УДК 339.747

А.В.Верстяк,
Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича,
В.П.Николюк,
Буковинський державний фінансово-економічний університет
м. Чернівці

РОЗРОБКА МЕТОДОЛОГІЇ ПРОГНОЗУВАННЯ ЗМІНИ ФАКТОРІВ ПОШИРЕННЯ ФІНАНСОВИХ ІНФЕКЦІЙ

У статті розглядається проблема поширення фінансових інфекцій. Окрема увага приділяється проблемі емпіричного дослідження проведення стрес тестів. Запропоновано інструментарій, який використовує спеціальний алгоритм для визначення очікуваного впливу на зміну ризик-факторів у випадку реалізації різних сценаріїв. Як приклад, фундаментальним ризик-фактором моделі є зміна індексу MSCI.

В статье рассматривается проблема распространения финансовых инфекций. Отдельное внимание уделяется проблеме эмпирического исследования проведения стресс-тестов. Предложен инструментарий, который использует специальный алгоритм для определения ожидаемого влияния на изменение факторов риска в случае реализации различных сценариев. Как пример, фундаментальным риск-фактором модели является изменение индекса MSCI.

The authors investigate the problem of financial contagion. Separate attention is spared to the problem of empiric research of stress-testing. The authors offer a toolkit that uses a special algorithm to determine the expected impact of the change of risk factors in the case of different scenarios. As an example, the fundamental risk-factor in the model is a variation of the MSCI.

Ключові слова: фінансова криза, трансмісія фінансових шоків, фінансова інфекція, економетрика, система одночасних рівнянь.

Аналіз розвитку Європейської боргової кризи в літературних джерелах показав, що однією із основних причин розвитку кризи була втрата довіри інвесторів, які мали сумніви у здатності регулюючих органів своєчасно зупинити трансмісію шоків, тому включення суб'єктивних прогнозів інвесторів (тобто експертних оцінок очікуваних ризиків) у моделях фінансової стабільності та поширення фінансових інфекцій виступає одним із головних завдань в управлінні інвестиційним портфелем.

Будь-яка модель ризику, яка ґрунтується на історичних сценаріях, параметричних випадках чи методі Монте-Карло, відповідно до заданого розподілу підлягає оцінці ризику, а отже апріорі є доволі складною, а її практична реалізація неможлива. Тому важливим є розробка методології, яка дозволить науковцям та практикам приймати рішення на основі будь-якої моделі ризику.

Основний підхід у вирішенні вищезазначеного завдання базується на відомій моделі Блека-Літтермана [1], в якій розглядаються проблеми формування портфеля активів з урахуванням суб'єктивної думки інвестора. Зазначена модель дає можливість враховувати інтуїтивні припущення інвесторів та базується на методології оцінки фінансових активів CAPM (Capital Asset Pricing Model). Модель Блека-Літтермана дозволяє інвестору враховувати свої прогнози щодо прибутковості певних активів при побудові ефективного портфеля цінних паперів на основі оптимізаційної методики Г. Марковіца [2].

Фундаментальна складова в моделі – це "представлення", "прогноз" або "експертна оцінка" (view). Справа в тому, що найчастіше інвестиційні менеджери мають свою думку (своє уявлення) про очікувану прибутковість деяких активів у портфелі, яка відрізняється від передбачуваної рівноважної доходності. Модель Блека-Літтермана дозволяє виразити прогнози інвестора відносно або абсолютно. Таким чином, усувається "неінтуїтивність" моделі Марковіца [2].

Запропонуємо методологічний апарат, який розширює включення суб'єктивних прогнозів інвестора Блека-Літтермана. Зокрема, в праці [3] описана методологія, яка базується на гнучких прогнозах інвестора (fully flexible views, далі – FFV). Така методологія базується на економіко-математичних моделях, які поєднують апріорну інформацію (prior) та прогнози інвесторів під час проведення так званих "стрес-тестів". Вихідними параметрами моделі є апостеріорна (posterior) інформація, яка базується на "поведінці" вхідних параметрів і яка може бути використана в управлінні ризиками, оптимізації портфеля тощо.

У FFV-методології апостеріорна інформація отримується шляхом підгонки вхідної інформації з метою отримання прогнозів інвесторів з мінімальною кількістю помилок та різницею між поточною та змодельованою інформацією. Зокрема, апостеріорний розподіл зводить до мінімуму ентропію у порівнянні із апріорною інформацією, яка є природною мірою двох розподілів. Перевага методології полягає у її гнучкості, тобто можливості використання у прогнозуванні не тільки очікувань інвесторів, а й прогнозуванні волатильності та вартісної міри ризику VaR.

