УДК 510.22 + 51-71 + 517.982

Я.І. Грушка

КРИТЕРІЙ ОДНОСТАЙНОЇ ПОСТУПАЛЬНОСТІ СИСТЕМ ВІДЛІКУ В УНІВЕРСАЛЬНИХ КІНЕМАТИКАХ

Універсальні кінематики, як математичні об'єкти, є цікавими для астрофізики, оскільки існує припущення, що у великих масштабах Всесвіту закони фізики (зокрема, закони кінематики) можуть бути відмінними від тих, які діють в околі нашої сонячної системи. Дана робота присв'ячена дослідженню одностайно-поступального руху систем відліку в абстрактних універсальних кінематиках. У випадку одностайно-поступального руху можна дати чітке і однозначне означення переміщення, а отже і середньої та миттєвої швидкості системи відліку. Тому частинним випадком одностайно-поступального руху є рівномірний прямолінійний рух. Отже, дослідження одностайно-поступального руху систем відліку є технічно необхідним для виділення класів інерційно споріднених систем відліку (тобто тих, які знаходяться в стані рівномірного прямолінійного взаємного руху) в універсальних кінематиках. В даній роботі встановлюється необхідна і достатня умова на перетворення координат між системами відліку векторної універсальної кінематики, яка забезпечує одностайну поступальність однієї системи відліку відносно іншої.

Ключові слова: універсальні кінематики, системи відліку, одностайно-поступальний рух.

Вступ

Поняття інерційної системи відліку відіграє ключову роль в класичній механіці та спеціальній теорії відносності, оскільки в інерційних системах відліку основні, фундаментальні, закони фізики мають найпростіше формулювання. При цьому вважається, що інерційні системи відліку належать до одного класу еквівалентності. А саме, що довільні дві інерційні системи відліку рухаються прямолінійно зі сталою швидкістю одна відносно іншої.

В роботах [1–5] було побудовано новий клас абстрактних математичних об'єктів — універсальні кінематики, які призначені для математичного моделювання еволюції фізичних систем в рамках різних законів кінематики. Також в цих роботах показано, що теорія універсальних кінематик може бути застосована для математично строгого обґрунтування кінематики спеціальної теорії відносності та її тахіонних розширень. Дослідження універсальних кінематик може виявитись цікавим для астрофізики, оскільки існує припущення, що у великих масштабах Всесвіту закони фізики (зокрема, закони кінематики) можуть бути відмінними від тих, які діють в околі нашої сонячної системи (тобто відмінними від тих, які базуються на перетвореннях координат Лоренца-Пуанкаре або Галілея для інерційних систем відліку). В універсальних кінематиках можуть існувати системи відліку з перетвореннями координат довільного вигляду між довільними просторами геометричних змінних [2] [1]. Саме тому, у зв'язку із сказаним в першому абзаці, природним чином постає задача дослідити рівномірний прямолінійний рух систем відліку на рівні абстрактних універсальних кінематик.

[1] Слід зазначити, що у випадку, коли простір геометричних змінних є тривимірним проблема дослідження довільних просторово-часових перетворень координат для систем відліку розглядалась у роботах [6–12]. Спроби побудови кінематики, що базується на перетвореннях координат для інерційних систем відліку відмінних від Лоренца-Пуанкаре або Галілея можна знайти, наприклад, в роботах [13–21].

Але, оскільки рівномірний прямолінійний рух систем відліку є рухом зі сталою швидкістю, то спершу доцільно дослідити на абстрактному рівні більш загальний випадок, коли системи відліку рухаються таким чином, що можна однозначно ввести поняття переміщення, а отже середньої або миттєвої швидкості руху однієї системи відліку відносно іншої. Саме такий вид руху систем відліку в роботі [22] названо одностайно-поступальним, де було дано математично строге означення одностайно-поступальних (одностайних) систем відліку в універсальних кінематиках.

В даній роботі продовжуються дослідження, розпочаті в [22]. Зокрема, буде встановлена необхідна і достатня умова на перетворення координат між системами відліку векторної універсальної кінематики, яка забезпечує одностайну поступальність однієї системи відліку відносно іншої.

1 Векторні універсальні кінематики та їх властивості

В даній роботі ми будемо використовувати математичний апарат, систему понять і позначень теорії універсальних кінематик, розвинутої в роботах [1–5]. Теорія універсальних кінематик в свою чергу базується на теоріях мінливих та кінематичних мінливих множин, розвинених в [1, 23–29]. Для зручності читачів результати всіх зазначених робіт зібрані і викладені з єдиної точки зору в препринті [5]. Для подальшого розуміння змісту цієї статті необхідно володіти основними положеннями теорій мінливих і кінематичних мінливих множин та універсальних кінематик. Саме тому читачам, котрі не знайомі з цими теоріями, радимо звернутися до препринта [5] або відповідних журнальних статей, результати яких зібрані в [5].

Означення 1. **(а)** *Кінематична множина $\mathfrak{C}$ називається* ***векторною****, якщо:*

$$\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})\ \ \mathbb{L}s(\mathfrak{l}) \neq \emptyset,$$

де $\mathbb{L}s(\mathfrak{l}) = \mathbb{L}s(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$ — лінійна структура системи відліку $\mathfrak{l}$ в кінематичній множині $\mathfrak{C}$ (див [1, стор. 65], [5, стор. 89]).

(б) *Універсальна кінематика $\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)$ називається* ***векторною****, якщо $\mathfrak{C}$ є векторною кінематичною множиною.*

Використовуючи систему позначень, прийняту в [2–5], отримуємо наступний наслідок означення 1.

Наслідок 1. *Універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є векторною тоді і тільки тоді, коли:*

$$\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})\ \ \mathbb{L}s(\mathfrak{l}) \neq \emptyset.$$

Наслідок 1 можна розглядати як альтернативний варіант означення векторної універсальної кінематики.

Нехай, $\mathfrak{C}$ — довільна векторна кінематична множина або універсальна кінематика. Тоді, згідно з означенням 1 та наслідком 1, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ виконується співвідношення $\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) \neq \emptyset$. Звідси, враховуючи систему позначень, прийняту в [2–5], випливає, що:

$$\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}) \quad \mathfrak{Ps}\,(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) \neq \emptyset,$$

причому, для будь-якої системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ і для довільних елементів $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l},\mathfrak{C})$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathfrak{Ps}\,(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$ визначений елемент:

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Керуючись скороченими варіантами позначень, введеними в [2–5], надалі у випадку, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину або універсальну кінематику $\mathfrak{C}$ йде мова, замість позначень $\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$, $\mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l},\mathfrak{C})$, $(\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$ будемо використовувати позначення $\mathbb{L}s(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{Ps}(\mathfrak{l})$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$, $(\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n)_{\mathfrak{l}}$ відповідно. Крім того, коли зі змісту тексту можна визначити, про яку систему відліку $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ йде мова, замість позначення $(\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n)_{\mathfrak{l}}$ будемо використовувати позначення $\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n$.

