

А.О. СЯСЬКИЙ, Н.В. ШЕВЦОВА
Рівненський державний гуманітарний університет
О.Ю. ДЕЙНЕКА

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

МІЖФАЗНИЙ РОЗРІЗ В ОРТОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ЕЛІПТИЧНИМ КОНТУРОМ, ПІДСИЛЕНИМ ЗАМКНЕНИМ ПРУЖНИМ РЕБРОМ

В умовах узагальненого плоского напруженого стану розглянуто мішану контактну задачу для нескінченної ортотропної пластинки з еліптичним отвором, контур якого підсилений замкненим пружним ребром, за наявності на межі поділу матеріалів пластинки і ребра симетричного міжфазного розрізу нульової ширини. Моделюючи підсилювальне ребро криволінійним стрижнем сталого прямокутного поперечного перерізу, серединна поверхня якого не співпадає з поверхнею отвору, побудовано систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь для визначення контактних зусиль між пластинкою і ребром, а також внутрішніх сил і моментів у ребрі. Розрахунок початкових параметрів у статично невизначеному підсилювальному ребрі здійснено методом сил. Встановлено структуру шуканих функцій на кінцях ділянки сполучення пластинки і ребра. Наближений розв'язок задачі побудовано методом механічних квадратур і колокації, яким досліджено вплив ортотропії матеріалу пластинки і форми отвору на розподіл напружень в пластинці та підсилювальному ребрі.

Ключові слова: міжфазний розріз, ортотропна пластинка, пружне ребро, поперечна і поздовжня сили, згинальний момент, сингулярні інтегральні рівняння, контактні зусилля.

A.O. SIASKYI, N.V. SHEVTSOVA
Rivne State University of Humanities
O.Y. DEJNEKA

National University of Water Management and Natural Resources, Rivne

INTERFACIAL INCISION IN ORTHOTROPIC PLATE WITH AN ELLIPTICAL CONTOUR, REINFORCED BY A CLOSED RESILIENT RIB

In the conditions of generalized plane stressed state, a mixed contact problem for an infinite orthotropic plate with an elliptical opening whose contour is reinforced by a closed resilient rib is considered in the presence on the boundary of the separation of a plate and rib the symmetric interfacial incision of the zero width. By modelling the reinforcing rib a curved rod of a constant rectangular cross-section, the middle surface of which does not coincide with the surface of the opening, the basic equations of one-dimensional theory are written, which, taking into account the hypothesis of plane cross sections and deformations of the transverse displacement, determine the stress-strain state of the rib. The boundary conditions of the problem are formulated in the form of conditions for the joint deformation of the plate and the rib. Together with the differential equations of strengthening and the canonical equations of the method of forces, they determine the system of singular integral-differential equations for determining the contact efforts between the plate and the rib, as well as the internal forces and moments in the rib. The structure of the searched functions at the ends of the connection area of the plate and the rib are established. The approximate solution of the problem is constructed by the method of mechanical quadratures and collocation, with which it investigated the influence of the orthotropy of the plate material and the shape of the opening on the distribution of stresses in the plate and the reinforcing rib. The essential dependence of the components of the stressed state in the plate and the rib on the shape of the opening and the physical parameters of the plate material are established.

Keywords: interfacial incision, orthotropic plate, resilient rib, transverse and longitudinal forces, bending moment, singular integral equations, contact efforts.

Вступ

У сучасних конструкціях, машинах і спорудах широко використовуються композитні матеріали та кусково-однорідні структури, зокрема анізотропні пластинки з отворами. Для зменшення високої концентрації напружень біля отворів їх контури підсилюють пружними ребрами. Будучи розсіювачами концентрації напружень ці ребра суттєво збільшують жорсткість і стійкість пластинки.

Розв'язок задачі визначення напружено-деформованого стану пластинки з отвором, контур якого підсилено пружним ребром, суттєво залежить від вибору математичної моделі, яка описує деформацію ребра. На даний час найбільш поширеною є модель криволінійного стрижня сталого поперечного перерізу, серединна поверхня якого не співпадає з нульовою поверхнею для чистого згину і поверхнею отвору в пластинці [1–4].

Використовуючи цю модель в роботах [1, 3, 5] розглянуто низку задач про контактну взаємодію ортотропної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра при їх сполученні з гарантованим натягом або методом зварювання.

В процесі виготовлення або експлуатації пластинок із замкненими ребрами жорсткості на межі з'єднання різномірних матеріалів виникають дефекти, зокрема, тріщини або розрізи нульової ширини, які можуть зумовити високу концентрацію напружень і подальше міжфазне руйнування за дії силового навантаження.

Задачі розрахунку напруженого стану пластинки з підкріпленим криволінійним отвором за наявності міжфазного розрізу між пластинкою і ребром в умовах узагальненого плоского напруженого стану досліджені недостатньо. Так в роботах [6, 7] побудовано наближені розв'язки задач для нескінченної ізотропної і ортотропної пластинок з круговим отвором. Для отворів, відмінних від кругового, такі задачі не

розглядалися.

Пропонується числово-аналітичний розв’язок задачі про підсилення контуру еліптичного отвору в нескінченній ортотропній пластинці, яка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, замкненим пружним ребром за наявності симетричного міжфазного розрізу, береги якого в процесі деформації не контактують.

Постановка задачі

Розглянемо нескінченну ортотропну пластинку товщиною $2h$ з еліптичним отвором, контур якого підсилений ізотропним пружним ребром сталого прямокутного поперечного перерізу шириною 2η і товщиною $2h_0$. Розглянута конструкція перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими зусиллями p і q , що діють на нескінченності в напрямках осей еліпса. Це означає, що всі компоненти напруженого стану пластинки і ребра діють в їх спільній серединній площині, яка віднесена до системи декартових (x, y) і полярних (r, δ) координат з полюсом в центрі отвору. Системи відліку обираємо так, щоб вісь Ox співпадала з полярною віссю, віссю симетрії еліпса і визначала один із головних напрямків ортотропії матеріалу пластинки (рис. 1).