До 60-х років двадцятого століття не існувало адекватної міри ризику. Вся діяльність інвестиційних фондів полягала у знаходженні найбільш дохідних акцій і компаній, що демонструють високий рівень прибутковості. Однак ризик цих компаній ніяк не розглядався. У 1952 році виходить наукова робота Г. Марковіца [2], де вчений пропонує брати за міру ризику стандартне відхилення, яке показує середнє відхилення доходностей від середнього значення. Чим більший розкид доходностей щодо середнього, тим більш ризиковою є акція. На сьогодні під стандартним відхиленням часто мають на увазі волатильність (volatility). Однак якщо проаналізувати розкид доходностей, то можна зробити висновок, що розкид доходностей вище середнього значення не є ризиком, він навпаки позитивний, оскільки це прибуток, а не збитки. Безпосереднім ризиком можна вважати відхилення нижче середньої прибутковості. Тому більш адекватно використовувати для оцінки ризику не стандартне відхилення, а напівдисперсію. Однак ні стандартне відхилення, ні напівдисперсія не могли врахувати "важких хвостів" і асиметрії розподілу доходностей портфеля. У зв'язку з цим у 80-х рр.. двадцятого сторіччя була запропонована нова міра ризику VaR (Value at risk), під якою розуміється можливість отримання збитків інвестиційного портфеля з певною ймовірністю на певному проміжку часу:

$$VaR_a\left(X\right)=\max\left(\xi\mid P\left(X\geq\xi\right)\geq a\right), \quad (1)$$

де P – ймовірність; ξ – межа мінімальної доходності; a – квантиль функції розподілу доходності.

Існують різні модифікації VaR. Однією з них є умовна вартісна міра ризику (Conditional Value at Risk, CVaR) – умовне математичне сподівання дохідності інвестиційного портфеля за умови, що її величина менше значення VaR. Ця міра ризику більш адекватно описує доходності, які мають "важкі хвости". Формула розрахунку CVaR:

$$CVaR_a\left(X\right)=E\left\{X\mid X\leq VaR_a\left(X\right)\right\}. \tag{2}$$

Практична реалізація FFV-методології реалізується через три підходи: аналітичний, параметричний та непараметричний. Аналітичний та параметричний підходи детально описані в [1; 3]. Зокрема, у непараметричному підході апріорний розподіл загального фактора ризику (наприклад, логарифми зміни ринкових індексів) представлений у вигляді набору сценаріїв і пов'язаних з ним ймовірностей. Однак такий підхід має два суттєвих недоліки. По-перше, в ньому можна врахувати різні види прогнозів, зокрема VaR, однак можливість розгляду умовної вартісної міри ризику (CVaR) відсутня.

Як зазначалося вище, CVaR дозволяє оцінити очікуваний розмір збитку (із даним рівнем ризику на заданому горизонті) за умови, що він перевищить відповідне значення VaR. Такі розрахунки дозволяють не тільки виділити нетиповий рівень втрат, але й показати, що, швидше за все, відбудеться при їх реалізації, а це надзвичайно важливо при дослідженні фінансових інфекцій.

По-друге, в оригінальній праці [3] сценарії FFV були реалізовані на базі методу Монте-Карло, однак даний метод є неадекватним тоді, коли розглядаються екстремальні значення у хвостах розподілу (наприклад, перцентиль) і коли кількість сценаріїв дуже велика.

Враховуючи вищесказане, запропонуємо рекурсивний алгоритм, який включає умовну вартісну міру ризику CVaR, а також замінює метод Монте-Карло детермінованою системою.

Аналогічно праці [3] розглянемо N-вимірний вектор факторів ризику X (наприклад, зміна фондових індексів). Позначимо через f функцію розподілу щільності ймовірності апріорних даних та припустимо, що інвестор формує відповідні прогнози V (очікування, експертні оцінки), наприклад, набір сценаріїв або стрес-тестів. Апостеріорною буде виступати функція $\tilde{f}$, яка максимально наближена до апріорної f, однак задовольняє очікування V:

$$\tilde{f}\equiv\underset{g\in V}{\arg\min}\left\{\varepsilon\left(g,\,f\right)\right\}. \tag{3}$$