2 Перетворення координат в універсальних кінематиках та оператори перетворення координат

Означення 2. *Нехай, $\mathfrak{Q}_1,\mathfrak{Q}_2$ — координатні простори*[2]*, а $\mathbb{T}_1=(\mathbf{T}_1,\leq_1)$ і $\mathbb{T}_2=(\mathbf{T}_1,\leq_2)$ ($\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2\neq\emptyset$) — довільні лінійно упорядковані множини. Довільну бієкцію $\mathscr{U}$ між $\mathbf{T}_1\times\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{T}_2\times\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ ($\mathscr{U}:\mathbf{T}_1\times\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)\longmapsto\mathbf{T}_2\times\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$) будемо називати оператором перетворення координат з $(\mathbb{T}_1,\mathfrak{Q}_1)$ в $(\mathbb{T}_2,\mathfrak{Q}_2)$. Множину всіх операторів перетворення координат з $(\mathbb{T}_1,\mathfrak{Q}_1)$ в $(\mathbb{T}_2,\mathfrak{Q}_2)$ будемо позначати через:*

$$\mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1,\mathfrak{Q}_1;\mathbb{T}_2,\mathfrak{Q}_2).$$

Твердження 1 (див. [22])**.** *Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика і $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — довільні системи відліку $\mathcal{F}$. Тоді:*

$$[\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}]\in\mathbf{Pk}(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}),\mathsf{BG}(\mathfrak{l});\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}),\mathsf{BG}(\mathfrak{m})).$$

Зауваження 1. Позначення “$[\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}]$” означає універсальне перетворення координат з системи відліку $\mathfrak{l}$ в систему відліку $\mathfrak{m}$ в кінематиці $\mathcal{F}$ (див. [2–5]).

Отже, довільне перетворення координат між системами відліку в довільній універсальній кінематиці є оператором перетворення координат. Навпаки, виявляється, що для довільного оператора перетворення координат $\mathscr{U}$ існує така універсальна кінематика $\mathcal{F}$ що оператор $\mathscr{U}$ є універсальним перетворенням координат між деякими системами відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$.

Твердження 2 (див. [22])**.** *Для довільного оператора перетворення координат $\mathscr{U}\in\mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1,\mathfrak{Q}_1;\mathbb{T}_2,\mathfrak{Q}_2)$ існують універсальна кінематика $\mathcal{F}$ і системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ такі, що:*

$$\begin{array}{ll}\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})=\mathbb{T}_1; & \mathsf{BG}(\mathfrak{l},\mathcal{F})=\mathfrak{Q}_1;\\ \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m})=\mathbb{T}_2; & \mathsf{BG}(\mathfrak{m},\mathcal{F})=\mathfrak{Q}_2;\\ [\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]=\mathscr{U}. & \end{array}$$

При цьому якщо $\mathfrak{Q}_1$ і $\mathfrak{Q}_2$ є векторними координатними просторами (тобто $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}_1)\neq\emptyset$, $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}_2)\neq\emptyset$), то універсальна кінематика $\mathcal{F}$ також є векторною.

3 Траєкторії для систем відліку в універсальних кінематиках

Означення 3. *Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна універсальна кінематика і $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — довільні системи відліку $\mathcal{F}$. Траєкторією точки $\mathrm{x}\in\mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ (при русі системи відліку $\mathfrak{m}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l}$) в кінематиці $\mathcal{F}$ будемо називати множину:*

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m},\mathcal{F}]}(\mathrm{x})=\left\{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}](t,\mathrm{x})\mid t\in\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})\right\}\subseteq\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$$

[2] Означення координатного простору можна знайти в [1, означення 3], [5, Definition 2.14.2].

Зауваження 2 (**про фізичний зміст траєкторії $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m},\mathcal{F}]}(\mathrm{x})$**). Можна уявляти, що довільна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є певним абстрактним "світом", котрий не обов'язково збігається з "нашим". Якщо в точці з координатою x у системі відліку $\mathfrak{m}$ "світу" $\mathcal{F}$ знаходиться нерухома відносно $\mathfrak{m}$ матеріальна точка, то $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m},\mathcal{F}]}(\mathrm{x})$ буде відображати траєкторію руху цієї матеріальної точки відносно системи відліку $\mathfrak{l}$.

Зауваження 3. У випадку, коли наперед відомо, про яку універсальну кінематику $\mathcal{F}$ йде мова, замість позначення $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m},\mathcal{F}]}(\mathrm{x})$ будемо використовувати скорочене позначення:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}).$$

В наступних твердженнях (3 та 4) описано деякі властивості траєкторій, введених вище. У цих твердженнях $\mathcal{F}$ є довільною універсальною кінематикою і $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — довільні системи відліку $\mathcal{F}$.

Твердження 3 (див. [22]). *Для довільних* $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ *з умов* $\mathrm{x}\neq\mathrm{y}$ *випливає співвідношення:*

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\cap\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{y})=\emptyset.$$

Твердження 4 (див. [22]). *Для довільного елемента* $\mathrm{w}\in\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ *існує, причому єдиний елемент* $\mathrm{x}\in\mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ *такий, що:*

$$\mathrm{w}\in\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}).$$

4 Одностайно-поступальні системи відліку в універсальних кінематиках

В цьому розділі буде сформульоване математично строге означення одностайно поступальних систем відліку в універсальних кінематиках. Спершу будуть наведені деякі технічні означення та технічні твердження, необхідні для того, щоб це зробити.

Нехай T, X — довільні множини. Для довільної упорядкованої пари $\omega=(t,x)\in T\times X$ будемо використовувати такі позначення:

$$\mathsf{bs}(\omega):=x,\quad \mathsf{tm}(\omega):=t.$$

(де символ $\times$ означає декартовий добуток множин).

Означення 4 (див. [22]). *Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна векторна універсальна кінематика і $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ довільна система відліку $\mathcal{F}$.*

1. ***Паралельним зсувом*** *множини $A\subseteq\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ на вектор $\mathrm{x}\in\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ (в системі відліку $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$) будемо називати множину:*

   $$A^{\langle+\mathrm{x};\,\mathfrak{l}\rangle}:=\{(\mathsf{tm}(\mathrm{w}),\,\mathrm{x}+\mathsf{bs}(\mathrm{w}))\mid\mathrm{w}\in A\}.$$

   У випадках, коли не виникає непорозумінь, замість позначення $A^{\langle+\mathrm{x};\,\mathfrak{l}\rangle}$ будемо використовувати позначення:

   $$A^{\langle+\mathrm{x}\rangle}.$$

2. *Будемо говорити, що множина $A\subseteq\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$* ***паралельна*** *множині $B\subseteq\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$* ***відносно*** *системи відліку $\mathfrak{l}$ (позначення: $A\parallel_{\mathfrak{l}}^{\mathcal{F}}B$), якщо існує елемент $\mathrm{x}\in\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ такий, що $B=A^{\langle+\mathrm{x}\rangle}$, тобто такий, що:*

   $$B=\{(\mathsf{tm}(\mathrm{w}),\,\mathrm{x}+\mathsf{bs}(\mathrm{w}))\mid\mathrm{w}\in A\}.$$

