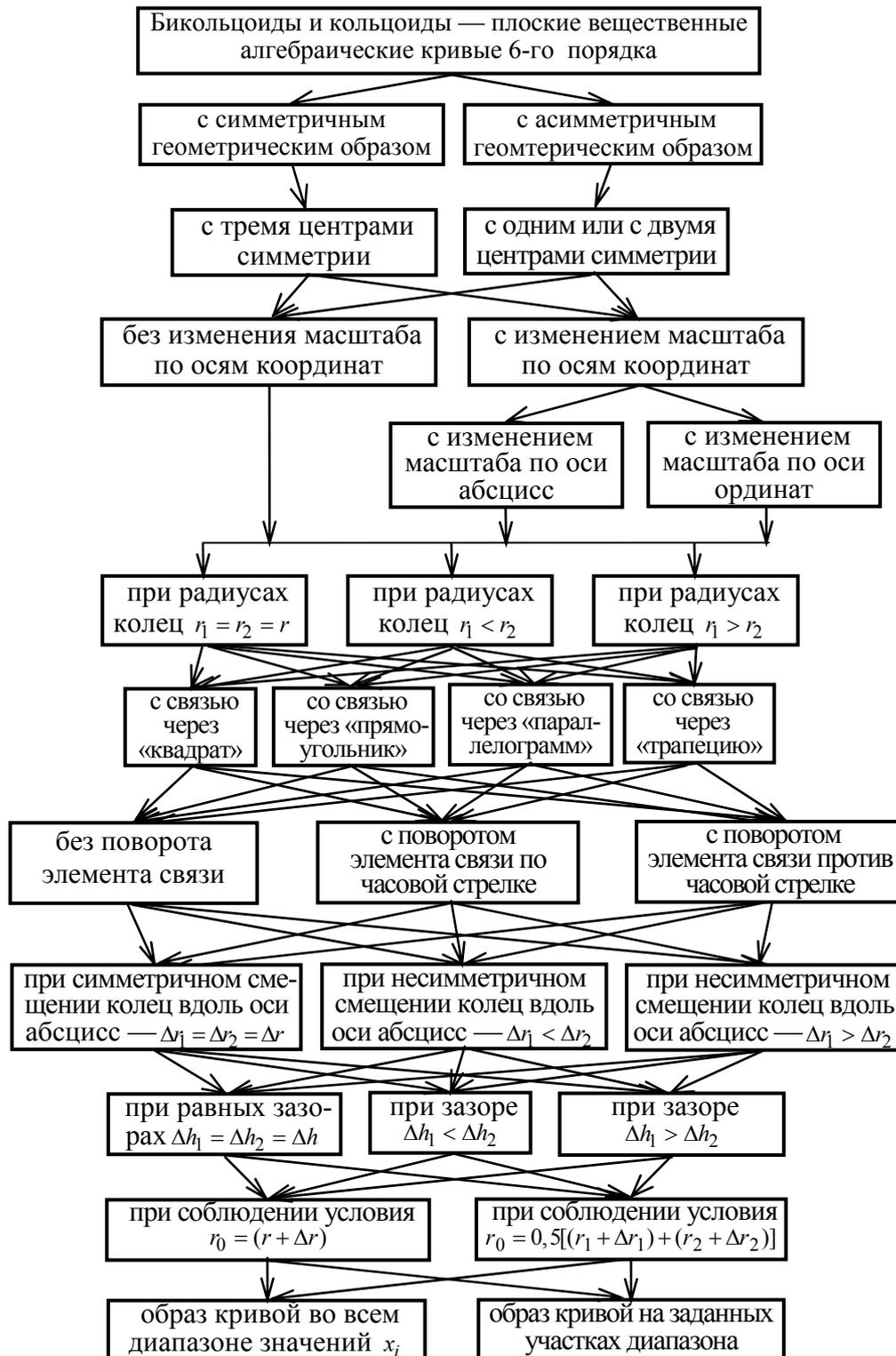


Рис. 11. Классификация бикольцоид

Известно [7], что законы природы управляют неисчерпаемой в своем многообразии картиной физических явлений. Эти законы, в свою очередь, подчиняются принципам симметрии. Симметрия, согласно Дж. Ньюмену, устанавливает забавное и удивительное родство между предметами, явлениями и теориями. Слово „симметрия“ имеет двойственное толкование. В одном смысле симметричное означает нечто весьма пропорциональное, сбалансированное; симметрия показывает тот способ согласования многих частей, с помощью которого они объединяются в целое. Второй смысл этого слова — равновесие [7].

В сознании человека и в природе существуют две группы симметрий: геометрическая и физическая. К первой (видимой) группе симметрии относится симметрия положений, форм, структур. Вторая (не водимая) группа симметрии характеризует симметрию физических явлений и законов природы и лежит

в основе естественнонаучной картины мира.