У такому випадку несиметричною мірою віддаленості апостеріорних та апріорних значень може виступати дивергенція (відстань) Кульбака-Лейблера. Справді, один із порівнюваних розподілів – це "дійсний" (апріорний) розподіл, а другий – передбачуваний (апостеріорний), який є наближенням до першого та задовольняє очікування інвестора. Оновлення параметрів випадкового механізму з метою отримання "кращої" вибірки на наступній ітерації включає мінімізацію перехресної ентропії Кульбака-Лейблера:

$$\varepsilon\left(\tilde{f},\ f\right)\equiv\int\tilde{f}\left(x\right)\ln\frac{\tilde{f}\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx. \tag{4}$$

Для впровадження FFV у праці [3] розглядається розподіл f із набором пар ймовірностей:

$$f\Leftrightarrow\left\{\left(x_j,\ p_j\right)\right\}_{j=1,\dots J}. \tag{5}$$

Ймовірності p_j визначаються таким чином, щоб для області D було справедливе наступне наближення:

$$\int_D f\left(x\right)dx\approx\sum_{x_j\in D}p_j. \tag{6}$$

Набір пар ймовірностей апостеріорного розподілу $\tilde{f}$, на відміну від (5), виглядає інакше $\tilde{f}\Leftrightarrow\left\{\left(x_j,\ \tilde{p}_j\right)\right\}$. Тоді дискретний варіант ентропії Кульбака-Лейбера (4) виглядає так:

$$\varepsilon\left(\tilde{p},\ p\right)\equiv\sum_{j=1}^{J}\tilde{p}_j\ln\frac{\tilde{p}_j}{p_j}. \tag{7}$$

Оскільки g – це деякий розподіл, а q – його дискретне представлення, то $q\in V$ виступає дискретним аналогом обмеження $g\in V$ в (3). Виходячи з цього, отримаємо дискретні обмеження апостеріорних значень:

$$\tilde{p}=\underset{q\in V}{\arg\min}\left\{\varepsilon\left(q,\ p\right)\right\}. \tag{8}$$

Якщо обмеження $q\in V$ лінійні, то аргумент мінімізації зводиться до лінійної програми, яка може бути розв'язана приведенням її до двоїстої задачі.

Як зазначалося вище, методика FFV не включає експертних оцінок CVaR, тому розглянемо прогноз інвестора щодо CVaR:

$$V:\tilde{E}\left\{X\mid X\leq\widetilde{qu}_\gamma\right\}\equiv\widetilde{cv}_\gamma. \tag{9}$$

де $\widetilde{cv}_\gamma$ – це мета ($\left(1-\gamma\right)-CVaR$) прогнозу; $\gamma\in\left(0,\ 1\right)$; $\widetilde{du}_\gamma$ – це апостеріорний γ-квантиль:

$$\int_{-\infty}^{\widetilde{qu}_\gamma}\tilde{f}\left(x\right)dx\equiv\gamma. \tag{10}$$

Умови (9)-(10) не можуть бути відображені в лінійних умовах (8) для q, тому ми не можемо розрахувати апостеріорні значення з допомогою лінійного програмування. Це пов'язано з тим, що в межах даного дослідження об'єктом прогнозування є умовна вартісна міра ризику CVaR і ми не знаємо апріорі значення VaR. Іншими словами, кількість сценаріїв, які знаходяться нижче VaR-квантилі, невідома заздалегідь. Очевидно, що ми шукаємо VaR-рівень або кількість сценаріїв, які нижче VaR-рівня, так, щоб апостеріорні значення мали мінімальну ентропію.

Припустимо, що ми відсортували сценарії таким чином, що $x_1 \leq \ldots \leq x_j$ та розрахували відповідні апріорні дискретні ймовірності $\left\{p_j\right\}$. Для довільного значення $s \in \left\{1,\ldots,J\right\}$ сформулюємо наступний J-вимірний вектор дискретних ймовірностей:

$$p^{(s)} \equiv \underset{q \in C_s}{\arg\min} \left\{\varepsilon\left(q,\ p\right)\right\}, \tag{11}$$

де

$$C_s : \begin{cases} x_1 q_1 + \ldots + \equiv \gamma \cdot \tilde{cv}_\gamma, \\ q_1 + \ldots + q_s \equiv \gamma. \end{cases} \tag{12}$$

Обмеження (12) є лінійними для J-вимірного вектора $q \equiv \left(q_1,\ldots,q_s,q_{s+1},\ldots,q_J\right)'$ і тому (11) може бути розв'язане шляхом переходу до двоїстої задачі аналогічно [4]. Пара ймовірностей $\left\{x_j,\ p_j^{(s)}\right\}$ відображає мінімальну зміну апостеріорних значень, коли VaR дорівнює $\tilde{qu}_j$, а CVaR - $\tilde{cv}_j$.