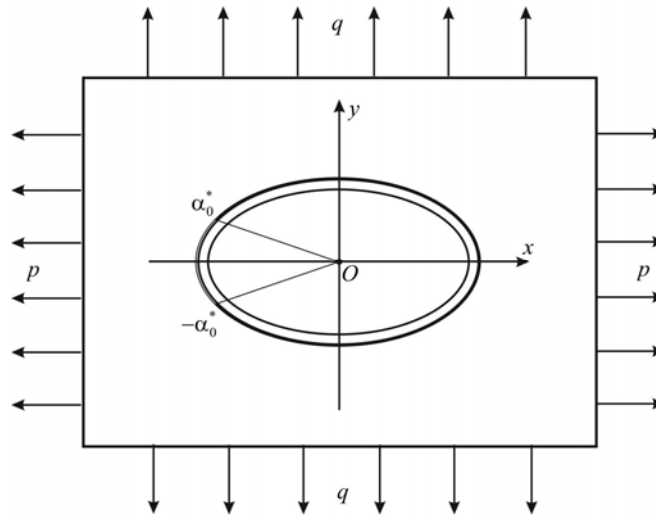


Рис. 1. Розрахункова схема пластинки з підкріпленням отвором

Припустимо, що в результаті виготовлення пластинчастої конструкції чи її експлуатації зовні симетричної ділянки $[-\alpha_0^*, \alpha_0^*]$ (α_0^* – полярний кут) на лінії Γ сполучення пластинки і ребра виник міжфазний розріз нульової ширини, береги якого в процесі деформації не контактують.

Мета роботи – визначення компонент напруженого стану на контурі Γ в пластинці і підсилювальному ребрі та дослідженні впливу на ці величини міжфазного розрізу.

Основні рівняння задачі

Умовно розділимо двокомпонентну конструкцію на окремі елементи (нескінченна пластинка з еліптичним отвором і пружне підсилювальне ребро), замінюючи дію одного тіла на інше невідомими контактними зусиллями.

Нескінченна ортотропна пластинка перебуває у рівновазі під дією навантаження на нескінченності і нормальних T_p та дотичних $S_{p\lambda}$ контактних зусиль, що передаються до контуру Γ від підсилювального ребра.

Нехай форма еліптичного отвору в пластинці визначається функцією [8]

$$z = x + iy = \omega(\zeta) = R_0 \left(\zeta + \frac{\varepsilon}{\zeta} \right), \tag{1}$$

яка реалізує конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ в площині $\zeta = \tilde{\rho}e^{i\lambda}$ на область, яку займає серединна площина пластинки. Тут $R_0 = (a+b)/2 = 1$ – характерний розмір отвору; ε – ексцентриситет еліпса; $a = 1 + \varepsilon$, $b = 1 - \varepsilon$ – півосі еліпса; $(\tilde{\rho}, \lambda)$ – полярні координати точок в площині ζ ; $i = \sqrt{-1}$.

Параметри деформації контуру Γ (відносне видовження та кут повороту нормалі) в пластинці при заданому її навантаженні визначаються за формулами [9]

$$\varepsilon_\lambda = \frac{1}{2E_x h (\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ C(\lambda) T_p(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\Phi_1(\lambda, t) T_p(t) + \Phi_2(\lambda, t) S_{p\lambda}(t)] dt + \alpha \tilde{\varepsilon}_\lambda^0 + \beta \tilde{V}^0 \right\};$$

$$V = \frac{1}{2E_x h(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ C(\lambda) S_{\rho\lambda}(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\Phi_3(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t) + \Phi_4(\lambda, t) T_p(t)] dt + \alpha \tilde{V}^0 - \beta \tilde{\varepsilon}_\lambda^0 \right\}, \quad (2)$$

в яких введено позначення

$$\begin{aligned} \Phi_1(\lambda, t) &= H_1(\lambda, t) - G_1(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2}; \quad \Phi_3(\lambda, t) = H_2(\lambda, t) - G_2(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2}; \quad C(\lambda) = (\beta_1 \beta_2 - \nu_1)(\alpha^2 + \beta^2); \\ \Phi_2(\lambda, t) &= -G_1(\lambda, t) - H_1(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2}; \quad \Phi_4(\lambda, t) = G_2(\lambda, t) + H_2(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2}; \quad \alpha + i\beta = \omega'(\sigma); \quad \sigma = e^{i\lambda}; \\ H_1(\lambda, t) &= -c_2 \alpha(\lambda) \alpha(t) - c_4 \beta(\lambda) \beta(t) + c_3 [\alpha(\lambda) \beta(t) + \beta(\lambda) \alpha(t)]; \quad c_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} [(1 - \beta_1 \beta_2) \cos^2 \lambda - 1]; \\ H_2(\lambda, t) &= c_4 \beta(\lambda) \alpha(t) - c_2 \alpha(\lambda) \beta(t) - c_3 [\alpha(\lambda) \alpha(t) - \beta(\lambda) \beta(t)]; \quad c_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} (1 - \beta_1 \beta_2) \cos \lambda \sin \lambda; \\ G_1(\lambda, t) &= c_2 \beta(\lambda) \beta(t) + c_4 \alpha(\lambda) \alpha(t) + c_3 [\alpha(\lambda) \beta(t) + \beta(\lambda) \alpha(t)]; \quad c_4 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} [(1 - \beta_1 \beta_2) \sin^2 \lambda - 1]; \\ G_2(\lambda, t) &= c_4 \alpha(\lambda) \beta(t) - c_2 \beta(\lambda) \alpha(t) + c_3 [\beta(\lambda) \beta(t) - \alpha(\lambda) \alpha(t)]; \quad \tilde{\varepsilon}_\lambda^0 + i\tilde{V}^0 = \frac{P}{2} [a + b(\beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \beta_2) - \\ & - (a + b(\beta_1 + \beta_2 + \beta_1 \beta_2)) e^{-2i\lambda}] + \frac{Q}{2} [a(-1 + \beta_1 + \beta_2) \beta_1 \beta_2 + b\beta_1^2 \beta_2^2 + \beta_1 \beta_2 (a(1 + \beta_1 + \beta_2) + b\beta_1 \beta_2) e^{-2i\lambda}]; \quad (3) \end{aligned}$$

E_x, ν_x – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки в напрямку осі Ox ; β_1, β_2 – корені характеристичного рівняння [8]; $[-\alpha_0, \alpha_0]$ – образ ділянки $[-\alpha_0^*, \alpha_0^*]$ при відображенні (1).