У випадку, коли відомо, про яку універсальну кінематику $\mathcal{F}$ йде мова, замість позначення $A \parallel_{\mathfrak{l}}^{\mathcal{F}} B$ будемо використовувати позначення:

$$A \parallel_{\mathfrak{l}} B$$

Твердження 5 (див. [22]). *Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна векторна універсальна кінематика і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ довільна система відліку $\mathcal{F}$. Тоді:*

1. *$A^{\langle +\mathbf{0}\rangle} = A$ (для довільної множини $A \subseteq \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$), де $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{\mathfrak{l}} = \mathbf{0}_{\mathfrak{l},\mathcal{F}}$ — нульовий вектор лінійного простору (над полем дійсних або комплексних чисел), породженого лінійною структурою $\mathbb{L}s(\mathfrak{l})$;*
2. *$\left(A^{\langle +\mathrm{x}\rangle}\right)^{\langle +\mathrm{y}\rangle} = A^{\langle +(\mathrm{x}+\mathrm{y})\rangle}$ (для довільних $A \subseteq \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ та $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$), зокрема $\left(A^{\langle +\mathrm{x}\rangle}\right)^{\langle +(-\mathrm{x})\rangle} = A^{\langle +\mathbf{0}\rangle} = A$;*
3. *Бінарне відношення $\parallel_{\mathfrak{l}}$ є відношенням еквівалентності (тобто рефлексивним, симетричним і транзитивним відношенням) на множині $2^{\mathbb{M}k(\mathfrak{l})} = \{A \mid A \subseteq \mathbb{M}k(\mathfrak{l})\}$.*

Означення 5 (див. [22]). *Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна універсальна кінематика.*

1. *Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **траєкторно-регулярною** відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (у кінематиці $\mathcal{F}$), якщо виконується наступна умова:*

   (а) *для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ траєкторія $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ (тобто $\forall\, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ з умови $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає рівність $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$, а отже і рівність $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$).*

   У наступних двох пунктах, $\mathcal{F}$ — довільна <u>векторна</u> універсальна кінематика.

2. *Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **одностайно-квазіпоступальною** (скорочено — **квазіодностайною**) відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (у кінематиці $\mathcal{F}$), якщо:*

   (б) *для довільних $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ виконується співвідношення $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) \parallel_{\mathfrak{l}} \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{y})$.*

3. *Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **одностайно-поступальною** (скорочено — **одностайною**) відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (у кінематиці $\mathcal{F}$), якщо $\mathfrak{m}$ є квазіодностайною і траєкторно регулярною відносно $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$, тобто, якщо виконуються умови* (а) *і* (б) *даного означення.*

Підкреслимо, що надалі всюди в цій статті замість термінів “одностайно-квазіпоступальна” та “одностайно-поступальна” (система відліку) ми будемо користуватись їхніми скороченими варіантами “***квазіодностайна***” та “***одностайна***” відповідно.

Зауваження 4. В роботі [22] показано, що на фізичному рівні *з допомогою означення 5 можна описати системи відліку, пов’язані з твердими тілами, що знаходяться в стані поступального руху* в рамках законів класичної механіки. Також в роботі [22] показано, що в рамках теорії відносності виділений курсивом висновок вже не є справедливим. Цей ефект обумовлений тим фактом, що лоренцове скорочення довжини не може бути рівномірним у прискорених системах відліку, а тому, жорсткі не інерційні системи відліку в “нерухомій” інерційній системі відліку не виглядають жорсткими [30, 31].

5 Одностайна поступальність і оператори перетворення координат

Означення 6. *Нехай,* $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$*, де* $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ *— довільні координатні простори, а* $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$*,* $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ *— довільні лінійно упорядковані множини.* ***Траєкторією*** *точки* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ *відносно оператора перетворення координат* $\mathscr{U}$ *будемо називати множину:*

$$\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}) := \{\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{T}_1\} \subseteq \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2).$$

Означення 7. 1) *Координатний простір* $\mathfrak{Q}$ *будемо називати* ***векторним****, якщо* $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) \neq \emptyset$*.*

2) *Нехай,* $\mathfrak{Q}$ *— векторний координатний простір і* $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ *— лінійно упорядкована множина.*

- **(2.1)** *Для довільної множини* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{T} \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ *покладемо,* $\mathbf{A}^{\langle +\mathrm{x}; \mathfrak{Q}\rangle} := \{(\mathsf{tm}(\mathrm{w}), \mathrm{x} + \mathsf{bs}(\mathrm{w})) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{A}\}$.
- **(2.2)** *Будемо говорити, що множина* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{T} \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ *є* $(\mathbb{T}, \mathfrak{Q})$***-паралельною*** *множині* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ *(позначення* $\mathbf{A} \parallel_{(\mathbb{T};\mathfrak{Q})} \mathbf{B}$*), якщо існує елемент* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ *такий, що:*

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\langle +\mathrm{x}; \mathfrak{Q}\rangle} = \{(\mathsf{tm}(\mathrm{w}), \mathrm{x} + \mathsf{bs}(\mathrm{w})) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{A}\}.$$

Аналогічно до твердження 5 доводиться наступне твердження.

Твердження 6. *Бінарне відношення* $\parallel_{(\mathbb{T};\mathfrak{Q})}$ *є відношенням еквівалентності на множині* $2^{\mathbf{T} \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})} = \{A \mid A \subseteq \mathbf{T} \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})\}$.

Означення 8. *Нехай,* $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ *— векторні координатні простори і* $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$*,* $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ *— лінійно упорядковані множини. Оператор перетворення координат* $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ *будемо називати* ***одностайно-поступальним*** *(скорочено —* ***одностайним****), якщо:*

1. *для довільного* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ *траєкторія* $\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ *є абстрактною траєкторією з* $\mathbb{T}_2$ *в* $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ *(тобто* $\forall\, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ *з умови* $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ *випливає рівність* $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$*, а отже і рівність* $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$*).*
2. *для довільних* $\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ *виконується співвідношення* $\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}) \parallel_{(\mathbb{T}_2;\mathfrak{Q}_2)} \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}})$.

Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна векторна універсальна кінематика. Тоді, згідно із системою позначень для універсальних кінематик (див. [2, підрозділ 5.2], [5, підрозділ 22.2]), для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ маємо рівності:

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}(\mathsf{BG}(\mathfrak{l}));$$
$$\mathbb{M}k(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}(\mathsf{BG}(\mathfrak{l})),$$

де $\mathsf{BG}(\mathfrak{l})$ — координатний простір. Враховуючи вищесказане, а також означення 4 (пункт 2), означення 5 (пункт 3), означення 7 (пункт (2.2)), та означення 8, отримуємо таке твердження:

Твердження 7. *Нехай,* $\mathcal{F}$ *— довільна векторна універсальна кінематика і* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *— довільні системи відліку* $\mathcal{F}$*. Тоді:*

1. *Для довільних множин* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ *співвідношення* $\mathbf{A} \parallel_{\mathfrak{l}} \mathbf{B}$ *рівносильне співвідношенню:*
$$\mathbf{A} \parallel_{(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l});\mathsf{BG}(\mathfrak{l}))} \mathbf{B}.$$

2. *Система відліку* $\mathfrak{m}$ *є одностайною відносно системи відліку* $\mathfrak{l}$ *тоді і тільки тоді, коли оператор перетворення координат:*
$$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}] \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}), \mathsf{BG}(\mathfrak{m}); \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}), \mathsf{BG}(\mathfrak{l}))$$
є одностайним.

