УДК 517.928.1 PACS 02, 03, 05, 06, 07

О.В.Чорненька

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ ТА РЕГУЛЯРНОЮ ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

У даній роботі вивчається питання про побудову загального асимптотичного розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром та регулярною особливою точкою. Досліджується випадок, коли головна матриця системи має кратне власне значення, якому відповідає один елементарний дільник такої ж самої кратності. У статті запропоновано алгоритм відшукання розв'язків такої задачі у вигляді подвійних розвинень. Розглянуто задачу про збурення власного значення та відповідного власного вектора головного оператора системи. Виведено рівняння розгалуження, до коефіцієнтів якого застосовано просторовий аналог діаграм Ньютона, та показано, що шукані розвинення слід вести за дробовими степенями параметра та відношення незалежної змінної і параметра. Для побудованих формальних розв'язків знайдено відповідні асимптотичні оцінки.

Ключові слова: асимптотичні методи, системи диференціальних рівнянь, малий параметр, регулярна особлива точка, подвійні ряди, кратний спектр головного оператора.

Вступ

В даній роботі вивчається питання про побудову загального асимптотичного розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь вигляду

$$x\frac{dy}{dx} = A(x,\varepsilon)y\,, \tag{1}$$

з регулярною особливою точкою $x = 0$; ε - малий параметр, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$; x - незалежна змінна, $0 < x < x_0$; $y(x,\varepsilon)$ - шукана вектор-функція, $A(x,\varepsilon)$ - квадратна матриця n-го порядку, яка задається асимптотичним розвиненням

$$A(x,\varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{sk}\varepsilon^k x^s\;. \tag{2}$$

Вивчається випадок, коли головна матриця A_{00} системи (1) має одне власне значення λ_0 кратності n, якому відповідає один елементарний дільник такої ж самої кратності.

Наведемо короткий історичний огляд даного питання.

Лінійні системи диференціальних рівнянь з особливими точками першого роду

$$x\frac{dy}{dx} = A(x)y$$

вивчались в працях [1 – 2]. Зокрема, $x = 0$ - регулярна особлива точка, а матриця $A(0) \ne \hat{I}$, крім того досліджено випадок, коли спектр $A(0)$ є простим.

У роботах Рабиновича Ю. Л. та Хапаєва М. М. [3], Юдиної А. С. [4] наведено побудову фундаментальної системи розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з регулярною особливою точкою

$$\varepsilon z y'' + p(z)y' + q(z)y = 0\;,$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр, а функції $p(z)$, $q(z)$ є нескінченно диференційовними.

В роботах Шкіля М.І. та Завізіона Г.В. [5 – 7] розглядається система сингулярно збурених диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h t \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x, \qquad (3)$$

де $x=0$ - регулярна особлива точка, ε - малий параметр, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $h\in Z$, $t\in[0;L]$, $A(t,\varepsilon)$ - квадратна матриця n-го порядку, що задається у вигляді розвинення за степенями малого параметра ε

$$A(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r A_r(t).$$

У роботах [5 – 7] досліджено питання про побудову загального асимптотичного розв'язку системи (3) як у випадку простого спектра матриці $A_0(t)$, $t\in[0;L]$, так і у випадку кратного спектра головної матриці. Зокрема, показано, що розв'язки можна знайти у вигляді вектора

$$x(t,\varepsilon)=u(t,\varepsilon)t^{\frac{a^2(\varepsilon)}{\varepsilon^h}}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(t,\varepsilon)dt\right),$$

де $u(t,\varepsilon)$ n- вимірний вектор, $\lambda(t,\varepsilon)$, $a(\varepsilon)$ - скалярні функції, які мають вигляд

$$u(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r u_r(t),\ \lambda(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\lambda_r(t),\ a(\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r a_r .$$

Теорія подвійних рядів досить вдало була застосована до побудови загального асимптотичного розв'язку сингулярно збурених систем лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою

$$\varepsilon^h x^g \frac{dy}{dx} = A(x,\varepsilon)y, \qquad (4)$$

де матриця $A(x,\varepsilon)$ задається у вигляді розвинення

$$A(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^r x^{-s}A_{rs} .$$

В дослідженнях [8, 9] вивчено випадок кратного спектра головної матриці системи (4). Зокрема показано, що асимптотичні розв'язки такої системи можна побудувати у вигляді подвійних розвинень за дробовими степенями параметра та відношення незалежної змінної та параметра.

Особливості побудови загального асимптотичного розв'язку системи (1) у випадку простого спектра головної матриці A_{00} досліджено в роботі [10], зокрема показано, що розв'язки системи можна побудувати у вигляді подвійних розвинень за цілими степенями параметра та незалежної змінної.