Якщо контактні зусилля стануть відомі, то кільцеві зусилля на Γ визначаються за формулою [9]

$$\begin{aligned} T_\lambda &= -\frac{(1+\beta_1)(1+\beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} \left[(l_1 l_2 + (a+b)l_4 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda) R_1 + ((a+b)l_1 - l_2 l_4) R_2 \sin \lambda \cos \lambda \right] - \\ & - \frac{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} \left[(l_4(b-a) \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda - l_1 l_3) \tilde{R}_3 + (l_4 l_3 + (b-a)l_1) \tilde{R}_4 \sin \lambda \cos \lambda \right] + T_\lambda^0. \quad (4) \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} R_1 &= -2T_p^* + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[T_p^*(t) - S_{\rho\lambda}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt; \quad R_2 = -2S_{\rho\lambda}^* + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[S_{\rho\lambda}^*(t) + T_p^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt; \\ R_3 &= 4T_p^* - R_1; \quad R_4 = 4S_{\rho\lambda}^* + R_2; \quad T_\lambda^0 = \frac{l_5}{\Delta_1\Delta_2} [p(l_1 + l_4 \sin^2 \lambda) + q\beta_1\beta_2(l_4 \cos^2 \lambda - l_1)]; \\ \tilde{R}_3 &= R_3 \cos 2\lambda + R_4 \sin 2\lambda; \quad \tilde{R}_4 = R_4 \cos 2\lambda - R_3 \sin 2\lambda; \quad T_p^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_p + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma); \\ l_1 &= a^2 \sin^2 \lambda - b^2 \beta_1 \beta_2 \cos^2 \lambda; \quad l_2 = a \sin^2 \lambda - b \cos^2 \lambda; \quad l_3 = a \sin^2 \lambda + b \cos^2 \lambda; \\ l_4 &= ab(\beta_1 + \beta_2); \quad l_5 = a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda; \quad \Delta_j = a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \beta_j^2 \cos^2 \lambda; \quad (j=1, 2). \quad (5) \end{aligned}$$

Підсилювальне ребро моделюємо замкненим криволінійним стрижнем (кільцем) сталого прямокутного поперечного перерізу, який перебуває у рівновазі під дією контактних зусиль, що передаються до його зовнішньої поверхні від пластинки. Задача розрахунку напруженого стану такого стрижня статично невизначена.

Використовуючи ідею методу сил розрахунку статично невизначеної стрижневої системи, умовно переріжемо стрижень площиною $\lambda = -\pi$ і до торців перерізу прикладемо статично зрівноважені поздовжні сили N_0 і згинальні моменти L_b^0 . Оскільки задача симетрична відносно осі Ox , то поперечні сили відсутні ($Q_0 = 0$). У результаті цього одержимо еквівалентний статично визначений розімкнений стрижень, який перебуває у рівновазі під дією навантаження на його торцях і контактних зусиль (рис. 2).

Компоненти його напруженого стану подамо у вигляді

$$\begin{aligned} N &= -N_0 \cos \theta + \tilde{N}; \quad Q = -N_0 \sin \theta + \tilde{Q}; \\ L_b &= L_b^0 + [x - x_0 - \eta(1 + \cos \theta)] N_0 + \tilde{L}_b, \quad (6) \end{aligned}$$

де N, Q, L_b – поздовжня і поперечна сили та згинальний момент, що виникають у поперечних

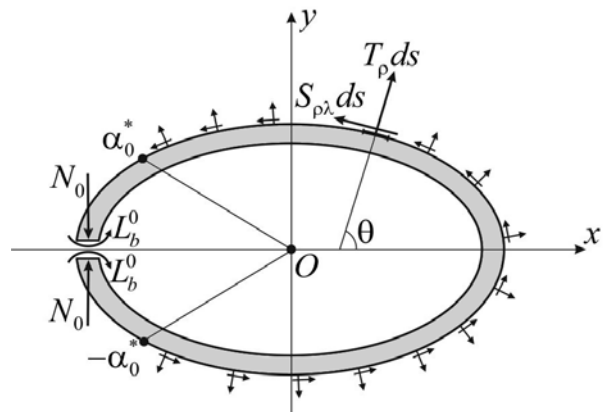


Рис. 2. Розрахункова схема підсилювального ребра

перерізах і віднесені до його осі; \tilde{N} , \tilde{Q} , \tilde{L}_b – відповідні складові компонент, що викликані контактними зусиллями, причому $\tilde{N}(-\alpha_0) = \tilde{Q}(-\alpha_0) = \tilde{L}_b(-\alpha_0) = 0$; θ – кут нахилу нормалі в точці (x, y) контуру Γ до осі Ox ; $e^{i\theta} = e^{i\lambda} \omega'(\sigma) / |\omega'(\sigma)|$; $x_0 = x(-\pi)$.

Напружено-деформований стан розімкненого ребра опишемо основними рівняннями одновимірної теорії криволінійних стрижнів, побудованими з урахуванням гіпотези плоских перерізів і деформацій поперечного зсуву [4, 10]:

- диференціальні рівняння рівноваги елемента стрижня при $\lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]$

$$T_p = \frac{\tilde{N}(\lambda)}{\rho} - \frac{1}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\tilde{Q}(\lambda)}{d\lambda}; \quad S_{p\lambda} = -\frac{\tilde{Q}(\lambda)}{\rho} - \frac{1}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\tilde{N}(\lambda)}{d\lambda}; \quad \frac{d\tilde{L}_b(\lambda)}{d\lambda} - \eta \frac{d\tilde{N}(\lambda)}{d\lambda} - |\omega'(\sigma)| \tilde{Q}(\lambda) = 0, \quad (7)$$

в яких ρ – радіус кривини контуру Γ ;