6 Критерії одностайної поступальності для операторів перетворень координат та систем відліку

Теорема 1. *Нехай,* $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ *— довільні векторні координатні простори, а* $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$, $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ *— довільні лінійно упорядковані множини. Відображення* $\mathscr{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longmapsto \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ *є одностайним оператором перетворення координат тоді і тільки тоді, коли існують функції:*

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longmapsto \mathbf{T}_2, \\ \mathbf{F} &: \mathbf{T}_2 \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2) \quad \text{і} \\ \mathbf{g} &: \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2), \end{aligned}$$

що задовольняють такі умови:

1. *Для довільного* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ *функція* $\Phi_{(\mathrm{x})}(t) := \Phi(t, \mathrm{x})$, $t \in \mathbf{T}_1$ *є бієкцією між* $\mathbf{T}_1$ *і* $\mathbf{T}_2$.

2. *Функція* $\mathbf{g}$ *є бієкцією між* $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ *і* $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$.

3. *Для довільної пари* $(t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ *виконується рівність:*
$$\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) = (\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})). \tag{1}$$

Доведення. **I) Необхідність**. Нехай, оператор перетворення координат $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ є одностайним. Покладемо:
$$\Phi(t, \mathrm{x}) := \mathsf{tm}(\mathscr{U}(t, \mathrm{x})), \qquad (t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1). \tag{2}$$
Зафіксуємо довільний елемент $\mathrm{x}_0 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$. Покладемо:
$$\mathbf{F} := \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_0). \tag{3}$$
За означенням 8, $\mathbf{F}$ є абстрактною траєкторією з $\mathbf{T}_2$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, тобто функцією з $\mathfrak{D}(\mathbf{F}) \subseteq \mathbf{T}_2$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Доведемо, що $\mathfrak{D}(\mathbf{F}) = \mathbf{T}_2$. Нехай, $\tau \in \mathbf{T}_2$. Виберемо довільний елемент $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Оскільки, за означенням 2, $\mathscr{U}$ є бієкцією між $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, то існують елементи $\widetilde{t} \in \mathbf{T}_1$ і $\widetilde{\mathrm{x}} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ такі, що $\mathscr{U}\left(\widetilde{t}, \widetilde{\mathrm{x}}\right) = (\tau, \mathrm{y})$. Тоді $(\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}})$. За означенням 8, $\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}_2$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Отже, із співвідношення $(\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}})$ випливає, що $\tau \in \mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}))$. Згідно з умовою 2 означення 8, маємо:
$$\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}) \parallel_{(\mathbb{T}_2;\mathfrak{Q}_2)} \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_0). \tag{4}$$

Тобто, враховуючи (3), маємо:

$$\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}) \parallel_{(\mathbb{T}_2;\mathfrak{Q}_2)} \mathbf{F}.$$

З останнього співвідношення, за означенням 7 (пункт (2.2)), випливає, що $\mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}})) = \mathfrak{D}(\mathbf{F})$. Отже, оскільки $\tau \in \mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}))$, то $\tau \in \mathfrak{D}(\mathbf{F})$. Таким чином, довільний елемент $\tau \in \mathbf{T}_2$ належить до $\mathfrak{D}(\mathbf{F}) \subseteq \mathbf{T}_2$. Тому, $\mathfrak{D}(\mathbf{F}) = \mathbf{T}_2$. Тобто $\mathbf{F}$ є відображенням виду:

$$\mathbf{F} : \mathbf{T}_2 \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2).$$

Тому, траєкторію $\mathbf{F} := \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_0)$ можна подати у вигляді:

$$\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_0) = \{(\tau, \mathbf{F}(\tau)) \mid \tau \in \mathbf{T}_2\}. \tag{5}$$

Покладемо:

$$\mathbf{G}(t,\mathrm{x}) := \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t,\mathrm{x})) - \mathbf{F}(\Phi(t,\mathrm{x})), \quad (t,\mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1).$$

Тоді, використовуючи (2), для довільних $(t,\mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathscr{U}(t,\mathrm{x}) &= (\mathsf{tm}(\mathscr{U}(t,\mathrm{x})), \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t,\mathrm{x}))) = \\ &= (\Phi(t,\mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t,\mathrm{x})) + \mathbf{G}(t,\mathrm{x})).\end{aligned} \tag{6}$$

Отже, згідно означення 6, для довільного фіксованого елемента $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ траєкторію $\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}) &= \{\mathscr{U}(t,\mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{T}_1\} = \\ &= \{(\Phi(t,\mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t,\mathrm{x})) + \mathbf{G}(t,\mathrm{x})) \mid t \in \mathbf{T}_1\}.\end{aligned} \tag{7}$$

За означенням 8 маємо $\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_0) \parallel_{(\mathbb{T}_2;\mathfrak{Q}_2)} \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$. Тому, враховуючи співвідношення (5) і означенням 7 (пункт (2.2)), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}) &= \{(\mathsf{tm}(\mathrm{w}), \mathrm{y} + \mathsf{bs}(\mathrm{w})) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_0)\} = \\ &= \{(\tau, \mathrm{y} + \mathbf{F}(\tau)) \mid \tau \in \mathbf{T}_2\},\end{aligned} \tag{8}$$

де $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Із співвідношень (7) і (8) випливає, що:

$$\{(\Phi(t,\mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t,\mathrm{x})) + \mathbf{G}(t,\mathrm{x})) \mid t \in \mathbf{T}_1\} = \{(\tau, \mathrm{y} + \mathbf{F}(\tau)) \mid \tau \in \mathbf{T}_2\}.$$

Звідси випливає, що для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1$ існують елементи $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{T}_2$ такі, що:

$$(\Phi(t_i,\mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t_i,\mathrm{x})) + \mathbf{G}(t_i,\mathrm{x})) = (\tau_i, \mathrm{y} + \mathbf{F}(\tau_i)) \quad \left(i \in \overline{1,2}\right).$$

З останньої рівності отримуємо:

$$\begin{aligned}&\Phi(t_i,\mathrm{x}) = \tau_i; \\ &\mathbf{F}(\tau_i) + \mathbf{G}(t_i,\mathrm{x}) = \mathrm{y} + \mathbf{F}(\tau_i) \qquad (i \in \overline{1,2}).\end{aligned}$$

Тобто, $\mathbf{G}(t_i,\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ $(i \in \overline{1,2})$. Отже, $\mathbf{G}(t_1,\mathrm{x}) = \mathbf{G}(t_2,\mathrm{x})$ $(\forall t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1)$. Звідси, враховуючи довільність вибору вектора $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$, випливає, що існує функція $\mathbf{g} : \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ така, що:

$$\mathbf{G}(t,\mathrm{x}) = \mathbf{g}(\mathrm{x}) \qquad (\forall (t,\mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)).$$

Враховуючи останню рівність, співвідношення (6) переписується у вигляді:

$$\mathscr{U}(t,\mathrm{x}) = (\Phi(t,\mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t,\mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})) \quad ((t,\mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)). \tag{9}$$

Отже, залишилось довести, що функції Φ і $\mathbf{g}$ задовольняють умови 1 і 2 даної теореми.