Питання про побудову асимптотики у випадку кратного спектра головного оператора є досить складним, оскільки не завжди можна легко підібрати вигляд формального розвинення шуканого розв'язку. Дана стаття присвячена розв'язанню такої проблеми.

1. Побудова асимптотичних розв'язків

Зробимо припущення, що головна матриця A_{00} системи (1) має одне власне значення λ_0 кратності n, якому відповідає один елементарний дільник такої ж самої кратності; вектор φ - відповідний власний вектор.

Розглянемо матрицю $(A_{00}-\lambda_0 E)$, яка є виродженою, тоді $H=(A_{00}-\lambda_0 E)^{\sim}$ – напівобернена до $(A_{00}-\lambda_0 E)$. При цьому $H^n=O$ - нульова матриця. Елемент нуль-простору матриці спряженої до $(A_{00}-\lambda_0 E)$ позначимо ψ. Тоді відповідні скалярні добутки

$$\left(H^{i-1}\varphi,\psi\right)=0\text{, якщо } i=\overline{1,\,n-1},$$
$$\left(H^{n-1}\varphi,\psi\right)=1.$$

Розв'язки системи (1), що відповідають n-кратному елементарному дільнику граничної матриці A_{00}, будемо шукати в вигляді

$$y(x,\varepsilon)=x^{\lambda_0+\lambda(\varepsilon)}\cdot u(x,\varepsilon), \tag{5}$$

де $u(x,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, $\lambda(\varepsilon)$– скалярна функція, які необхідно визначити. Знайдемо похідну

$$y'(x,\varepsilon)=(\lambda_0+\lambda(\varepsilon))x^{\lambda_0+\lambda(\varepsilon)-1}\cdot u(x,\varepsilon)+x^{\lambda_0+\lambda(\varepsilon)}\cdot u'(x,\varepsilon). \tag{6}$$

Підставмо вектори (5) та (6) в систему (1), відповідно отримаємо

$$x\left(x^{\lambda_0+\lambda(\varepsilon)}\frac{du(x,\varepsilon)}{dx}+(\lambda_0+\lambda(x,\varepsilon))x^{\lambda_0+\lambda(\varepsilon)-1}u(x,\varepsilon)\right)=A(x,\varepsilon)x^{\lambda_0+\lambda(\varepsilon)}u(x,\varepsilon),$$

після спрощення маємо рівняння

$$x^{\lambda_0+\lambda(\varepsilon)}\left(x\frac{du(x,\varepsilon)}{dx}+(\lambda_0+\lambda(x,\varepsilon))u(x,\varepsilon)-A(x,\varepsilon)u(x,\varepsilon)\right)=0\,. \tag{7}$$

Якщо позначити

$$A(x,\varepsilon)=A_{00}+\widetilde{A}(x,\varepsilon),$$

де

$$\widetilde{A}(x,\varepsilon)=\sum_{r+s\geq 1}A_{rs}x^{-r}\varepsilon^{s},$$

тоді рівняння (7) матиме запис

$$(A_{00}-\lambda_0E)u(x,\varepsilon)=\left(\lambda(\varepsilon)E+x\frac{d}{dx}-\widetilde{A}(x,\varepsilon)\right)u(x,\varepsilon), \tag{8}$$

де E – одинична матриця.

Отже, задача визначення функції $\lambda(\varepsilon)$ і вектора $u(x,\varepsilon)$ звелась до задачі про збурення власного значення λ_0 та відповідного власного вектора φ оператора A_{00} під дією збурення $\left(\widetilde{A}(x,\varepsilon)-x\dfrac{d}{dx}\right)$.

За виконання необхідної та достатньої умови розв'язності рівняння (8)

$$\left(\left(\lambda(\varepsilon)E+x\frac{d}{dx}-\widetilde{A}(x,\varepsilon)\right)u,\psi\right)=0 \tag{9}$$

матимемо

$$u=\left(\lambda(\varepsilon)H+xH\frac{d}{dx}-H\widetilde{A}(x,\varepsilon)\right)u+c\varphi,$$

або

$$\left(E-\lambda(\varepsilon)H-xH\frac{d}{dx}+H\widetilde{A}(x,\varepsilon)\right)u=c\varphi,$$

де c – довільний множник, з точністю до якого визначається вектор $u(x,\varepsilon)$.