Апостеріорні значення (8), які задовольняють прогноз (9)-(10) щодо CVaR, представлені вектором $p^{(s)}$, визначених в (11). Тобто $\tilde{p} \equiv p^{(\tilde{s})}$, де

$$\tilde{s} \equiv \underset{s \in \{1,\ldots,J\}}{\arg\min}\, \varepsilon\left(p^{(s)},\ p\right). \tag{13}$$

Наведемо приклад реалізації вищеописаної рекурсії на практиці. Розглянемо апріорний стандартний нормальний розподіл $X \sim N\left(0,\ 1\right)$ із 80% прогнозом CVaR, тобто $\tilde{E}\left\{X \mid X \leq \tilde{qu}_{0,2}\right\} \equiv -2.$ На рис. 1 (верхня частина) зображено дивергенцію Кульбака-Лейблера $\varepsilon\left(p^{(s)},\ p\right)$ апріорних та апостеріорних значень, які задовольняють умови (12)-(13). В нижній частині рис. 1 зображено ефект прогнозу CVaR на розподіл.

Отже, дивергенція Кульбака-Лейблера – це асиметрична міра, яка дозволяє оцінити, наскільки чітко розподіл ймовірностей f наближає розподіл ймовірностей $\tilde{f}$. Слід зазначити, що існує також метод, в якому конвергенція моделюється за допомогою нормованого логарифмічного відношення правдоподібності (як різниця між значеннями перехресної ентропії).

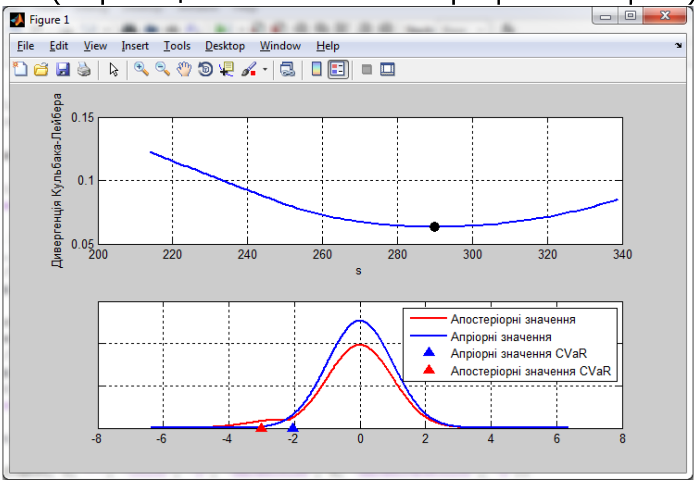

*Рис. 1. Прогноз CVaR, ентропія апостеріорних значень **

* Джерело: розраховано автором у середовищі Matlab

На практиці розрахунок всіх параметрів (13) є надзвичайно інтенсивним. Оскільки відносна ентропія $\varepsilon\left(p^{(s)},\ p\right)$ є увігнутою функцією s, то ми можемо значно спростити процес розрахунків, використовуючи дискретний аналог методу Ньютона-Рафсона, який є покращеним методом Ньютона знаходження екстремумів. Для цього спочатку потрібно визначити емпіричну похідну відносної ентропії як функції s:

$$D\varepsilon\left(p^{(s)},\ p\right) \equiv \varepsilon\left(p^{(s+1)},\ p\right) - \varepsilon\left(p^{(s)},\ p\right). \tag{14}$$

Наступним кроком є ініціалізація значення $\overline{s} \in \{1,\ldots,J\}$ відносно апріорних ймовірностей $p \equiv \left(p_1,\ldots,p_s,p_{s+1},\ldots,p_J\right)'$ як певного граничного значення, яке задовольняє

$$p_1 + \ldots + p_{\overline{s}} \equiv \gamma\ . \tag{15}$$

На останньому кроці застосовується метод Ньютона-Рафсона до емпіричної похідної. Досягнення конвергенції відбувається через ітераційний процес таких двох кроків:

$$\overline{s} \equiv \operatorname{int}\left(\underline{s} - \frac{D\varepsilon\left(p^{(\underline{s})},\ p\right)}{D^2\varepsilon\left(p^{(\underline{s})},\ p\right)} \right), \tag{16}$$

$$\underline{s} \equiv \overline{s} \,. \tag{17}$$

Практична реалізація прикладу продемонструвала, що конвергенція досягається у 4 кроки (рис. 2).