- фізичні залежності для зовнішнього поздовжнього волокна стрижня, яке контактує з пластинкою

$$\varepsilon_\lambda^{(c)} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[\tilde{N}(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c}{\omega_0} \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \left(\tilde{L}_b(\lambda) + L_b^0 \right) + \frac{\eta + \eta_c}{\omega_0} \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) (x - \eta \cos \theta - (x_0 + \eta)) N_0 - N_0 \cos \theta \right];$$

$$\frac{d\theta_b}{d\theta} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[\tilde{N}(\lambda) + \frac{\rho - \eta}{\omega_0} \tilde{L}_b(\lambda) - 2(1 + \nu_0) \mu \frac{d\tilde{Q}(\lambda)}{d\theta} + \frac{\rho - \eta}{\omega_0} L_b^0 + \frac{\rho - \eta}{\omega_0} (x - (\eta + \eta_c) \cos \theta - (x_0 + \eta) + 2(1 + \nu_0) \mu \eta_c \cos \theta) N_0 \right]; \quad \lambda \in [-\pi; \pi], \quad (8)$$

де введено позначення: $\varepsilon_\lambda^{(c)}$, θ_b – відносне видовження волокна і кут повороту нормалі до нього; $E_0 F_0$ – жорсткість стрижня на розтяг (стиск); $F_0 = 2h_0 \cdot 2\eta$ – площа його поперечного перерізу; E_0, ν_0 – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу стрижня; η_c – відстань від осі стрижня до нейтрального для чистого згину поздовжнього волокна; $\omega_0 = (\rho - \eta) \eta_c$; μ – стала (для прямокутного перерізу $\mu = 1.2$);

- умови рівноваги підсилювального ребра як жорсткого цілого

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (T_p(\lambda) + i S_{p\lambda}(\lambda)) e^{i\lambda} \omega'(\sigma) d\lambda = 0; \quad \tilde{L}_b(\alpha_0) - \eta \tilde{N}(\alpha_0) - \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \tilde{Q}(\lambda) |\omega'(\sigma)| d\lambda = 0, \quad (9)$$

які з урахуванням симетрії задачі відносно осі Ox і формул (6) можна перетворити до вигляду

$$\tilde{N}(\pm\alpha_0) = \tilde{Q}(\pm\alpha_0) = \tilde{L}_b(\pm\alpha_0) = 0. \quad (10)$$

Останні співвідношення визначають структуру функцій \tilde{N} , \tilde{Q} , \tilde{L}_b в околі кінців ділянки сполучення пластинки і підсилювального ребра.

Початкові параметри N_0, L_b^0 визначаються із канонічних рівнянь методу сил [2, 10]

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[\frac{\tilde{N}(\lambda)}{\rho} + \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \frac{\tilde{L}_b(\lambda)}{\omega_0} \right] |\omega'(\sigma)| d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{L_b^0}{\omega_0} + \frac{N_0}{\omega_0} (x - (\eta + \eta_c) \cos \theta - (x_0 + \eta)) \right] \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) |\omega'(\sigma)| d\lambda = 0;$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left[(\rho \cos \theta - x) \frac{\tilde{N}(\lambda)}{\rho} + \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \left((\eta + \eta_c) \cos \theta - x \right) \frac{\tilde{L}_b(\lambda)}{\omega_0} - 2(1 + \nu_0) \mu \sin \theta \tilde{Q}(\lambda) \right] |\omega'(\sigma)| d\lambda +$$

$$+ N_0 \int_{-\pi}^{\pi} \left[(x - \rho \cos \theta) \frac{\cos \theta}{\rho} + \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \frac{((\eta + \eta_c) \cos \theta - x)(x - x_0 - \eta(\cos \theta + 1))}{\omega_0} \right] +$$

$$+ \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) 2(1 + \nu_0) \mu \sin^2 \theta \right] |\omega'(\sigma)| d\lambda + \frac{L_b^0}{\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) [(\eta + \eta_c) \cos \theta - x] |\omega'(\sigma)| d\lambda = 0, \quad (11)$$

які еквівалентні умовам однозначності зміщень точок осі стрижня і кутів повороту його поперечних перерізів.

Співвідношення (7), (8), (10), (11) визначають повну систему рівнянь для розрахунку напружено-деформованого стану замкненого підсилювального ребра.

Математична модель задачі

Крайові умови сполучення пластинки і підсилювального ребра формулюємо у вигляді умов їх сумісного деформування на ділянці сполучення

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\lambda^{(c)}; \quad V = \theta_b; \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]. \quad (12)$$

Підставляючи (2), (8) в крайові умови (12), одержимо після певних перетворень систему сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення функцій $T_p, S_{p\lambda}, \tilde{N}, \tilde{Q}, \tilde{L}_b$ і сталих N_0, L_b^0 .

$$\begin{aligned} & \frac{E_0 F_0}{2E_x h (\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ C(\lambda) T_p(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\Phi_1(\lambda, t) T_p(t) + \Phi_2(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t)] dt + \alpha \tilde{\varepsilon}_\lambda^0 + \beta \tilde{\nu}^0 \right\} = \\ & = \tilde{N}(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c}{\omega_0} \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \left(\tilde{L}_b(\lambda) + L_b^0 \right) + \frac{\eta + \eta_c}{\omega_0} \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) (x - \eta \cos \theta - (x_0 + \eta)) N_0 - N_0 \cos \theta; \quad (13) \\ & \frac{E_0 F_0}{2E_x h (\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ C(\lambda) S_{\rho\lambda}(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\Phi_3(\lambda, t) S_{\rho\lambda}(t) + \Phi_4(\lambda, t) T_p(t)] dt + \alpha \tilde{\nu}^0 - \beta \tilde{\varepsilon}_\lambda^0 \right\} = \\ & = \int_0^\lambda \left[\frac{\tilde{N}(\lambda)}{\rho} + \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \left(\frac{\tilde{L}_b(\lambda)}{\omega_0} + \frac{L_b^0}{\omega_0} + (x - (\eta + \eta_c) \cos \theta - (x_0 + \eta)) \frac{N_0}{\omega_0} \right) \right] |\omega'(\sigma)| d\lambda - 2(1 + \nu_0) \mu (\tilde{Q}(\lambda) - N_0 \sin \theta); \end{aligned}$$

Цю систему доповнюємо умовами зв'язку між функціями T_p , $S_{\rho\lambda}$ і \tilde{N} , \tilde{Q} , \tilde{L}_b (7) та співвідношеннями (11) для визначення сталих N_0 і L_b^0 .

