А. В. Воронцова
магістр, Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна,
aki57776@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3363-2229

К. О. Буряченко
кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна,
katarzyna_@ukr.net

УДК 517.94 PACS 02,03,05,06,07
DOI: 10.31651/2076-5851-2018-1-113-119

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПАРАМЕТРОМ В ПРАВІЙ ЧАСТИНІ

У роботі розглядається перша крайова задача для квазілінійного рівняння другого порядку з параметром в правій частині та нелінійного степеневого зросту. За допомогою операторних методів доведено теорему існування класичного розв`язку задачі. Наведено методично-теоретичні аспекти застосувань отриманого результату для розв'язання відповідних задач.

Ключові слова: крайові задачі, квазілінійне рівняння другого порядку, функція Гріна, нерухома точка, теорема Шаудера**.**

1. Вступ

Подана робота присвячена отриманню умов розв'язності крайових задач для квазілінійних рівнянь другого порядку з параметром в правій частині у випадку нелінійного степеневого зросту довільного порядку. У основі сформульованої задачі лежить лінійна та квазілінійна задачі зі змінними коефіцієнтами. Дослідження проводиться за допомогою операторних методів та методу нерухомої точки. А саме з використанням теореми Шаудера та її наслідків. Основним результатом роботи є теорема розв'язності першої крайової задачі для рівняння виду:

$$a_0(t)\frac{d^2x}{dt^2}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_2(t)x(t)=f(\lambda x(t),t),$$

$x(0)=x(1)=0,$

де $f(\lambda x(t),t)=\lambda x^n+g(t)$.

Одержані результати мають методично-теоретичне значення та можуть бути використані не тільки у подальших дослідженнях диференціальних рівнянь у частинних похідних та у прикладних задачах, а також у розробці відповідних прикладів нелінійних рівнянь з степеневою нелінійністю, описі методики розв'язання цих задач за допомогою функції Гріна та теорем Шаудера про нерухомі точки.

2. Основний результат роботи: теорема про розв'язність крайових задач для квазілінійних рівнянь другого порядку з параметром в правій частині

Розглянемо першу крайову задачу для квазілінійного рівняння другого порядку з параметром і нелінійним степеневим зростом по $x(t)$ у правій частині: $x^n(t), n>1$:

$$a_0(t)\frac{d^2x}{dt^2}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_2(t)x(t)=f(\lambda x(t),t), \quad (1)$$

$$x(0)=x(1)=0, \quad (2)$$

де $f(\lambda x(t),t)=\lambda x^n+g(t)$, $a_0(t)\neq 0$.

Сформулюємо умови на коефіцієнти при функції $x(t)$ та на функцію $g(t)$ у правій частині: $a_0(t),\ a_1(t),\ a_2(t) \in C_{[0,1]}, a_2(t) \le 0$ та $g(t) \in C_{[0,1]}$.

Наступна теорема є основним результатом роботи та визначає умови розв'язності поставленої задачі (1), (2).

Теорема. Нехай $a_0(t), a_1(t), a_2(t), g(t) \in C_{[0,1]}, a_0(t) \ne 0, a_2(t) \le 0,\ f(\lambda x, t) = \lambda x^n + g(t)$ та виконана одна з умов:

1) $\|g\|_{C_{[0,1]}} \le \frac{n-1}{nG\sqrt[n-1]{nG|\lambda|}}$, якщо параметр λ відомий,

або

2) $|\lambda| \le \left(\frac{n-1}{\|g\|}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{nG}\right)^{n}$, якщо задана функція $g(t)$,

де $G = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |G(\tau,t)|\, d\tau,\ G(\tau,t) -$ функція Гріна даної задачі. Тоді задача (1), (2) має розв'язок в просторі $C^2_{[0,1]}$.

Доведення. Слідуючи методиці пошуку розв'язку, зведемо задачу до операторного рівняння. Розв'язок задачі (1), (2) за допомогою функції Гріна подається у виді рівняння:

$$x(t) = \int_0^1 G(\tau,t)\left(\lambda x^n + g(\tau)\right) d\tau.$$

Позначимо праву частину за оператор:

$$Ax(t) = \int_0^1 G(\tau,t)\left(\lambda x^n + g(\tau)\right) d\tau.$$

Звідки отримаємо задачу про знаходження нерухомої точки оператора $x(t) = Ax(t)$.

Отже, існування розв'язку крайової задачі для заданого рівняння еквівалентно пошуку нерухомої точки оператора

$$Ax(t) = \int_0^1 G(\tau,t)\left(\lambda x^n + g(\tau)\right) d\tau.$$

Перевіримо існування нерухомої точки оператора за допомогою теореми Шаудера. Нехай $x \in C_{[0,1]},\ Ax(t) = \int_0^1 G(\tau,t)\left(\lambda x^n + g(\tau)\right) d\tau$ та $D = \bar{B}_R(0) = \left\{x \in C_{[0,1]} : \|x\|_{C_{[0,1]}} \le R\right\}$, де $R > 0$. Перевіримо неперервність та компактність оператора A. Представимо оператор A у вигляді композиції $A = I \circ N$, де I – інтегральний оператор, ядром якого є функція Гріна задачі (1), (2)

$$Iu(t) = \int_0^1 G(\tau,t) u(\tau)\, d\tau,$$

а N – оператор Немицького, що візначається заданою функцією f: $(Nx)(t) = \left(N_f x\right)(t) = f(x(t),t)$.