Покладемо $c=1$ і розглянемо рівняння

$$\left(E-\lambda(\varepsilon)H-xH\frac{d}{dx}+H\widetilde{A}(x,\varepsilon)\right)u=\varphi\,.$$

Його розв'язок можна подати у вигляді формального розвинення

$$u=\varphi+\sum_{k\geq 1}\left(\lambda(\varepsilon)H+xH\frac{d}{dx}-H\widetilde{A}(x,\varepsilon)\right)^{k}\varphi\,. \tag{10}$$

Підставивши (10) у (9), отримаємо рівняння розгалуження

$$L(\lambda,x,\varepsilon)\equiv\left(\left(\left(\lambda(\varepsilon)E+x\frac{d}{dx}-\widetilde{A}(x,\varepsilon)\right)\sum_{k\geq 0}\left(\lambda(\varepsilon)H+xH\frac{d}{dx}-H\widetilde{A}(x,\varepsilon)\right)^{k}\right)\varphi,\psi\right)=0,\quad (11)$$

яке має задовольняти шукана функція $\lambda(\varepsilon)$.

Подамо операторний вираз $L(\lambda,x,\varepsilon)$ у вигляді формального розвинення

$$L(\lambda,x,\varepsilon)=\sum_{k+r+s\geq 0}L_{krs}\left[\lambda^{k}\right]x^{r}\varepsilon^{s},$$

де k, r, s – відповідно сумарні степені функції $\lambda(\varepsilon)$, змінної x та параметра ε.

Розглянемо вирази

$$\left(\lambda(\varepsilon)H+xH\frac{d}{dx}-H\widetilde{A}(x,\varepsilon)\right)^{q}=\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}\varepsilon^{s}x^{r}+HxD\right)^{q},$$

де D – оператор диференціювання по змінній x. Маємо

$$\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}\varepsilon^{s}x^{r}+HxD\right)^{2}=\lambda^{2}HH-\lambda\sum_{r+s\geq 1}\left(HHA_{rs}+HA_{rs}H\right)x^{r}\varepsilon^{s}+$$

$$+\sum_{r+s\geq 2}\left(\sum_{r_1+s_1=1}^{r+s-1}HA_{r_1s_1}HA_{r-r_1,s-s_1}\right)x^{r}\varepsilon^{s}-x\sum_{r+s\geq 1}rHHA_{r,s}x^{r-1}\varepsilon^{s}+$$

$$+\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}x^{-r}\varepsilon^{s}+H\varepsilon^{h}x^{-g}D\right)Hx^{-g}\varepsilon^{h}D.$$

Суми всіх можливих добутків i множників H та j множників $HA_{r_ks_k}$, $k=\overline{1,j}$, таких , що $r_1+\ldots+r_j=r$, $s_1+\ldots+s_j=s$, використовуючи символіку роботи [11], позначимо $P_{i,j}^{r,s}(H,HA)$. Крім того, при від'ємних i та j; $r+s<j$ та $j=0$, $r,s\neq 0$ будемо покладати $P_{i,j}^{r,s}(H,HA)=0$. Ці вирази задовольняють співвідношення

$$P_{i,j}^{r,s}(H,HA)=HP_{i-1,j}^{r,s}(H,HA)+\sum_{r_1+s_1=1}^{r+s+1-j}HA_{r_1s_1}P_{i,j-1}^{r-r_1,s-s_1}(H,HA).$$

Позначимо також

$$rHP_{01}^{r,s}(H,HA)=R_{011}^{r,s}(H,HA).$$

Тоді

$$\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}\varepsilon^{s}x^{r}+HxD\right)^{2}=\lambda^{2}HH-\lambda\sum_{r+s\geq 1}P_{11}^{r,s}(H,HA)x^{r}\varepsilon^{s}+$$

$$+\sum_{r+s\geq 2}\left(P_{02}^{r,s}(H,HA)+R_{011}^{r,s}(H,HA)\right)x^{r}\varepsilon^{s}+\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}\varepsilon^{s}x^{r}+HxD\right)HxD.$$

$$\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}\varepsilon^{s}x^{r}+HxD\right)^{3}=\lambda^{3}H^{3}-\lambda^{2}\sum_{r+s\geq 1}P_{21}^{r,s}(H,HA)x^{r}\varepsilon^{s}+$$

$$+\lambda\sum_{r+s\geq 2}\left(P_{12}^{r,s}(H,HA)+HR_{011}^{r,s}(H,HA)+rHP_{11}^{r,s}(H,HA)\right)x^{r}\varepsilon^{s}-$$

$$-\sum_{r+s\geq 3}\left(P_{03}^{r,s}(H,HA)+\sum_{r_1+s_1=1}^{r+s-1}HA_{r_1s_1}R_{011}^{r-r_1,s-s_1}(H,HA)+rHP_{02}^{r,s}(H,HA)+rHR_{011}^{r,s}(H,HA)\right)x^{r}\varepsilon^{s}+$$

$$+\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}\varepsilon^{s}x^{r}+HxD\right)^{2}HxD.$$