Рівняння (7), (11), (13) визначають математичну модель сформульованої задачі і слугують для визначення контактних зусиль між пластинкою і підсилювальним ребром та внутрішніх силових факторів у ребрі. Покладаючи в них $\beta_1 = \beta_2 = 1$, одержимо математичну модель задачі для ізотропної пластинки з еліптичним отвором. При $\varepsilon = 0$ система (7), (11), (13) визначає розв'язок задачі для ортотропної пластинки з круговим отвором [7].

Наближений розв'язок задачі

Точний розв'язок системи (7), (11), (13) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання необхідно встановити структуру шуканих функцій на кінцях ділянки сполучення пластинки і ребра.

На підставі умов (10) можна зробити висновок, що функції \tilde{N} , \tilde{Q} і \tilde{L}_b обмежені та неперервні на проміжку $[-\alpha_0; \alpha_0]$, а на його кінцях дорівнюють нулю.

Оскільки розглядувана задача відноситься до мішаних контактних задач теорії пружності, то відповідно до [11], контактні зусилля T_p , $S_{\rho\lambda}$ на кінцях $\lambda = \pm \alpha_0$ мають кореневу особливість з локальною осциляцією. Нехтуючи її впливом, наближений розв'язок задачі побудуємо комбінованим методом механічних квадратур і колокації [9, 12, 13].

З цієї метою перейдемо в системі (7), (11), (13) до проміжку інтегрування $[-1; 1]$. Це можна зробити заміною змінних

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = a_0 \xi; \quad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = a_0 s, \quad (14)$$

де

$$a_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}; \quad d\lambda = \frac{2a_0 d\xi}{1 + a_0^2 \xi^2}; \quad dt = \frac{2a_0 ds}{1 + a_0^2 s^2}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} dt = \frac{2ds}{\xi - s} + \frac{2a_0 ds}{1 + a_0^2 s^2}.$$

Враховуючи структуру шуканих функцій на кінцях проміжку інтегрування $[-1; 1]$, їх можна подати в такому вигляді

$$\{T_p(\xi), S_{\rho\lambda}(\xi)\} = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \{\Psi_1(\xi), \Psi_2(\xi)\}; \quad \{\tilde{N}(\xi), \tilde{Q}(\xi), \tilde{L}_b(\xi)\} = \sqrt{1 - \xi^2} \{\Psi_3(\xi), \Psi_4(\xi), \Psi_5(\xi)\}. \quad (15)$$

Тут $\Psi_1(\xi)$, $\Psi_2(\xi)$, $\Psi_3(\xi)$, $\Psi_4(\xi)$, $\Psi_5(\xi)$ – обмежені та неперервні на $[-1; 1]$ функції.

Побудуємо для них інтерполяційні поліноми Лагранжа, вибравши за вузли інтерполяції корені многочлена Чебишова першого роду $\varphi_n = \frac{2n-1}{2M_0} \pi$ порядку M_0 [14]

$$\{\Psi_1(\xi), \Psi_2(\xi), \Psi_3(\xi), \Psi_4(\xi), \Psi_5(\xi)\} = \sum_{n=1}^{M_0} \{A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, A_n^{(3)}, A_n^{(4)}, A_n^{(5)}\} \Phi(\psi, \varphi_n), \quad (16)$$

в яких введено позначення

$$\Phi(\psi, \varphi_n) = \frac{(-1)^{n+1} \cos M_0 \psi \sin \varphi_n}{M_0 (\cos \psi - \cos \varphi_n)}; \quad \cos \psi = \xi; \quad \cos \varphi = s; \quad \varphi, \psi \in [0; \pi]; \quad A_n^{(1)}, \dots, A_n^{(5)} - \text{довільні сталі.}$$

Використовуючи властивість $\Phi(\varphi_n, \varphi_n) = 1$, знаходимо у вузлах інтерполяції

$$\begin{aligned} \{T_p(\lambda_k), S_{\rho\lambda}(\lambda_k), \tilde{N}(\lambda_k), \tilde{Q}(\lambda_k), \tilde{L}_b(\lambda_k)\} &= \left\{ \frac{A_k^{(1)}}{\sin \psi_k}, \frac{A_k^{(2)}}{\sin \psi_k}, A_k^{(3)} \sin \psi_k, A_k^{(4)} \sin \psi_k, A_k^{(5)} \sin \psi_k \right\}; \\ \frac{d}{d\lambda} \{\tilde{N}(\xi), \tilde{Q}(\xi), \tilde{L}_b(\xi)\}_{\lambda=\lambda_k} &= -\frac{1 + a_0^2 \cos \psi_k}{2a_0 \sin \psi_k} \sum_{n=1}^{M_0} \{A_n^{(3)} \sin \varphi_n, A_n^{(4)} \sin \varphi_n, A_n^{(5)} \sin \varphi_n\} a_{nk}, \quad (17) \end{aligned}$$

де $a_{nk} = \frac{\cos \varphi_n}{2 \sin \varphi_n}$ при $k = n$; $a_{nk} = \frac{(-1)^{n+k} \sin \psi_k}{\cos \varphi_n - \cos \psi_k}$ при $k \neq n$; $\psi_k = \frac{2k-1}{2M_0} \pi$.

Регулярні інтеграли від функцій $T_p(\lambda)$, $S_{\rho\lambda}(\lambda)$, $\tilde{N}(\lambda)$, $\tilde{Q}(\lambda)$, $\tilde{L}_b(\lambda)$ визначаються за квадратурними формулами Гаусса [14]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \{T_p(t), \tilde{N}(t)\} F(\lambda_k, t) dt = \frac{2}{M_0} \sum_{n=1}^{M_0} \left\{ \frac{A_n^{(1)}}{\sin \varphi_n}, A_n^{(3)} \sin \varphi_n \right\} F(\lambda_k, t_n) \frac{a_0 \sin \varphi_n}{1 + a_0^2 \cos^2 \varphi_n}. \quad (18)$$

Тут $F(\lambda, t)$ – регулярна на $[-1; 1]$ функція.