I.1) Нехай, $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$. Зафіксуємо довільний елемент $\tau \in \mathbf{T}_2$. Розглянемо довільний $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Оскільки (за означенням 8), $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, то, за означенням 2, існує пара $\left(\widetilde{t}, \widetilde{\mathrm{x}}\right) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ така, що $\mathscr{U}\left(\widetilde{t}, \widetilde{\mathrm{x}}\right) = (\tau, \mathrm{y})$. Тоді, за означенням 6,

$$(\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}). \tag{10}$$

Оскільки $\mathscr{U}$ — одностайне перетворення координат, то, за означенням 8, $\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}) \parallel_{(\mathbb{T}_2;\mathfrak{Q}_2)} \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}})$. Тому, за означенням 7, $\mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})) = \mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}))$. Отже, оскільки, згідно (10), $\tau \in \mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}))$, то $\tau \in \mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}))$. Тому, за означенням 6, існує момент часу $t \in \mathbf{T}_1$ такий, що $\mathsf{tm}(\mathscr{U}(t, \mathrm{x})) = \tau$. Тобто, згідно (2), $\Phi(t, \mathrm{x}) = \tau$. Отже, при довільному фіксованому $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ маємо:

$$\forall \tau \in \mathbf{T}_2 \, \exists t \in \mathbf{T}_1 \; (\Phi(t, \mathrm{x}) = \tau). \tag{11}$$

Нехай, знову, x — фіксований елемент з $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$, і для деяких $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1$ має місце рівність $\Phi(t_1, \mathrm{x}) = \Phi(t_2, \mathrm{x})$. Тоді, згідно з (9), отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathscr{U}(t_1, \mathrm{x}) &= (\Phi(t_1, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t_1, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})) = \\ &= (\Phi(t_2, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t_2, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})) = \mathscr{U}(t_2, \mathrm{x}). \end{aligned}$$

Отже, оскільки $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, то, за означенням 2, з останньої рівності випливає рівність, $t_1 = t_2$. Таким чином, при довільному фіксованому $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ маємо:

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1 \; ((\Phi(t_1, \mathrm{x}) = \Phi(t_2, \mathrm{x})) \Rightarrow (t_1 = t_2)). \tag{12}$$

З (11) і (12) випливає, що функція Φ задовольняє першу умову даної теореми.

I.2) Нехай, $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Виберемо довільний елемент $\tau \in \mathbf{T}_2$. Оскільки оскільки $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, то, за означенням 2, існує пара $(t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ така, що:

$$\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) = (\tau, \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{y}).$$

Тоді, згідно з (9), отримуємо:

$$(\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})) = (\tau, \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{y}).$$

Звідси випливає, що $\Phi(t, \mathrm{x}) = \tau$ і $\mathbf{F}(\tau) + \mathbf{g}(\mathrm{x}) = \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{y}$. З останньої рівності отримуємо, $\mathbf{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$. Таким чином:

$$\forall \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2) \, \exists \mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \; (\mathbf{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}). \tag{13}$$

Нехай, $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{g}(\mathrm{x}_1) = \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)$. Виберемо довільний елемент $\tau_0 \in \mathbf{T}_2$. Згідно з (11), існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1$ такі, що:

$$\Phi(t_1, \mathrm{x}_1) = \Phi(t_2, \mathrm{x}_2) = \tau_0.$$

Звідси, використовуючи (9), отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathscr{U}(t_1, \mathrm{x}_1) &= (\Phi(t_1, \mathrm{x}_1), \mathbf{F}(\Phi(t_1, \mathrm{x}_1)) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_1)) = \\ &= (\tau_0, \mathbf{F}(\tau_0) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_1)) = (\tau_0, \mathbf{F}(\tau_0) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)) = \\ &= (\Phi(t_2, \mathrm{x}_2), \mathbf{F}(\Phi(t_2, \mathrm{x}_2)) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)) = \mathscr{U}(t_2, \mathrm{x}_2). \end{aligned}$$

Оскільки $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, то, за означенням 2, з останньої рівності отримуємо, $(t_1, \mathrm{x}_1) = (t_2, \mathrm{x}_2)$, тобто $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$. Таким чином, тільки-що було доведено, що:

$$\forall \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \ \left((\mathbf{g}(\mathrm{x}_1) = \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)) \Rightarrow (\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2) \right). \tag{14}$$

Із співвідношень (13) і (14) випливає, що функція $\mathbf{g}$ задовольняє другу умову теореми.

Таким чином, якщо оператор $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ є одностайним, то існують функції $\Phi : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longmapsto \mathbf{T}_2$, $\mathbf{F} : \mathbf{T}_2 \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ і $\mathbf{g} : \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, що задовольняють умови 1, 2 і 3 даної теореми.

II) Достатність. Навпаки, нехай існують функції $\Phi : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longmapsto \mathbf{T}_2$, $\mathbf{F} : \mathbf{T}_2 \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ і $\mathbf{g} : \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, що задовольняють умови 1, 2 і 3 даної теореми. Доведемо, що тоді відображення $\mathscr{U}$, що задається формулою (1) є одностайним оператором перетворення координат.

II.1) Доведемо, що $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$. Нехай, $(t_1, \mathrm{x}_1), (t_2, \mathrm{x}_2) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і

$$\mathscr{U}(t_1, \mathrm{x}_1) = \mathscr{U}(t_2, \mathrm{x}_2).$$

Тоді, згідно (1), отримуємо:

$$\begin{gathered}\Phi(t_1, \mathrm{x}_1) = \Phi(t_2, \mathrm{x}_2); \qquad (15)\\ \mathbf{F}(\Phi(t_1, \mathrm{x}_1)) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_1) = \mathbf{F}(\Phi(t_2, \mathrm{x}_2)) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_2).\end{gathered}$$