Символом $R^{r,s}_{i,j+p,m-p}(H,HA)$ позначимо суми добутків $j+p$ множників H та $m-p$ множників HA_{r_k,s_k}, $k=\overline{1,m-p}$, $r_1+\ldots+r_{m-p}=r$, $s_1+\ldots+s_{m-p}=s$, $p\in N$, які обчислюється за рекурентними формулами:

при $p=1$

$$R^{r,s}_{i,j+p,m-p}(H,HA)=(1-\delta_{i,0})HR^{rs}_{i-1,j+p-1,m-p}(H,HA)+$$
$$+\sum_{r_1+s_1=1}^{r+s+1}HA_{r_1s_1}R^{r-r_1,s-s_1}_{i,j+p,m-p-1}(H,HA)+rHP^{r,s}_{j+p-1,m-p}(H,HA),$$

при $p\neq 1$

$$R^{r,s}_{i,j+p,m-p}(H,HA)=(1-\delta_{i,0})HR^{rs}_{i-1,j+p-1,m-p}(H,HA)+$$
$$+\sum_{r_1+s_1=1}^{r+s+1}HA_{r_1s_1}R^{r-r_1,s-s_1}_{i,j+p,m-p-1}(H,HA)+rHR^{r,s}_{i,j+p-1,m-p}(H,HA),$$

Тоді

$$\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}\varepsilon^s x^r+HxD\right)^3=\lambda^3H^3-\lambda^2\sum_{r+s\geq 1}P^{r,s}_{21}(H,HA)x^r\varepsilon^s+$$
$$+\lambda\sum_{r+s\geq 2}\left(P^{r,s}_{12}(H,HA)+HR^{r,s}_{121}(H,HA)\right)x^r\varepsilon^s-$$
$$-\sum_{r+s\geq 3}\left(P^{r,s}_{03}(H,HA)+R^{r,s}_{012}(H,HA)+R^{r,s}_{021}(H,HA)\right)x^r\varepsilon^s+$$
$$\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}\varepsilon^s x^r+HxD\right)^2HxD.$$

Методом математичної індукції легко показати, що

$$\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}\varepsilon^s x^r+HxD\right)^q=\sum_{r+s\geq q}(-1)^q\left(P^{r,s}_{0q}(H,HA)+\sum_{p=1}^{q-1}R^{r,s}_{0,p,q-p}(H,HA)\right)x^r\varepsilon^s+$$
$$+\sum_{j=1}^{q}\sum_{r+s\geq q-j}(-1)^{q+j}\lambda^j\left(P^{r,s}_{j,q-j}(H,HA)+\sum_{p=1}^{q-(j+1)}R^{r,s}_{j,j+p,q-(j+p)}(H,HA)\right)x^r\varepsilon^s+$$
$$+\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}\varepsilon^s x^r+HxD\right)^{q-1}HxD.$$

Після нескладних перетворень та перепозначення індексів отримаємо

$$\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}\varepsilon^s x^r+HxD\right)^q=\sum_{r+s\geq 1}\sum_{q=1}^{r+s}(-1)^q\left(P^{r,s}_{0q}(H,HA)+\sum_{p=1}^{q-1}R^{r,s}_{0,p,q-p}(H,HA)\right)x^r\varepsilon^s+$$
$$+\lambda^qH^q+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r+s=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{r+s}(-1)^q\lambda^k\left(P^{r,s}_{k,q}(H,HA)+\sum_{p=1}^{q-1}R^{r,s}_{k,k+p,q-p}(H,HA)\right)x^r\varepsilon^s+$$
$$+\sum_{q\geq 1}\left(\lambda H-\sum_{r+s\geq 1}HA_{rs}\varepsilon^s x^r+HxD\right)^{q-1}HxD.$$

Ввівши співвідношення

$$P^{r,s}_{0q}(H,HA)=H\widetilde{P}^{r,s}_{0q}(H,HA),$$
$$P^{r,s}_{k,q}(H,HA)=H\widetilde{P}^{r,s}_{k,q}(H,HA),$$
$$R^{r,s}_{0,p,q-p}(H,HA)=H\widetilde{R}^{r,s}_{0,p,q-p}(H,HA),$$
$$R^{r,s}_{k,k+p,q-p}(H,HA)=H\widetilde{R}^{r,s}_{k,k+p,q-p}(H,HA),$$