Для обчислення сингулярних інтегралів з ядрами Гільберта у вузлах інтерполяції $\lambda = \lambda_k$ використаємо квадратурну формулу [9, 12, 13]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_p(t) F(\lambda_k, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda_k - t}{2} dt = \frac{2}{M_0} \sum_{n=1}^{M_0} \frac{A_n^{(1)}}{\sin \varphi_n} F(\lambda_k, t_n) \left[\frac{a_0^2 \cos \varphi_n \sin \varphi_n}{1 + a_0^2 \cos^2 \varphi_n} - \frac{\sin \varphi_n}{\sin \psi_k} \operatorname{ctg} \frac{\psi_k + (-1)^{n+k} \varphi_n}{2} \right]. \quad (19)$$

Інтеграли зі змінною верхньою межею визначаються за формулою трапецій.

Підставляючи співвідношення (17)-(19) в систему (7), (11), (13) та порівнюючи ліві та праві частини рівнянь у вузлах інтерполяції (колокації), одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $A_n^{(3)}$, $A_n^{(4)}$, $A_n^{(5)}$ та N_0 , L_b^0 . Якщо ці сталі стануть відомі, то шукані функції у вузлах колокації визначаються за формулами (17). Нормальні напруження в зовнішньому і внутрішньому поздовжніх волокнах ребра знаходимо за законом Гука в його одновимірній формі, а найбільші дотичні напруження в осьовому волокну – за формулою Журавського [2]

$$\sigma^{(1)} = \frac{1}{F_0} \left[N + \frac{\eta + \eta_c}{\eta_c} \frac{L_b}{\rho} \right]; \quad \sigma^{(2)} = \frac{1}{F_0} \left[N + \frac{\eta_c - \eta}{\eta_c} \frac{L_b}{\rho - 2\eta} \right], \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F_0}.$$

Для прикладу досліджено напружений стан на контурі еліптичного ($\varepsilon = \pm 0.2$) отвору в пластинці та підсилювальному ребрі з такими фізико-геометричними параметрами:

$$\alpha_0 = \frac{2\pi}{3}; \quad \frac{h_0}{h} = \frac{4}{3}; \quad \frac{\eta}{R_0} = 0.05; \quad \frac{\sqrt{E_x E_y}}{E_0} = 5.$$

Результати розрахунку величин T_p , $S_{\rho\lambda}$, T_λ , $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, τ_{\max} при $p = 0$, $q = q$, $M_0 = 171$ ілюструються на рис. 3–8. Характеристики ортотропних матеріалів і лінії, які відповідають цим матеріалам на рисунках, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Матеріал пластинки	β_1	β_2	ν_x	E_x/E_y	Лінії
ізотропний матеріал	1	1	0.300	1	—————
скло-епоксид	2.2712	0.7626	0.250	3	-----
графіт-епоксид	6.9992	0.7144	0.250	25	-. - . - . - . - .
епоксид-скло	0.4400	1.3100	0.083	1/3
епоксид-графіт	0.1430	1.4010	0.010	1/25	- . . - . . - .

Аналізуючи одержані результати, приходимо до таких висновків:

- у результаті числових експериментів встановлено, що вплив деформацій поперечного зсуву в підсилювальному ребрі на розподіл напружень у пластинчастій конструкції незначний і ним можна знехтувати в інженерних розрахунках;