З останніх двох рівностей випливає, що $\mathbf{g}(\mathrm{x}_1) = \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)$. Отже, згідно із другою умовою теореми, $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$. З останньої рівності і рівності (15) випливає рівність $\Phi(t_1, \mathrm{x}_1) = \Phi(t_2, \mathrm{x}_1)$. Отже, згідно з першою умовою теореми, $t_1 = t_2$. Таким чином, $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$ і $t_1 = t_2$, тобто $(t_1, \mathrm{x}_1) = (t_2, \mathrm{x}_2)$. Отже, для довільних $(t_1, \mathrm{x}_1), (t_2, \mathrm{x}_2) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ маємо:

$$(\mathscr{U}(t_1, \mathrm{x}_1) = \mathscr{U}(t_2, \mathrm{x}_2)) \Rightarrow ((t_1, \mathrm{x}_1) = (t_2, \mathrm{x}_2)) \tag{16}$$

Розглянемо довільну упорядковану пару $(\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. З умов 1 і 2 даної теореми випливає існування таких $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $t \in \mathbf{T}_1$, що:

$$\mathbf{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{y} - \mathbf{F}(\tau) \quad \text{і} \quad \Phi(t, \mathrm{x}) = \tau.$$

Звідси, використовуючи (1), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) = {} & (\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})) = \\ = {} & (\tau, \mathbf{F}(\tau) + (\mathrm{y} - \mathbf{F}(\tau))) = (\tau, \mathrm{y}).\end{aligned}$$

Таким чином:

$$\forall (\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2) \ \exists (t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \ (\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) = (\tau, \mathrm{y})) \tag{17}$$

З (16) і (17) випливає, що відображення $\mathscr{U}$ є бієкцією між $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, тобто, за означенням 2:

$$\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2).$$

II.2) Доведемо, що оператор перетворення координат $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ є одностайним.

II.2.a) Для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$, використовуючи (1) та умову 1 даної теореми, маємо:

$$\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}) = \{\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{T}_1\} =$$

$$= \left\{ \left(\Phi\left(t, \mathrm{x}\right), \mathbf{F}\left(\Phi\left(t, \mathrm{x}\right)\right) + \mathbf{g}\left(\mathrm{x}\right) \right) \mid t \in \mathbf{T}_1 \right\} =$$
$$= \left\{ \left(\tau, \mathbf{F}\left(\tau\right) + \mathbf{g}\left(\mathrm{x}\right)\right) \mid \tau \in \mathbf{T}_2 \right\}. \qquad (18)$$

Оскільки $\mathbf{F}$ є відображенням з $\mathbf{T}_2$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ і, згідно з умовою 2 теореми, $\mathbf{g}(\mathrm{x}) \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, то $\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbf{T}_2$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Отже, умова 1 означення 8 для відображення $\mathscr{U}$ виконується.

II.2.б) Перевіримо виконання умови 2 означення 8 для відображення $\mathscr{U}$. Для довільних $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$, використовуючи (18), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_2) &= \left\{ \left(\tau, \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)\right) \mid \tau \in \mathbf{T}_2 \right\} = \\ &= \left\{ \left(\tau, \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_1) + \left(\mathbf{g}(\mathrm{x}_2) - \mathbf{g}(\mathrm{x}_1)\right)\right) \mid \tau \in \mathbf{T}_2 \right\} = \\ &= \left\{ \left(\tau,\ \mathrm{y} + \left(\mathbf{g}(\mathrm{x}_2) - \mathbf{g}(\mathrm{x}_1)\right)\right) \mid (\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_1) \right\} = \left(\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_1)\right)^{\langle +(\mathbf{g}(\mathrm{x}_2) - \mathbf{g}(\mathrm{x}_1));\, \mathfrak{Q}_2 \rangle}.\end{aligned}$$

Отже, згідно з означенням 7, враховуючи довільність вибору векторів $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ отримуємо:

$$\forall\, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \ \left(\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_1) \parallel_{(\mathbb{T}_2; \mathfrak{Q}_2)} \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}_2) \right).$$

Тому, умова 2 означення 8 для відображення $\mathscr{U}$ також виконується. Таким чином, обидві умови означення 8 для відображення $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ виконуються. Тому, за означенням 8, $\mathscr{U}$ є одностайним оператором перетворення координат. □

З теореми 1 випливає такий наслідок:

Наслідок 2. *Нехай, $\mathcal{F}$ — векторна універсальна кінематика. Система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ тоді і тільки тоді, коли існують функції:*

$$\Phi : \mathbb{M}k(\mathfrak{m}) \longmapsto \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}),$$
$$\mathbf{F} : \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}),$$
$$\mathbf{g} : \mathbf{Zk}(\mathfrak{m}) \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}),$$

що задовольняють такі умови:

1. *Для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ функція $\Phi_{(\mathrm{x})}(t) := \Phi(t, \mathrm{x})$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ є бієкцією між $\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ і $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$.*

2. *Функція $\mathbf{g}$ є бієкцією між $\mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ і $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$.*

3. *Для довільного $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ виконується рівність:*

$$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\, \mathrm{w} = \left(\Phi(t_{\mathrm{w}}, \mathrm{x}_{\mathrm{w}}), \mathbf{F}\left(\Phi(t_{\mathrm{w}}, \mathrm{x}_{\mathrm{w}})\right) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_{\mathrm{w}}) \right),$$

де $t_{\mathrm{w}} = \mathsf{tm}(\mathrm{w})$, $\mathrm{x}_{\mathrm{w}} = \mathsf{bs}(\mathrm{w})$.

Функція Φ в умові теореми 1 визначається однозначно для довільного фіксованого одностайного оператора перетворення координат. Справді, з формули (1) випливає, що:

$$\Phi(t, \mathrm{x}) := \mathsf{tm}\left(\mathscr{U}(t, \mathrm{x})\right), \qquad (t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1).$$

Що торкається функцій $\mathbf{F}$ і $\mathbf{g}$, то вони визначаються неоднозначно. Справді нехай, трійка функцій Φ, $\mathbf{F}$ і $\mathbf{g}$ задовольняє умови теореми 1. Тоді, якщо взяти довільний вектор $\mathbf{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, і покласти:

$$\mathbf{F}_1(\tau) := \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{y} \quad (\tau \in \mathbf{T}_2);$$

$$\mathbf{g}_1(\mathrm{x}) := \mathbf{g}(\mathrm{x}) - \mathbf{y} \quad (\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)),$$

то, як легко перевірити, трійка функцій Φ, $\mathbf{F}_1$ і $\mathbf{g}_1$ також задовольнятиме умови теореми 1.