та врахувавши, що скалярні добутки $(H^{i-1}\varphi,\psi)=0$, якщо $i\neq n$, і $(H^{n-1}\varphi,\psi)=1$, рівняння розгалуження (11) запишемо в вигляді

$$\lambda^n + \sum_{r+s=1}^{\infty} L_{0rs} \cdot x^r \varepsilon^s + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r+s=1}^{\infty} L_{krs} \cdot \lambda^k x^r \varepsilon^s = 0, \tag{12}$$

де

$$L_{0rs} = \sum_{q=1}^{r+s} (-1)^q \left(\left(\widetilde{P}_{0q}^{r,s}(H, HA) + \sum_{p=1}^{q-1} \widetilde{R}_{0,p,q-p}^{r,s}(H, HA) \right) \varphi, \psi \right), \; r+s \geq 1, \tag{13}$$

$$L_{krs}[\lambda^k] = \sum_{q=1}^{r+s} (-1)^q \left(\left(\widetilde{P}_{k,q}^{r,s}(H, HA) + \sum_{p=1}^{q-1} \widetilde{R}_{k,k+p,q-p}^{r,s}(H, HA) \right) \varphi, \psi \right), \; r+s \geq 1, \; k \geq 1. \tag{14}$$

Відповідне розвинення для вектора $u(x, \varepsilon)$ матиме вигляд

$$u(x, \varepsilon) = \varphi + \sum_{r+s=1}^{\infty} \widetilde{L}_{0rs} \varphi x^{-r} \varepsilon^s + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r+s=0}^{\infty} \widetilde{L}_{krs}[\lambda^k] \varphi x^{-r} \varepsilon^s, \tag{15}$$

де

$$\widetilde{L}_{0rs} = \sum_{q=1}^{r+s} (-1)^q \left(\left(P_{0q}^{r,s}(H, HA) + \sum_{p=1}^{q-1} R_{0,p,q-p}^{r,s}(H, HA) \right) \varphi, \psi \right), \; r+s \geq 1, \tag{16}$$

$$\widetilde{L}_{krs}[\lambda^k] = \sum_{q=1}^{r+s} (-1)^q \left(\left(P_{k,q}^{r,s}(H, HA) + \sum_{p=1}^{q-1} R_{k,k+p,q-p}^{r,s}(H, HA) \right) \varphi, \psi \right), \; r+s \geq 1, \; k \geq 1. \tag{17}$$

Цим самим доведено таку теорему.

Теорема 1. Для того, щоб вектор (5) був формальним розв'язком системи (1), необхідно і достатньо, щоб функція $\lambda(\varepsilon)$ формально задовольняла рівняння (12), де операторні функції L_{krs} визначаються виразами (13), (14).

Відповідна вектор-функція $u(x, \varepsilon)$ може бути подана у вигляді розвинення (15), коефіцієнти якого визначаються за формулами (16), (17).

Для визначення вигляду розвинень функції $\lambda(\varepsilon)$ та вектора $u(x, \varepsilon)$ проаналізуємо коефіцієнти рівняння розгалуження (12) із застосуванням просторового аналогу діаграм Ньютона, алгоритм застосування якого для систем з особливими точками подано в роботі [9].

Припустимо, що

$$L_{001} = -(A_{01}\varphi, \psi) \neq 0, \tag{18}$$

тоді просторові діаграми мають вигляд, поданий на Рис. 1.

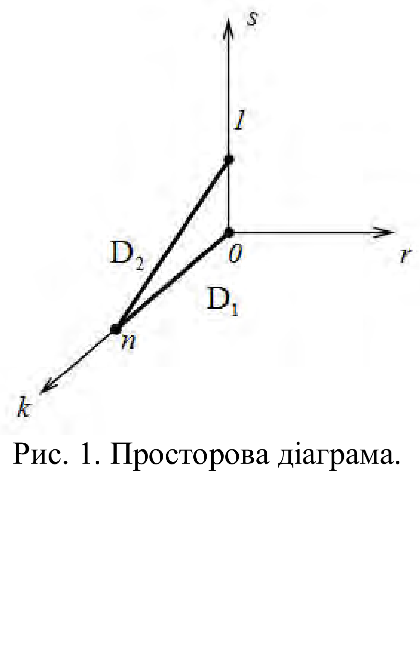

Рис. 1. Просторова діаграма.

Визначивши нахили ланок діаграм D_1 та D_2 з від'ємним напрямом осі 0k, приходимо до висновку, що розв'язки рівняння (12) необхідно будувати у вигляді розвинення

$$\lambda(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\left(\sqrt[n]{\varepsilon}\right)^i . \tag{19}$$

Визначальне рівняння

$$\lambda_1^{\grave{o}}-\left(A_{01}\varphi,\psi\right)=0$$

має n різних розв'язків, тому в даному випадку можна побудувати n розвинень вигляду (19).