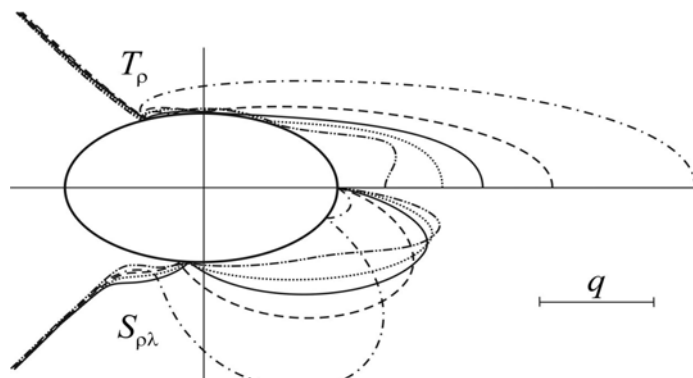
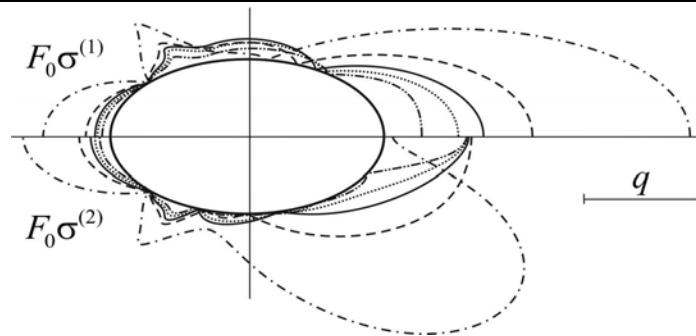
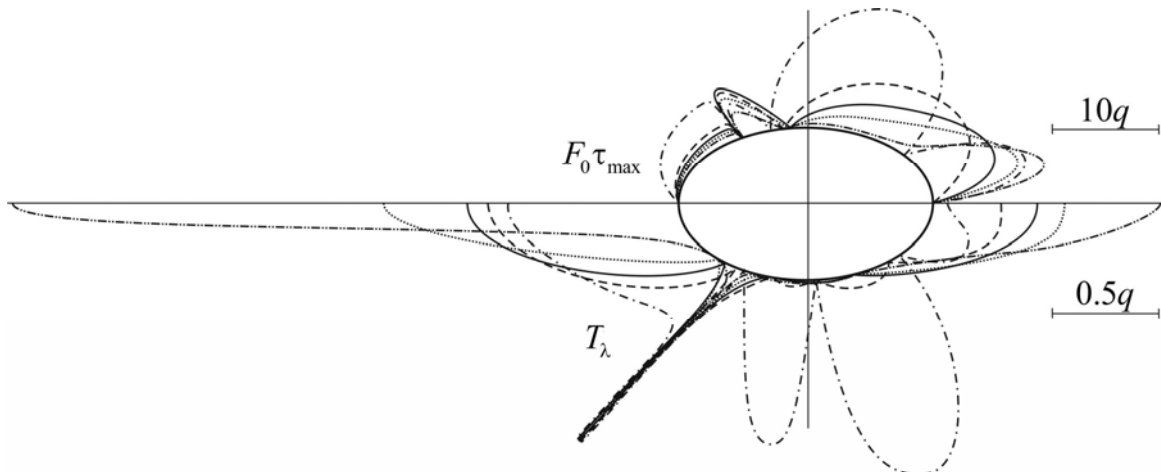
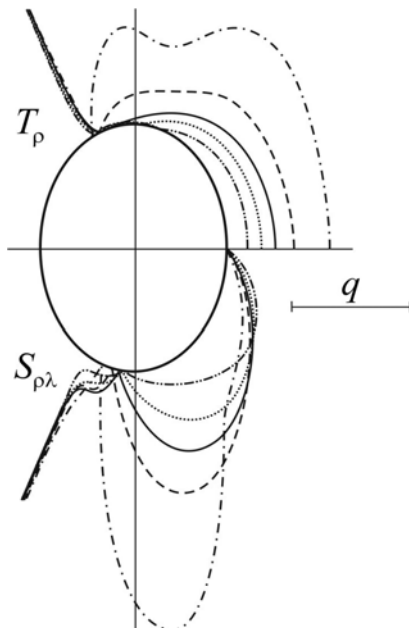
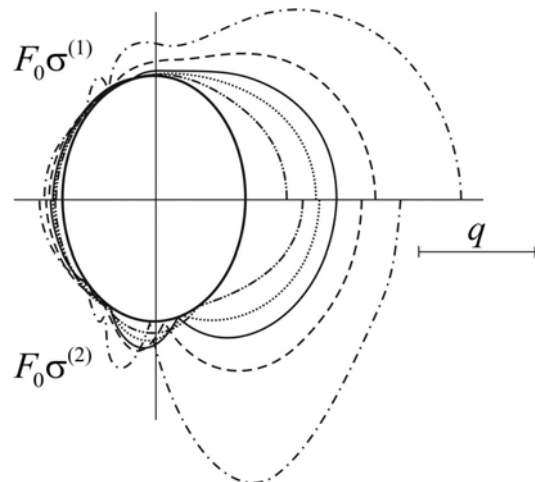


Рис. 3. Епюри розподілу контактних зусиль на контурі Γ в пластинці ($\varepsilon = 0.2$)

Рис. 4. Епюри розподілу нормальних напружень в крайніх волокнах підсилювального ребра ($\varepsilon = 0.2$)Рис. 5. Епюри розподілу максимальних дотичних напружень в осьовому волокні підсилювального ребра і кільцевих зусиль на контурі Γ в пластинці ($\varepsilon = 0.2$)Рис. 6. Епюри розподілу контактних зусиль на контурі Γ в пластинці ($\varepsilon = -0.2$)Рис. 7. Епюри розподілу нормальних напружень в крайніх волокнах підсилювального ребра ($\varepsilon = -0.2$)

- ортотропія матеріалу пластинки, незалежно від форми отвору, суттєво впливає на всі розрахункові величини; так, при збільшенні E_x/E_y максимальні значення T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, τ_{\max} різко зростають; для кільцевих зусиль T_λ спостерігається обернена залежність;

- наявність підсилювального ребра дозволяє суттєво зменшити максимальні значення T_λ ; так, при розтягу пластинки вздовж малої осі еліпса і підсилення ділянки з найбільшою кривиною максимальні значення T_λ для матеріалу епоксид-графіт зменшуються в 3.06 разу;

- запропонований метод без особливих змін можна перенести на випадок, коли сполучення пластинки і ребра здійснено методом зварювання.

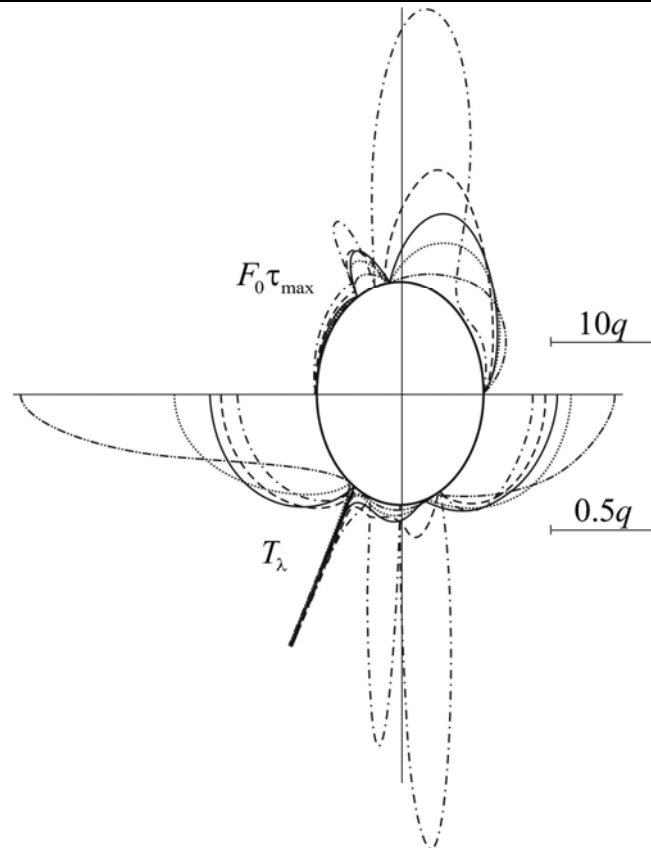


Рис. 8. Епюри розподілу максимальних дотичних напружень в осьовому волокні підсилювального ребра і кільцевих зусиль на контурі Γ в пластинці ($\nu = -0.2$)