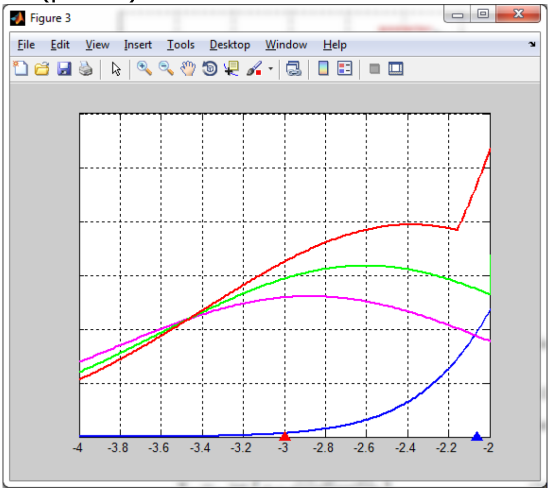

*Рис. 2. Ітерації методу Ньютона-Рафсона**

*Джерело: розраховано автором у середовищі Matlab

Таким чином, вищеописана методологія дозволяє включити не тільки VaR, а й CVaR у здійсненні суб’єктивних прогнозів інвесторів (тобто експертних оцінок очікуваних ризиків) у моделях фінансової стабільності та поширення фінансових інфекцій.

Існують різноманітні методи розрахунку CVaR: історичне моделювання, параметричний підхід, а також імітаційне моделювання методом Монте-Карло. Останній виступає найбільш поширеним підходом у моделюванні розподілу при умові існування пар ймовірностей (5): сценарії $\{x_j\}$ генеруються випадковим чином відповідно до очікуваного розподілу, а ймовірності визначені як $p_j \equiv 1/J$. Однак такий підхід концентрує сценарії на обмеженій частині розподілу. Якщо прогноз стосується крайніх значень "хвоста" розподілу (як у випадку VaR та CVaR) з рівнем значущості менше 5%, то звичайний метод Монте-Карло не придатний для виконання імітації сценаріїв у такому випадку.

Альтернативними в такому випадку виступають вибірка за значущістю та районована (стратифікована) вибірка [4]. Вибірка за значущістю – один з методів зменшення дисперсії випадкової величини, який використовується для покращення збіжності процесу моделювання певної величини методом Монте-Карло. Ідея вибірки за значущістю базується на спостереженні, що деякі значення випадкової величини в процесі моделювання мають велику значущість (ймовірність) для оцінки функції (параметра), ніж інші. Якщо ці "більш ймовірні" значення будуть з’являтися в процесі вибору випадкової величини частіше, дисперсія оцінки функції зменшиться. Отже, базова методологія вибірки за значущістю полягає у виборі розподілу, яке сприяє вибору "більш вірогідних" значень випадкової величини. Такий "зміщений" розподіл змінює функцію, яка оцінюється, якщо застосовується безпосередньо в процесі розрахунку. Однак результат розрахунку перераховується згідно з цим зміщеним розподілом, і це гарантує, що нова оцінка функції вибірки за значущістю не буде зміщена. Сама ж вага досягається співвідношенням правдоподібності, тобто похідної Радона-Никодима істинного початкового розподілу відносно вибраного зміщеного розподілу.

Фундаментальним завданням у реалізації вибірки за значущістю є вибір зміщеного розподілу, який виділяє регіони з "більш імовірними" значеннями оцінюваної функції. Вибірка за значущістю ефективна при вдалому виборі і побудові такого розподілу, оскільки вона забезпечує суттєве скорочення часу обчислень. Однак при невдалому зміщеному розподілі навіть стандартний метод Монте-Карло може дати кращі результати.

Іншим альтернативним методом виступає районована (стратифікована) вибірка [4]. У складі генеральної сукупності з різним рівнем досліджуваної ознаки бажано забезпечити більш рівномірне представництво у вибірковій сукупності різних типів. Ця мета досягається при застосуванні стратифікованої вибірки. Цю вибірку застосовують також з метою більш рівномірного представлення у вибірці різних районів, і в такому випадку її називають районованою вибіркою.

При типовій вибірці неоднорідна генеральна сукупність поділяється на більш однорідні щодо досліджуваних ознак групи (типи, райони). По кожній групі визначаються її обсяг і кількість одиниць, що підлягають спостереженню. Відбір одиниць спостереження проводиться в кожній групі за допомогою одного із способів випадкового відбору – повторного або безповторного. Загальне число одиниць вибіркової сукупності розподіляється між групами пропорційно чисельності груп у складі генеральної сукупності. Такий відбір називається пропорційним.