Відповідну вектор-функцію $u(x,\varepsilon)$ можна подати у вигляді

$$u^{(\nu)}(x,\varepsilon)=\varphi+\sum_{i+j=1}^{\infty}u_{ij}^{(\nu)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^i\left(\sqrt[n]{\varepsilon}\right)^j ,\ \nu=\overline{1,n} . \tag{20}$$

Коефіцієнти розвинень (19) та (20) можна визначити безпосередньо підставивши вектор (5) в систему (1). Прирівнявши відповідні коефіцієнти при однакових степенях $\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^i\left(\sqrt[n]{\varepsilon}\right)^j$ отримаємо алгебраїчні системи рівнянь. При $i=0$ будемо мати

$$\left(A_{00}-\lambda_0E\right)u_{0j}^{(\nu)}=b_{0j}^{(\nu)},\nu=\overline{1,n}, \tag{21}$$

$$b_{0j}^{(\nu)}=\sum_{s=1}^{i}\lambda_s^{(\nu)}u_{0j-s}^{(\nu)}-\sum_{s=1}^{\left[\frac{i-1}{n}\right]}A_{0s}u_{0j-ns}^{(\nu)}-A_{0\frac{j}{n}}\varphi ,\ j\geq 1. \tag{22}$$

Тоді

$$u_{0j}^{(\nu)}=Hb_{0j}^{(\nu)}. \tag{23}$$

Зробивши взаємну підстановку формул (23) та (22) отримаємо

$$b_{0j}^{(\nu)}=\sum_{s=1}^{i}P_s^{0j}[\lambda]H_s^{j-1}\varphi-\sum_{r=1}^{j-n}\sum_{s=1}^{r}P_s^{0r}[\lambda]H_s^{j}a_{0,j-r}-a_{0,j} ,\ \nu=\overline{1,n} ,$$

де

$$P_s^{0j}[\lambda]=\sum_{j_1+j_2+..+j_s=j}\lambda_{0i_1}^{(\nu)}\cdot\lambda_{0i_2}^{(\nu)}\cdot\ldots\cdot\lambda_{0i_s}^{(\nu)} ,\qquad a_{0,j}=\sum_{s=1}^{\left[\frac{i-1}{n}\right]}A_{0s}u_{0j-ns}^{(\nu)}+A_{0\frac{j}{n}}\varphi,\qquad \nu=\overline{1,n}$$

З умов $\left(b_{0j}^{(\nu)},\psi\right)=0$, $\nu=\overline{1,n}$, $j\geq 0$, розв'язності систем (21) отримуємо

$$\lambda_1=\sqrt[n]{\left(A_{01}\varphi,\psi\right)}, \tag{24}$$

яке має рівно n значень над полем комплексних чисел;

$$\lambda_j^{(\nu)}=\frac{1}{n\cdot\lambda_1^{n-1}}\left[\left(\left(\sum_{r=1}^{j-n}\sum_{s=1}^{r}P_s^{0r}[\lambda]H^j a_{0,j+n-1-r}+a_{0,j+n-1}\right),\psi\right)-\widetilde{P}_n^{0,j+n-1}[\lambda]\right], \tag{25}$$

де $\widetilde{P}_n^{0,j+n-1}[\lambda]=P_n^{0,j+n-1}[\lambda]-n\lambda_j\lambda_1^{n-1}$ суми тих доданків $P_n^{0,j+n-1}[\lambda]$, які не містять множників λ_j.

На наступних кроках при $i\geq 1$ маємо наступні алгебраїчні системи

$$\left(A_{00}-\left(\lambda_0-i\right)E\right)u_{ij}^{(\nu)}=b_{ij}^{(\nu)},\nu=\overline{1,n},\qquad i\geq 1,$$

$$b_{ij}^{(\nu)}=\sum_{s=1}^{j-in}\lambda_s^{(\nu)}u_{i,j-s}^{(\nu)}-\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{\left[\frac{j-1}{n}\right]-r}A_{rs}u_{i-r,j-n(r+s)}^{(\nu)}-A_{i,\frac{j-in}{n}}\varphi ,\ i+j\geq 1 . \tag{26}$$

Оскільки матриця $\left(A_{00}-\left(\lambda_0-i\right)E\right)$, $i\geq 1$, є невиродженою, то

$$u_{ij}^{(\nu)} = J_i b_{ij}^{(\nu)},\ i \geq 1,\ i + j \geq 1, \tag{27}$$

де $J_i = (A_{00} - (\lambda_0 - i)E)^{-1}$ - обернена матриця до $(A_{00} - (\lambda_0 - i)E)$.

Отже, маємо теорему.