Твердження 8. *Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — векторні координатні простори; $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$, $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ — лінійно упорядковані множини і відображення $\mathscr{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longmapsto \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ є одностайним оператором перетворення координат. Якщо функції $\Phi : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longmapsto \mathbf{T}_2$, $\mathbf{F}, \mathbf{F}_1 : \mathbf{T}_2 \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ і $\mathbf{g}, \mathbf{g}_1 : \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ є такими, що:*

1. *функція Φ задовольняє умову 1 теореми 1;*
2. *функції $\mathbf{g}$ і $\mathbf{g}_1$ задовольняють умову 2 теореми 1;*
3. *для довільних $(t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ виконується рівність:*

$$\begin{aligned}\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) &= (\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})) = \\ &= (\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}_1(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}_1(\mathrm{x})),\end{aligned} \tag{19}$$

то існує вектор $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ такий, що для довільних $\tau \in \mathbf{T}_2$ і $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ мають місце рівності:

$$\mathbf{F}_1(\tau) = \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{y}_0; \tag{20}$$

$$\mathbf{g}_1(\mathrm{x}) = \mathbf{g}(\mathrm{x}) - \mathbf{y}_0. \tag{21}$$

Доведення. З рівності (19) для довільних $(t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ отримуємо рівність:

$$\mathbf{F}(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x}) = \mathbf{F}_1(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}_1(\mathrm{x}).$$

Враховуючи,що функція Φ задовольняє умову 1 теореми 1, останню рівність можна переписати у вигляді:

$$\mathbf{F}(\tau) + \mathbf{g}(\mathrm{x}) = \mathbf{F}_1(\tau) + \mathbf{g}_1(\mathrm{x}) \quad (\forall \tau \in \mathbf{T}_2 \, \forall \mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)).$$

Звідси:

$$\mathbf{F}_1(\tau) - \mathbf{F}(\tau) = \mathbf{g}(\mathrm{x}) - \mathbf{g}_1(\mathrm{x}) \quad (\forall \tau \in \mathbf{T}_2 \, \forall \mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)).$$

Тому, вирази в правій і лівій частині останньої рівності не залежать ні від змінної τ ні від змінної x. Тобто, існує елемент $\mathrm{y}_0 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ такий, що для довільних $\tau \in \mathbf{T}_2$ і $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ мають місце рівності:

$$\mathbf{F}_1(\tau) - \mathbf{F}(\tau) = \mathrm{y}_0; \qquad \mathbf{g}(\mathrm{x}) - \mathbf{g}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{y}_0.$$

З останніх рівностей випливають рівності (20) і (21). □

Список використаної літератури

1. Грушка Я.І. Критерій існування універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах // Буковинський математичний журнал. — 2014. — Т. 2, № 2-3. — С. 59–71.
2. Грушка Я.І. Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 1. — С. 74–118.

3. Грушка Я.I. Еволюційні розширення кінематичних множин та універсальних кінематик // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 139–204.
4. Грушка Я.I. Теорема про еволюційне розширення для універсальних кінематик // Буковинський математичний журнал. — 2015. — Т. 3, № 3-4. — С. 67–77.
5. Grushka Ya.I. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). — Preprint: ResearchGate, 2017. — P. 1–208. — URL: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521.
6. Baccetti Valentina, Tate Kyle, Visser Matt. Inertial frames without the relativity principle // J. High Energ. Phys. — 2012. — Vol. 2012, no. 5. — P. 43. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05(2012)119.
7. Baccetti Valentina, Tate Kyle, Visser Matt. Lorentz violating kinematics: Threshold theorems // J. High Energ. Phys. — 2012. — Vol. 2012, no. 3. — P. 28. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2012)087.
8. Baccetti Valentina, Tate Kyle, Visser Matt. Inertial frames without the relativity principle: breaking Lorentz symmetry // Proceedings of the Thirteenth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity. — World Scientific, 2013. — P. 1189–1191. — URL: https://arxiv.org/abs/1302.5989.
9. Mamone-Capria Marco. On the Fundamental Theorem of the Theory of Relativity // Foundations of Physics. — 2016. — Dec. — Vol. 46, no. 12. — P. 1680–1712. — URL: https://doi.org/10.1007/s10701-016-0038-3.
10. Berzi Vittorio, Gorini Vittorio. On space-time, reference frames and the structure of relativity groups // Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.). — 1972. — Vol. 16. — P. 1–22.
11. Gorini Vittorio. Linear kinematical groups // Communications in Mathematical Physics. — 1971. — Jun. — Vol. 21, no. 2. — P. 150–163. — URL: https://doi.org/10.1007/BF01646749.
12. Lugiato Luigi A., Gorini Vittorio. On the Structure of Relativity Groups // Journal of Mathematical Physics. — 1972. — Vol. 13, no. 5. — P. 665–671. — https://doi.org/10.1063/1.1666034.
13. Recami E., Olkhovsky V.S. About Lorentz transformations and tachyons // Lettere al Nuovo Cimento. — 1971. — Vol. 1, no. 4. — P. 165–168. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF02799345.
14. Recami E., Mignani. R. More about Lorentz transformations and tachyons // Lettere al Nuovo Cimento. — 1972. — Vol. 4, no. 4. — P. 144–152.
15. Recami E. Classical Tachyons and Possible Applications // Riv. Nuovo Cim. — 1986. — Vol. 9, no. 6. — P. 1–178. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF02724327.
16. Goldoni R. Faster-than-light inertial frames, interacting tachyons and tadpoles // Lettere al Nuovo Cimento. — 1972. — Vol. 5, no. 6. — P. 495–502. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF02785903.
17. Vieira Ricardo S. An Introduction to the Theory of Tachyons // Revista Brasileira de Ensino de Fisica. — 2012. — Vol. 34, no. 3. — P. 1–15. — URL: http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172012000300006.
18. Tangherlini Frank Robert. The Velocity of Light in Uniformly Moving Frames // Abraham Zelmanov Journal. — 2009. — Vol. 2. — P. 44–110.

19. Медведєв С.Ю., Галамба І.Ф. Про деякі наслідки з перетворень Тангерліні // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. — 2012. — № 31. — С. 174–184.
20. Medvedev Sergey Yu. Superluminal Velocities in the Synchronized Space-Time // Progress in Physics. — 2014. — Vol. 10, no. 3. — P. 151–156.
21. Hassani Mohamed. Foundations of Superluminal Relativistic Mechanics // Communications in Physics. — 2015. — Vol. 24, no. 4. — P. 313–332.
22. Грушка Я.І. Одностайно-поступальний рух систем відліку в універсальних кінематиках // Буковинський математичний журнал. — 2017. — Т. 5, № 3-4.
23. Грушка Я.І. Мінливі множини та їх властивості // Доповіді Національної академії наук України. — 2012. — № 5. — С. 12–18.
24. Грушка Я.І. Примітивні мінливі множини та їх властивості // Математичний вісник НТШ. — 2012. — Т. 9. — С. 52–80.
25. Грушка Я.І. Видимість у мінливих множинах // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2012. — Т. 9, № 2. — С. 122–145.
26. Грушка Я.І. Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем // Укр. мат. журн. — 2013. — Т. 65, № 9. — С. 1198–1218.
27. Грушка Я.І. Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 1. — С. 192–227.
28. Грушка Я.І. Перетворення координат у кінематичних мінливих множинах // Доповіді Національної академії наук України. — 2015. — № 3. — С. 24–31. — URL: `http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2015.03.024`.
29. Grushka Ya.I. On Universal Coordinate Transform in Kinematic Changeable Sets // Methods Funct. Anal. Topology. — 2017. — Vol. 23, no. 2. — P. 133–154.
30. Møller C. The theory of relativity. International series of monographs on physics. — Clarendon Press, Oxford, 1957. — P. 1–398.
31. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. Part 1. — W. H. Freeman, 1973. — ISBN: 9780716703341.