Інший альтернативний метод імітаційного моделювання досліджуваного випадку полягає у виборі сценаріїв $\left\{x_j\right\}$ як сітки імітаційної моделі та використанні (6) для підгонки відповідної ймовірності для кожного сценарію,

$$p_j \equiv \int_{I_j} f\left(x\right)dx, \tag{18}$$

де інтервал I_j містить j-ту точку сітки

$$I_j \equiv \left[x_j - \frac{x_j - x_j - 1}{2},\ x_j + \frac{x_{j+1} - x_j}{2}\right]. \tag{19}$$

Оскільки сітка імітаційної моделі визначена, то можна використати оптимізацію ентропії (8) замість (18) з новими апостеріорними ймовірностями $\left\{\tilde{p}_j\right\}$, які відображають прогноз інвестора.

Вибір сітки $\{x_j\}$ обумовлює успіх підходу. Зокрема, важливо, щоб сітка охоплювала достатньо велику область з метою включень екстремальних значень змінних, які не можуть бути включені при реалізації імітаційного методу Монте-Карло. Крім того, сітка повинна бути достатньо розрідженою та рівномірною. Для пояснення розглянемо нижнє $\underline{x}$ та верхнє $\overline{x}$ екстремальні значення розподілу X, які визначаються як

$$\int_{-\infty}^{\underline{x}} f(x)\,dx \equiv \in \equiv \int_{\overline{x}}^{+\infty} f(x)\,dx\,, \tag{20}$$

де $\in$ – це надзвичайне низьке значення хвоста ймовірності, $\in \approx 10^{-9}$. Тоді сітка $\{x_j\}$ визначається точками

$$x_j \equiv \underline{x} + \frac{2j-1}{2}\Delta,\ \ j = 1,\dots,J\,, \tag{21}$$

де $\Delta \equiv \left(\overline{x} - \underline{x}\right)/J$ – це постійна ширина всіх інтервалів (19).

Забезпечення рівновіддаленості сітки для унімодального розподілу реалізується з допомогою квадратури Гауса-Ерміта. В інтегральному численні так називаються способи для наближеного обчислення площ криволінійних фігур за декількома даними ординатами кривої, а також способи для наближеного обчислення визначеного інтеграла.

Введемо поліном Ерміта J-го порядку:

$$H_J(x) \equiv (-1)^J\, e^{-x^2/2}\, \frac{d^J e^{-x^2/2}}{dx^J}\,. \tag{22}$$

Як видно на рис. 3, корені поліному Ерміта розташовані симетрично навколо нуля, а зростання – сублінійне:

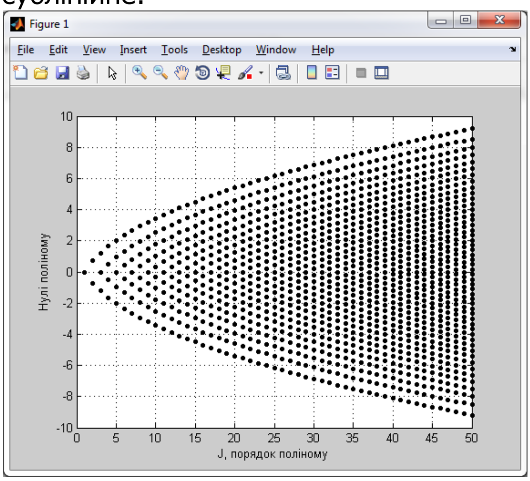

*Рис. 3. Нулі полінома Ерміта як функції порядку полінома**

*Джерело: розраховано автором у середовищі Matlab

Після введення поліному Ерміта потрібно побудувати відповідну сітку шляхом підгонки коренів для того, щоб включити в модель екстремальні значення $\underline{x}$ та $\overline{x}$, які розраховані на основі (20). Наприклад, задамо апріорний нормальний розподіл $X \sim N(0,\ 1)$, а також екстремальний прогноз $\tilde{E}\{X\} \equiv -3$ з лінійним обмеженням $\sum_{j=1}^{J} q_j x_j \equiv -3$ (8). На рис. 4 видно, що мала сітка з $J = 10^3$ точками забезпечує кращий сценарій, аніж метод Монте-Карло з $J = 10^5$.