Теорема 2. Якщо матриця A_{00} має власне значення λ_0 кратності n, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності і виконується умова (18), то система рівнянь (1) має n частинних формальних розв'язків вигляду (5), де скалярна функція $\lambda(\varepsilon)$ та n-вимірний вектор $u(x,\varepsilon)$ задаються відповідними розвиненнями (19) та (20), коефіцієнти яких визначаються формулами (24), (25) та (22), (23) і (26), (27).

У випадках, коли умова (18) не виконується, потрібно застосовувати просторовий аналог діаграм Ньютона до наступних, відмінних від нуля коефіцієнтів рівняння (12). Відповідно знайдемо розвинення для шуканих скалярних функцій $\lambda(\varepsilon)$ та n-вимірних векторів $u(x,\varepsilon)$.

Побудовані згідно теореми 2 розв'язки системи (1) за умови $\operatorname{Re}\lambda_0 \leq 0$ і $\delta_1(\varepsilon) < |x| < \delta_2(\varepsilon)$, якщо $\delta_1(\varepsilon) \to 0$ і $\delta_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, є асимптотичними з відповідними оцінками

$$\left\| y_{mp}^{(\nu)}(x,\varepsilon) - \widetilde{y}_\nu(x,\varepsilon) \right\| \leq \left(c_1 |\varepsilon|^{\frac{p+2}{n}} |x|^{-1} + c_2 \left| \frac{x}{\varepsilon} \right|^{m-1} |\varepsilon|^{\frac{2}{n}-1} \right),\ \nu = \overline{1,n},$$

де $\widetilde{y}_\nu(x,\varepsilon)$ - точні розв'язки системи (1), а $y_{mp}^{(\nu)}(x,\varepsilon)$ - наближення, які утворюються з формальних розв'язків (2) шляхом обривання відповідних розвинень (19), (20) на m-му доданку по $\dfrac{x}{\varepsilon}$ та p-му по ε.

Висновки

У даній роботі досліджено питання про побудову загального асимптотичного розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром та регулярною особливою точкою. Виведено рівняння розгалуження та показано, що шукані розвинення слід вести за дробовими степенями параметра та відношення незалежної змінної і параметра.

Список використаної літератури:

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений / Вольфганг Вазов ; [пер. с англ. В. Ф. Бутузова, А. Б. Васильевой и М. В. Федорюка / под ред. Васильевой А. Б.]. – М. : Мир, 1968. – 464 с.

2. Коддингтон Э. А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.

3. Рабинович Ю. Л. Линейные уравнения с малым параметром при старшей производной в окрестности регулярно-особой точки / Ю. Л. Рабинович, М. М. Хапаев // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 129, № 2. – С. 268–271.

4. Юдина А. С. О методе регуляризации для уравнений с регулярной особой точкой / А. С. Юдина // Труды Московского ордена Ленина энергетического института: (прикладные вопросы математики) : тематический сборник . – М., 1978. – Вып. 357. – С. 119–121.

5. Завизион Г. В. Сингулярно возмущенная система дифференциальных уравнений с рациональной особенностью / Г. В. Завизион // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т.43, № 7. – С.867–878.

6. Завізіон Г. В. Зведення системи диференціальних рівнянь з виродженням у точці / Г. В. Завізіон // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1 “Фізико-математичні науки”. – 2003. – Вип. 4 – С. 177–191.

7. Шкіль М. І. Асимптотичне зведення сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з регулярною особливістю до діагонального вигляду / М. І. Шкіль, Г. В. Завізіон // Доп. НАН України. – 2000. – № 12. – С. 25–29.

8. Яковець В. П. Асимптотичні розв’язки сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / В. П. Яковець, О. В. Головченко // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 417–432.

9. Головченко О. В. Побудова загального розв’язку сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / О. В. Головченко // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 1 “Фізико-математичні науки”. – 2007. – Вип. 8. – С. 66–81.

10. Чорненька О.В. Асимптотика загального розв’язку системи лінійних диференціальних рівнянь з параметром та особливою точкою / О.В. Чорненька, В.О. Богдан // Фізико-математичні записки. Збірник наукових праць. – Ніжин, 2015. – С. 24-32.

11. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – К. : Вища школа, 2000. – 294 с.

References

1. Vazov V. (1968) Asymptotic expansions of solutions of differential equations. - Moscow: Mir.

2. Coddington E.A., Levinson N. (1958) Theory of ordinary differential equations. - Moscow: Publishing House of Foreign Literature.

3. Rabinowitz Yu L. , Khapaev M.M. (1959) Linear equations with a small parameter at the highest derivative in a neighborhood of a regular singular point. Dokl. USSR Academy of Sciences,129(2), 268-271.