В этой связи целесообразным является использование признаков «симметрия геометрического образа (фигуры)» и «асимметрия геометрического образа (фигуры)» для характеристики бикольцоиды — вещественной алгебраической кривой шестого порядка, имеющей определенный геометрический образ (см. рис. 2).

Поскольку симметрия всегда связана с центрами симметрии, то различают бикольцоиды, как геометрический образ, с полной симметрией (с тремя центрами симметрии) и с неполной симметрией (асимметричные, с отсутствием одного или двух центров симметрии).

Каждая бикольцоида в прямоугольной системе координат или шкал описывается определенным уравнением величин. Их форма зависит от наличия или отсутствия масштабирования по осям координат. В этой связи в описываемой классификации выделены признаки, связанные с изменением масштаба по осям координат: «без изменения масштаба по осям координат» и «с изменением масштаба по осям координат».

В последнем случае дополнительно выделено еще два различительных признака: «с изменением масштаба по оси абсцисс или по оси ординат» (рис. 11).

Дальнейшее разделение бикольцоид осуществляется по следующим классификационным признакам: «соотношения между радиусами колец», т.е. равные или неравные между собой радиусы колец ($r_1 = r_2 = r$, $r_1 < r_2$, $r_1 > r_2$). Это соотношение приводит к формированию симметричного ($r_1 = r_2 = r$) или асимметричного ($r_1 < r_2$, $r_1 > r_2$) геометрического образа бикольцоиды относительно основного центра симметрии — центра координат (рис. 2, а) или центра пересечения шкал (рис. 2, б).

Геометрический образ бикольцоиды рассматривается как соединенные между собой два кольца. Как показали исследования, элементом соединения колец могут быть плоские фигуры: квадрат, прямоугольник, параллелограмм или трапеция. В этой связи выделен такой классификационный признак, как «тип связей между кольцами». По этому признаку различают образы бикольцоид со связью через квадрат, прямоугольник, параллелограмм или трапецию. Эти группы бикольцоид делятся, в свою очередь, по признаку «направление наклона элемента связи». Различают подгруппы бикольцоид с указанными типами связей без наклона и с наклоном элемента связи по или против часовой стрелки (см. рис. 11).

Так, например, трапеция, как элемент связи между кольцами, расположенная вдоль оси абсцисс, имеет сужение с левой или с правой стороны относительно оси ординат. В этой связи будем различать правостороннюю и левостороннюю трапеции. По признаку «направление сужения элемента связи “трапеция”» могут быть выделены подгруппы бикольцоид с правосторонней и с левосторонней трапециями. По признаку «направление наклона элемента связи» бикольцоиды с данным типом связей делятся на бикольцоиды без поворота и с поворотом относительно оси абсцисс по или против часовой стрелки (см. рис. 11).

Исследования двузначного уравнения величин (9), описывающего бикольцоиду, показал, что возможно получение графических образов бикольцоид с симметричным и асимметричным расположением (смещением) колец вдоль оси абсцисс относительно начала координат на расстоянии Δr_1 от края левого кольца и Δr_2 — от края правого кольца до точки пересечения осей координат (рис. 11). В этой связи выделен классификационный признак «симметрия расположения колец относительно начала координат». По данному признаку все бикольцоиды можно разделить на те, у которых кольца расположены на одинаковых расстояниях от начала координат, т.е. отвечающие условию $\Delta r_1 = \Delta r_2 = \Delta r$, и на разных расстояниях, т.е. отвечающие условиям $\Delta r_1 > \Delta r_2$ и $\Delta r_1 < \Delta r_2$. Обозначение расстояния или смещения по оси абсцисс через Δr обусловлено привязкой его к длине радиуса для удобства вывода уравнений величин.

Еще одним параметром уравнения величин бикольцоиды, влияющим на ее полную симметрию, является так называемый «зазор» (или «щель») по оси ординат или высота Δh элементов связи двух колец. Это обусловило выделение такого классификационного признака, как «соразмерность (симметрия) расположения элементов соединения колец относительно оси абсцисс». По данному признаку бикольцоиды делятся на те, у которых зазор симметричен, т.е. выполняется условие $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h$, характерное для бикольцоид с цилиндрическим типом связи, и на те, у которых зазор асимметричен, т.е. выполняются условия: $\Delta h_1 > \Delta h_2$ и $\Delta h_1 < \Delta h_2$, которые характерны для конусного типа связей.

Дополнительно введен признак «выполнение условий $r_0 = r + \Delta r$ и $r_0 = 0,5[(r_1 + \Delta r_1) + (r_2 + \Delta r_2)]$ », характеризующих равенство или неравенство радиусов колец и их связь с нормированным по значению радиусом r_0 .