References

1. Grushka Ya.I. (2014). Criterion of existence of universal coordinate transform in kinematic changeable sets. *Bukovinian Mathematical Journal*, 2(2-3), 59–71.
2. Grushka Ya.I. (2015). Kinematic changeable sets with given universal coordinate transforms. *Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 12(1), 74–118.
3. Grushka Ya.I. (2015). Evolutionary Extensions of Kinematic Sets and Universal Kinematics. *Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 12(2), 139–204.
4. Grushka Ya.I. (2015). Theorem on Evolutional Extension for Universal Kinematics. *Bukovinian Mathematical Journal*, 3(3-4), 67–77.
5. Grushka Ya.I. (2017). Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). Preprint: ResearchGate, 208 pages.
6. Baccetti Valentina, Tate Kyle, Visser Matt. (2012). Inertial frames without the relativity principle. *J. High Energ. Phys.*, 2012(5), 43.

7. Baccetti Valentina, Tate Kyle, Visser Matt. (2012). Lorentz violating kinematics: Threshold theorems. *J. High Energ. Phys.*, 2012(3), 28.

8. Baccetti Valentina, Tate Kyle, Visser Matt. (2013). Inertial frames without the relativity principle: breaking Lorentz symmetry. In *Proceedings of the Thirteenth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, pages 1189–1191. World Scientific.

9. Mamone-Capria Marco. (2016). On the Fundamental Theorem of the Theory of Relativity. *Foundations of Physics*, 46(12), 1680–1712.

10. Berzi Vittorio, Gorini Vittorio. (1972). On space-time, reference frames and the structure of relativity groups. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, 16, 1–22.

11. Gorini Vittorio. (1971). Linear kinematical groups. *Communications in Mathematical Physics*, 21(2), 150–163.

12. Lugiato Luigi A., Gorini Vittorio. (1972). On the Structure of Relativity Groups. *Journal of Mathematical Physics*, 13(5), 665–671.

13. Recami E., Olkhovsky V.S. (1971). About Lorentz transformations and tachyons. *Lettere al Nuovo Cimento*, 1(4), 165–168.

14. Recami E., Mignani. R. (1972). More about Lorentz transformations and tachyons. *Lettere al Nuovo Cimento*, 4(4), 144–152.

15. Recami E. (1986). Classical Tachyons and Possible Applications. *Riv. Nuovo Cim.*, 9(6), 1–178.

16. Goldoni R. (1972). Faster-than-light inertial frames, interacting tachyons and tadpoles. *Lettere al Nuovo Cimento*, 5(6), 495–502.

17. Vieira Ricardo S. (2012). An Introduction to the Theory of Tachyons. *Revista Brasileira de Ensino de Fisica*, 34(3), 1–15.

18. Tangherlini Frank Robert. (2009). The Velocity of Light in Uniformly Moving Frames. *Abraham Zelmanov Journal*, 2, 44–110.

19. Medvedev S.Yu., Galamba I.F. (2012). About some consequences from the Tangherlini transformations. *Uzhhorod University Scientific Herald. Series Physics*, (31), 174–184.

20. Medvedev Sergey Yu. (2014). Superluminal Velocities in the Synchronized Space-Time. *Progress in Physics*, 10(3), 151–156.

21. Hassani Mohamed. (2015). Foundations of Superluminal Relativistic Mechanics. *Communications in Physics*, 24(4), 313–332.

22. Grushka Ya.I. (2017). Unanimously-translational motion of reference frames in universal kinematics. *Bukovinian Mathematical Journal*, 5(3-4).

23. Grushka Ya.I. (2012). Changeable sets and their properties. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (5), 12–18.

24. Grushka Ya.I. (2012). Primitive changeable sets and their properties. *Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society*, 9, 52–80.

25. Grushka Ya.I. (2012). Visibility in changeable sets. *Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 9(2), 122–145.

26. Grushka Ya.I. (2013). Base changeable sets and mathematical simulation of the evolution of systems. *Ukrainian Math. J.*, 65(9), 1198–1218.

27. Grushka Ya.I. (2014). Changeable sets and their application for the construction of tachyon kinematics. *Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 11(1), 192–227.
28. Grushka Ya.I. (2015). Coordinate transforms in kinematic changeable sets. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (3), 24–31.
29. Grushka Ya.I. (2017). On Universal Coordinate Transform in Kinematic Changeable Sets. *Methods Funct. Anal. Topology*, 23(2), 133–154.
30. Møller C. (1957). *The theory of relativity.* International series of monographs on physics. Clarendon Press, Oxford.
31. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. (1973). *Gravitation. Part 1.* W. H. Freeman.

Summary. ***Ya.I. Grushka. The criterion for self-consistently translational motion of reference frames in universal kinematics.*** *Universal kinematics as mathematical objects may be interesting for astrophysics, because there exists the hypothesis, that in the large scale of the Universe, physical laws (in particular, the laws of kinematics) may be different from the laws, acting in the neighborhood of our Solar System. The present paper is devoted to investigation of self-consistently translational motion of reference frames in abstract universal kinematics. In the case of self-consistently translational motion we can give the clear and unambiguous definition of displacement as well average and instantaneous speed of the reference frame. Hence the uniform rectilinear motion is the particular case of self-consistently translational motion. So, the investigation of self-consistently translational motion is technically necessary for definition of classes of inertially-related reference frames (being in the state of uniform rectilinear mutual motion) in universal kinematics. In the paper we establish the necessary and sufficient condition on coordinate transformation between reference frames of universal kinematics assuring self-consistently translational motion of one reference frame relatively to another:*

Theorem. *Let* $\mathcal{F}$ *be vector universal kinematics. The reference frame* $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *is self-consistently translational relatively the reference frame* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *if and only if, there exist the functions:* $\Phi : \mathbb{M}k(\mathfrak{m}) \longmapsto \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, $\mathbf{F} : \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$, $\mathbf{g} : \mathbf{Zk}(\mathfrak{m}) \longmapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$, *satisfying the following conditions:*

1. For each $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ *the function* $\Phi_{(\mathrm{x})}(t) := \Phi(t, \mathrm{x})$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ *is a bijection between* $\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ *and* $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$.

2. The function $\mathbf{g}$ *is a bijection between* $\mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ *and* $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$.

3. For every $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ *the following equality is performed:*

$$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,\mathrm{w} = \left(\Phi(t_{\mathrm{w}}, \mathrm{x}_{\mathrm{w}}), \mathbf{F}(\Phi(t_{\mathrm{w}}, \mathrm{x}_{\mathrm{w}})) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_{\mathrm{w}})\right),$$

where $t_{\mathrm{w}} = \mathsf{tm}(\mathrm{w})$, $\mathrm{x}_{\mathrm{w}} = \mathsf{bs}(\mathrm{w})$.

Keywords: *universal kinematics, reference frames, self-consistently translational motion.*

Одержано редакцією 01.12.2017 Прийнято до друку 29.12.2017