Література

1. Мартынович Т.Л. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами / Т.Л. Мартынович, В.Е. Юринец. – Львов : Высшая школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 160 с.
2. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Є.С. Уманський. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.
3. Шереметьев М.П. Пластинки с подкрепленным краем / М.П. Шереметьев. – Львов : Издательство Львовского университета, 1960. – 258 с.
4. Филин А.П. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем / А.П. Филин, О.Д. Тананайко, И.М. Чернева, М.А. Шварц. – Ленинград : Стройиздат, 1983. – 232 с.
5. Божидарнік В.В. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композицій. Т. 2. Математичні методи в задачах неперервно армованих композитів / В.В. Божидарнік, О.Є. Андрейків, Г.Т. Сулим. – Луцьк : Надстир'я, 2007. – 410 с.
6. Сяський А.О. Міжфазна тріщина в нескінченній ізотропній пластинці з підкріпленням круговим отвором / А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, О.Ю. Дейнека // Вісник Національного університету водного господарства і природокористування. Серія «Технічні науки». – 2017. – Вип. 4 (80). – С. 168–176.
7. Сяський А.О. Міжфазний розрив в ортотропній пластинці з підсиленням круговим отвором / А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, О.Ю. Дейнека // Вісник Хмельницького національного університету. – 2018. – № 5 (265). – С. 176–181.
8. Лехницький С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницький. – Москва : Гостехиздат, 1957. – 464 с.
9. Сяський А.О. Передача сил до криволінійного отвору нескінченної ортотропної пластинки стрижнями змінної жорсткості / А.О. Сяський, Ю.В. Батишкіна // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 5–11.
10. Сяський А. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів / А. Сяський, Н.Шевцова // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2015. – Т. 79, № 3. – С. 24–30.
11. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – Москва : Наука, 1966. – 708 с.
12. Сяський А.А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением / А.А. Сяський, В.А. Сяський // Прикладная механика. – 1983. – Т. 19, № 5. – С. 94–99.
13. Сяський А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием / А.А. Сяський // Прикладная математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 2. – С. 247–254.

14. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости / А.И. Каландия. – Москва : Наука, 1973. – 304 с.

References

1. Martynovich T.L. Kontaktnye vzaimodejstviya plastin s uprugimi jelementami / T.L. Martynovich, V.E. Jurinec. – L'vov : Vysshaja shkola. Izd-vo pri L'vov. un-te, 1984. – 160 s.
2. Pysarenko H.S. Opir materialiv / H.S. Pysarenko, O.L. Kvitka, Ye.S. Umanskyi. – Kyiv : Vyshcha shkola, 2004. – 655 s.
3. Sheremet'ev M.P. Plastinki s podkreplennym kraem / M.P. Sheremet'ev. – L'vov : Izdatel'stvo L'vovskogo universiteta, 1960. – 258 s.
4. Filin A.P. Algoritmy postroeniya razreshajushhijh uravnenij mehaniki sterzhnevijh sistem / A.P. Filin, O.D. Tananajko, I.M. Cherneva, M.A. Shvarc. – Leningrad : Strojizdat, 1983. – 232 s.
5. Bozhydarnik V.V. Mekhanika ruinovannia, mitsnist i dovhovichnist neperervno armovanykh kompozytsii. T. 2. Matematychni metody v zadachakh neperervno armovanykh kompozytiv / V.V. Bozhydarnik, O.Ie. Andreikiv, H.T. Sulym. – Lutsk : Nadstyrnia, 2007. – 410 s.
6. Siaskyi A.O. Mizhfazna trishchyna v neskinchennii izotropnii plastyntsi z pidkriplenym kruhovym otvorom / A.O. Siaskyi, N.V. Shevtsova, O.Iu. Deineka // Visnyk Natsionalnoho universytetu vodnoho hospodarstva i pryrodokorystuvannia. Serii «Tekhnichni nauky». – 2017. – Vyp. 4 (80). – S. 168–176.
7. Siaskyi A.O. Mizhfaznyi rozriz v ortotropnii plastyntsi z pidsylenym kruhovym otvorom / A.O. Siaskyi, N.V. Shevtsova, O.Iu. Deineka // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. – 2018. – № 5 (265). – S. 176–181.
8. Lehnickij S.G. Anizotropnye plastinki / S.G. Lehnickij. – Moskva : Gostehizdat, 1957. – 464 s.
9. Siaskyi A.O. Peredacha syl do kryvoliniinoho otvoru neskinchennoi ortotropnoi plastynky stryzhniamy zminnoi zhorstkosti / A.O. Siaskyi, Yu.V. Batyshkina // Visnyk Ternopil'skoho derzhavnogo tekhnichnoho universytetu. – 2004. – T. 9, № 4. – S. 5–11.
10. Siaskyi A. Zastosuvannia metodu syl dlia statychnoho rozrakhunku zamknyenykh kryvoliniinykh stryzhniv / A. Siaskyi, N. Shevtsova // Visnyk Ternopil'skoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu. – 2015. – T. 79, № 3. – S. 24–30.
11. Mushelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti / N.I. Mushelishvili. – Moskva : Nauka, 1966. – 708 s.
12. Sjas'kij A.A. Naprjazhennoe sostojanie kusochno-odnorodnoj plastinki s uprugim vkljucheniem / A.A. Sjas'kij, V.A. Sjas'kij // Prikladnaja mehanika. – 1983. – T. 19, № 5. – S. 94–99.
13. Sjas'kij A.A. Uprugoe ravnovesie plastinki s chastichno podkreplennym krivolinejnym otverstiem / A.A. Sjas'kij // Prikladnaja matematika i mehanika. – 1986. – T. 50, № 2. – S. 247–254.
14. Kalandija A.I. Matematicheskie metody dvumernoj uprugosti / A.I. Kalandija. – Moskva : Nauka, 1973. – 304 s.

Рецензія/Peer review : 12.11.2018 р.

Надрукована/Printed : 15.2.2019 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Бомба А.Я.