И, наконец, по признаку «полнота геометрического образа бикольцоиды», будем различать бикольцоиды с полной симметрией геометрического образа и с частичным нарушением симметрии. К последним отнесем и усеченные слева и справа от оси ординат геометрические образы бикольцоид. Среди них следует упомянуть левостороннюю и правостороннюю бикольцоиды (рис. 9 и рис. 10).

Представленная классификация отражает все многообразие геометрических образов плоской вещественной алгебраической кривой шестого порядка — бикольцоиды.

Выводы. Проблема «о соотношении между алгебраическими формулами и геометрическими

образами» является одной из фундаментальных проблем математики.

В метрологии, как и в математике, также существуют проблемы построения геометрических образов плоских фигур с помощью вещественных алгебраических кривых заданной степени с предписанным расположением компонент этих фигур. Математики решили указанные проблемы только для кривых 2-5 порядка.

Нами впервые в мире доказано существование плоских вещественных алгебраических кривых шестого порядка — бикольцид и их частных случаев: левосторонней и правосторонней кольцид разомкнутого и замкнутого типов и других кривых, полученных при заданных ограничениях параметров бинарной функции преобразования и диапазона изменения переменной x_i .

Впервые в мире выведены аналитические выражения плоских вещественных алгебраических кривых шестого порядка, положено начало их исследованию и развитию.

Требуют дальнейшего исследования ограничений, налагаемых на топологию кривой шестого порядка непосредственно ее алгебраической природой.

Развитие плоских вещественных алгебраических кривых шестого порядка обусловлено необходимостью описания усредненной траектории движения отрицательно заряженных квазичастиц внутри механической системы замкнутого типа и определения совершаемой работы на отдельных участках этого пути при решении задач теории и практики магнитопольных измерений.

Показана возможность получения кривых как замкнутого, так и разомкнутого видов.

Построены плоские вещественные алгебраические кривые 6-го порядка — бикольциды, левосторонние и правосторонние кольциды с разными параметрами, приведены условия и ограничения по их воспроизведению с помощью ППП Grapher 7.0.

Впервые в метрологии разработана и приведена классификация бикольцид, которая в достаточной мере отражает все многообразие плоских вещественных алгебраических кривых 6-го порядка.

Работа имеет научное и практическое значение, поскольку способствует решению технических задач описания движения электронов и других отрицательно заряженных квазичастиц в волноводах указанной выше конфигурации.

Литература

1. Арнольд В. И. Вещественная алгебраическая геометрия / Арнольд В. И. – М. : МЦНМО, 2009. – 88 с.
2. Виро О.Я. Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://www.math.stonybrook.edu/~oleg/math/papers/1989-PloVeAlgKr-postr.pdf>.
3. Элементарная топология [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://dxdy.ru/topic24524.html>.
4. Гудков Д. А. Построение кривой 6-го порядка типа $\frac{5}{1}$ [Электронный ресурс] / Д. А. Гудков // Изв. вузов. Матем. – 1973. – № 3. – С. 28–36. – Режим доступа : <http://www.mathnet.ru/links/8a54f24c0c2a8d70702a9ae69368360e/ivm4418.pdf>.
5. Овал Кассини [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B2%D0%B0%D0%BB_%D0%9A%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%B8%D0%BD%D0%B8.
6. Алгебраическая кривая [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D1%8F.
7. Симметрия [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.milogiya2007.ru/simmetr01.htm>.

References

1. Arnol'd V. I. Veshhestvennaja algebraicheskaia geometrija / Arnol'd V. I. – M. : MCNMO, 2009. – 88 s.
2. Viro O.Ja. Ploskie veshhestvennye algebraicheskie krivye: postroenijsa s kontroliruemoj topologiej [Jelektronnyj resurs]. – Rezhim dostupa : <https://www.math.stonybrook.edu/~oleg/math/papers/1989-PloVeAlgKr-postr.pdf>.
3. Jelementarnaja topologija [Jelektronnyj resurs]. – Rezhim dostupa : <https://dxdy.ru/topic24524.html>.
4. Gudkov D. A. Postroenie krivoj 6-go porjadka tipa [Jelektronnyj resurs] / D. A. Gudkov // Izv. vuzov. Matem. – 1973. – № 3. – S. 28–36. – Rezhim dostupa : <http://www.mathnet.ru/links/8a54f24c0c2a8d70702a9ae69368360e/ivm4418.pdf>.
5. Oval Kassini [Jelektronnyj resurs]. – Rezhim dostupa : https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B2%D0%B0%D0%BB_%D0%9A%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%B8%D0%BD%D0%B8.
6. Algebraicheskaia krivaja [Jelektronnyj resurs]. – Rezhim dostupa : https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D1%8F.
7. Simmetrija [Jelektronnyj resurs]. – Rezhim dostupa : <http://www.milogiya2007.ru/simmetr01.htm>.

Рецензия/Peer review : 17.1.2019 p.

Надрукована/Printed : 15.2.2019 p.

Рецензент: д.т.н., проф. Троцишин І.В.