Як зазначалося вище, в іноземній літературі існує велика кількість публікацій, які стосуються визначення фінансових інфекцій, їх виявлення, а також дослідження причин такого стану речей. Аналіз трансмісії шоків може базуватися на дослідженні ефективності діяльності фондових ринків в умовах фінансових криз, оскільки переміщення на ринках цінних паперів найбільш яскраво відображають поширення міжнародних фінансових інфекцій. У зв'язку з цим надзвичайно актуальним є використання розробленої методики для проведення стрес-тестів фондових індексів, зокрема в Україні. Для аналізу візьмемо місячні значення натуральних логарифмів зростання (спадання) індексу MSCI в Україні у період з 30 червня 2006 р. по 31 жовтня 2012 р.

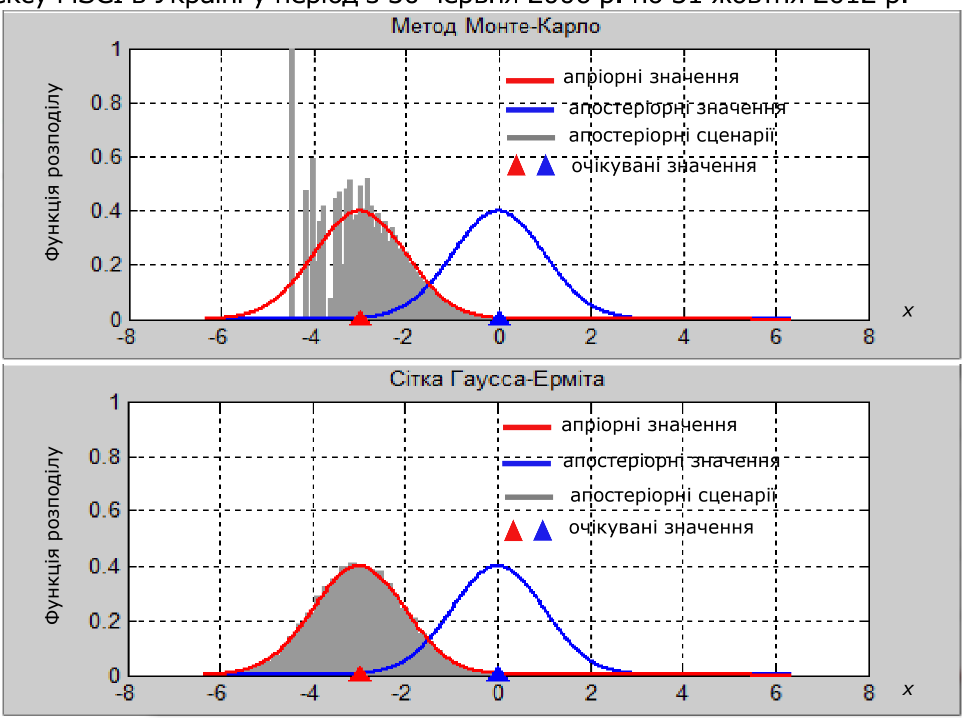

*Рис. 4. Розрахунок взаємної ентропії методами Монте-Карло та Гауса-Ерміта**

*Джерело: розраховано автором у середовищі Matlab

Позначимо через $x_1,\ldots,x_T$ відповідні значення логарифмів зростання (спадання) індексу MSCI. Емпірична функція розподілу має східчасту форму і може бути згладжена безперервною функцією для зручності моделювання. Для апроксимації можуть бути застосовані поліноміальна, експоненціальна функції, а також їх варіації в кусковій формі. Отже, оцінимо експоненціально зважені апріорні значення у вигляді згладженої емпіричної функції розподілу:

$$f\left(x\right)=\sum_{t=1}^{T}w_t k_t\left(x\right), \tag{23}$$

де w_t – експоненціально згладжена вага $w_t \propto e^{-\lambda(T-t)}$; k_t – ядро згладжування Гауса ширини h для t-го спостереження:

$$k_t\left(x\right)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi h^2}}\exp\left(-\frac{\left(x-x_t\right)^2}{2h^2}\right). \tag{24}$$

Період експоненційного напівперетворення заданий як половина періоду спостереження $\lambda=2\ln\left(2\right)/T$, а ширина відповідно до [5]:

$$h\equiv\min\left\{\hat{\sigma},\ \frac{\hat{ir}}{1.34}\right\}T^{-1/5}, \tag{25}$$

де $\hat{\sigma}$ – вибіркове середньоквадратичне відхилення, $\hat{ir}$ – інтерквартильний розмах спостережень. Інтерквартильним розмахом (англ. Interquartile range) називається різниця між третім і першим квартилем, тобто $x_{0,75}-x_{0,25}$. Інтерквартильний розмах є характеристикою розкиду розподілу величини. Разом медіана й інтерквартильний розмах можуть бути використані замість математичного сподівання і дисперсії у разі розподілів з великими викидами або при неможливості обчислення останніх.