4. Yudin A. (1978) On a regularization method for equations with regular singular point. Proceedings of the Order of Lenin Moscow Power Engineering Institute (Applied Problems in Mathematics): thematic collection, 357,119-121.

5. Zavizion G.V. (2007)Singularly perturbed system of differential equations with rational feature. Differential Equations, 43(7), 867-878.

6. Zavizion G. V. (2003) Reduction of differential equations with degeneration in a point . Scientific notes NEA Dragomanov. Series 1 "Physics and mathematics", 4, 177-191.

7. Shkil N.I., Zavizion G.V. (2000) Asymptotic construction singularly perturbed system of differential equations with a regular feature for diagonal form . Dop. NAS of Ukraine, 12, 25-29.

8. Yakovets V.P., Golovchenko O.V. (2009) Asymptotic solutions of singularly perturbed linear system of differential equations with irregular singular point . Nonlinear Oscillations, 12(3), 417-432.

9. Golovchenko O.V. (2007) Construction of the general solution of singularly perturbed linear system of differential equations with irregular singular point. Scientific journal National Pedagogical Dragomanov University. Series 1 "Physics and mathematics", 8, 66-81.

10. Chornenka O.V. (2015) Asymptotics general solution of linear differential equations with parameter and singular point. Physics and mathematics note. - Nizhyn, 24-32.

11. Samoilenko A.M., Shkil M.I., Yakovets V.P. (2000) Linear system of differential equations with degeneracy. - Kiev: Vishcha sch.

Summary. ***O.V. Chornenka. Asymptotic analysis of linear systems of differential equations with parameter and regular singular point.*** *In this paper we study the question of construction a general asymptotic solution of the following linear differential equations*

$$x\frac{dy}{dx} = A(x,\varepsilon)y \tag{1}$$

with regular singular point $x = 0$. *Here* ε *is small parameter* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$; x *is free variable* $0 < x < x_0$; $y(x,\varepsilon)$ *is unknown vector -function ;* $A(x,\varepsilon)$ *is* n*- th order square matrix, which is given by the asymptotic expansions*

$$A(x,\varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{sk}\varepsilon^k x^s \tag{2}$$

We study the case, when the main matrix A_{00} *of the system (1) has one eigenvalue* λ_0 *of multiplicity* n, *which corresponds to one elementary divisor of the same ratio.*

In the case of n*-th multiple elementary divisor of main matrix* A_{00}, *we propose to find solutions of the system (1) in the form*

$$y(x,\varepsilon) = x^{\lambda_0+\lambda(\varepsilon)} \cdot u(x,\varepsilon) \ , \tag{5}$$

where $u(x,\varepsilon)$ *is* n*-dimensional vector,* $\lambda(\varepsilon)$ *is the scalar unknown function.*

In this paper we propose an algorithm for finding solutions of this problem in the form of double power series. We have solved the problem of perturbation eigenvalue and corresponding eigenvector main operator of the system.

There have been proved the following results.

Theorem 1. Vector (5) is the formal solution of the system (1) if and only if the function $\lambda(\varepsilon)$ *is the formal solution of the equation*

$$\lambda^n + \sum_{r+s=1}^{\infty} L_{0rs}\cdot x^r\varepsilon^s + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r+s=1}^{\infty} L_{krs}\cdot\lambda^k x^r\varepsilon^s = 0, \tag{12}$$

where the operator functions L_{krs} *are determined by coefficients of matrix (2).*

Theorem 2. If the matrix A_{00} *has a* n*-th multiple eigenvalue* λ_0, *elementary divisor has the same multiplicity and the condition*

$$L_{001} = -(A_{01}\varphi,\psi) \ne 0 \tag{18}$$

holds, then the system (1) has formal partial solutions (5), where scalar functions $\lambda(\varepsilon)$ *and* n*-dimensional vectors have corresponding expansions*

$$\lambda(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\left(\sqrt[n]{\varepsilon}\right)^i \ , \tag{19}$$

$$u^{(\nu)}(x,\varepsilon) = \varphi + \sum_{i+j=1}^{\infty} u_{ij}^{(\nu)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^i\left(\sqrt[n]{\varepsilon}\right)^j \ , \ \nu = \overline{1,n}\,. \tag{20}$$

The proof of Theorem 2 gives an algorithm for finding the coefficients of expansions (19) and (20). We have found the recurrence formulae. For the constructed formal solutions we have found appropriate asymptotic evaluations.

Keywords: asymptotic methods, the system of differential equations, the small parameter, the regular singular point, double power series, the range of main operator.

Одержано редакцією 03.08.2016 Прийнято до друку 15.09.2016