Відобразимо функцію розподілу щільності ймовірностей (23) на сітку Гауса-Ерміта з $J=10^3$ вузловими точками. При цьому функція розподілу щільності ймовірностей може бути легко інтегрована для отримання (18).

Відповідно до цього отримані такі результати: середнє значення апріорних значень зміни натуральних логарифмів зміни індексу MSCI в Україні дорівнює -3,2668, а CVaR = -39,96% з 95% рівнем допустимого ризику, тобто вказані значення відображають реальну ринкову ситуацію.

Припустимо, що експертні оцінки свідчать про зниження середнього значення індексу та CVaR на 100 базових пунктів. Здійснимо прогноз розподілу індексу MSCI із використанням розробленої методики (рис. 5). На рис. 5 зображені результати проведеного стрес-тесту. Як і очікувалось, у порівнянні з апріорним розподілом в апостеріорному розподілі переважають від'ємні значення, оскільки нами було зроблено припущення про зниження CVaR. При цьому апостеріорний розподіл не отриманий звичайним зсувом апріорного розподілу вліво: набір ймовірностей розрахований так, щоб задовольнити загальний прогноз.

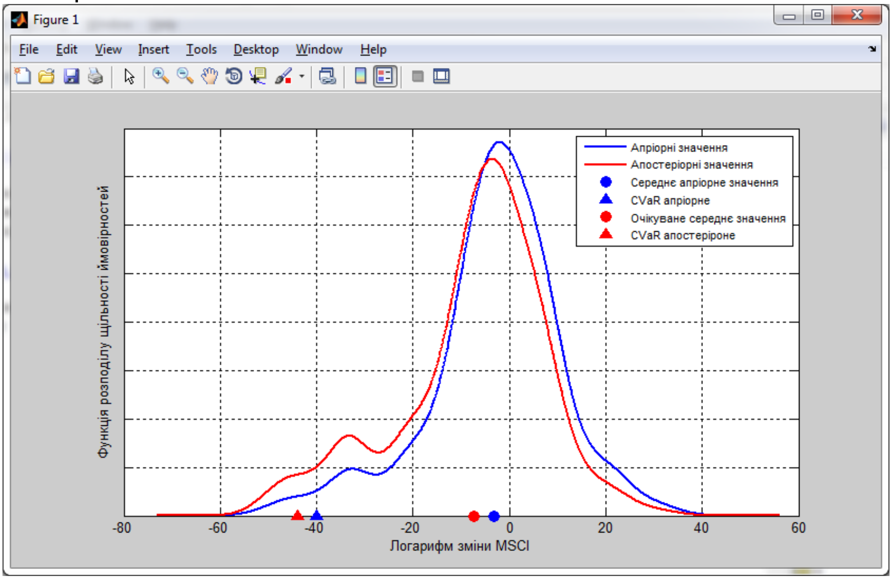

*Рис. 5. Розподіл зміни індексу MSCI**

*Джерело: розраховано автором у середовищі Matlab

Отже, маючи в наявності інформацію про загальні шоки або міжнародні мусони в інших країнах, ми можемо провести імітацію поширення фінансових інфекцій і в Україні. В додатку В наведені різні варіації поведінки функції щільності розподілу натуральних логарифмів зростання/спадання індексу MSCI в Україні.

Таким чином, розроблена методика дозволяє проводити так зване стрес-тестування – одну із форм тестування, яка використовується для визначення стійкості системи або юридичної особи в умовах перевищення меж нормального функціонування. Це особливо актуально, адже замість того, щоб робити фінансові прогнози за методом "найкращої оцінки", компанії або країни проводять стрес-тестування, при якому виявляється, як ведуть себе фінансові інструменти в разі певної стресової ситуації.

Список використаних джерел:

1. Black F., Litterman R. Global Portfolio OptimizaGtion / F. Black, R. Litterman // Financial Analysts J. 1992. September. P. 28–43.
2. Markowitz H. M. Portfolio Selection / H.M. Markowitz // J. of Finance. 1952. V. 7. № 1 P. 77–91.
3. Attilio Meucci Fully Flexible Views: Theory and Practice [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://scrn.com/abstract=213025
4. Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering / P. Glasserman, Springer. – 2004. – 602 p.
5. Silverman B. W. Density Estimation for Statistics and Data Analysis [Електронний ресурс] / B. W. Silverman, Chapman and Hall. // Режим доступу : http ://gemini.econ.umd.edu/jrust/econ623/lectures/silverman_density_estimation.pdf