Оператор I з неперервним ядром – неперервний та компактний. Оператор N – неперервний. Тоді A є композицією неперервних операторів, тобто A - неперервний. Крім того, A – компактний, як композиція неперервного та компактного.

Для використання теореми Шаудера треба забезпечити умову $A: D \to D$, тобто $\|x\|_{C_{[0,1]}} \le R, \forall x(t) \in C_{[0,1]}$. Звідки випливає $\|Ax\|_{C[0,1]} \le R$.

$$\|Ax\|_{C_{[0,1]}} = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \left|G(\tau,t)\left(\lambda x^n(t) + g(\tau)\right)\right| d\tau$$

$$\leq \max_{t\in[0,1]} |\lambda x^n(t) + g(t)| \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |G(\tau,t)|\, d\tau = G\|\lambda x^n + g\|_{C_{[0,1]}}$$

$$\leq G\left(|\lambda|\|x\|^n_{C_{[0,1]}} + \|g\|_{C_{[0,1]}}\right) \leq G\left(|\lambda|R^n + \|g\|_{C_{[0,1]}}\right) \leq R.$$

Тобто, $G|\lambda|R^n + G\|g\|_{C_{[0,1]}} - R < 0$. Отримаємо з цього виразу необхідні для розв'язності умови для функції $g(t)$ та параметру λ.

Позначимо $G|\lambda|R^n + G\|g\|_{C_{[0,1]}} - R = \varphi(R)$ та знайдемо мінімальне значення цієї функції.

$\varphi' = nG|\lambda|R^{n-1} - 1 = 0.$

Отримуємо два випадки:

1. Якщо n – парне, то $R_{min} = \sqrt[n-1]{\frac{1}{nG|\lambda|}}$. (див. рис. 1)

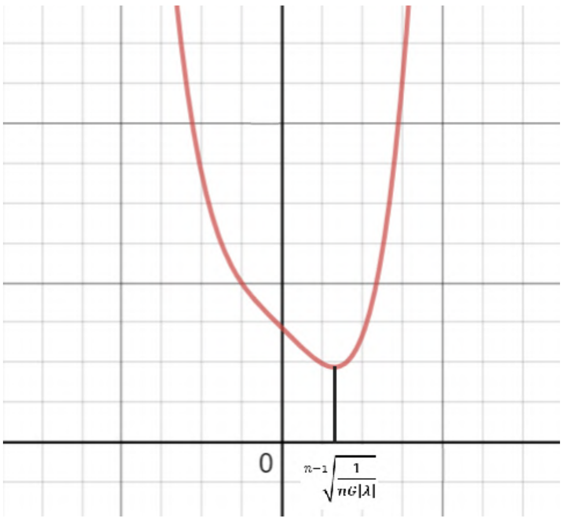

Рис. 1

2. Якщо n – непарне, $R_{1,2} = \pm\sqrt[n-1]{\frac{1}{nG|\lambda|}}$, звідки $R_{max} = -\sqrt[n-1]{\frac{1}{nG|\lambda|}}$, $R_{min} = \sqrt[n-1]{\frac{1}{nG|\lambda|}}$. (див. рис. 2)

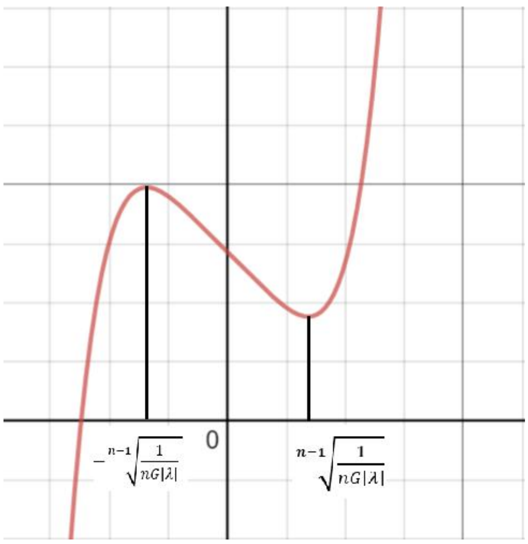

Рис. 2

Отже, не залежно від парності n $R_{min} = \sqrt[n-1]{\frac{1}{nG|\lambda|}}$.

$$\varphi(R_{min}) = G|\lambda| \frac{1}{nG|\lambda|^{n-1}\sqrt{nG|\lambda|}} + G\|g\|_{C_{[0,1]}} - \frac{1}{\sqrt[n-1]{nG|\lambda|}} \leq 0$$

$$\frac{1}{n^{n-1}\sqrt{nG|\lambda|}} + G\|g\|_{C_{[0,1]}} - \frac{1}{\sqrt[n-1]{nG|\lambda|}} \leq 0.$$

З цієї рівності отримаємо умови для функції $g(t)$ та параметра λ

$$\|g\|_{C_{[0,1]}} \leq \frac{n-1}{nG^{n-1}\sqrt{nG|\lambda|}};$$

$$|\lambda| \leq \left(\frac{n-1}{\|g\|}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{nG}\right)^{n}.$$

Перевіримо, якому простору належить розв'язок.

Нехай x_0 – розв'язок задачі (1), (2), тоді $a_0(t)\ddot{x}_0 = \lambda x_0^n + g(t) - a_1(t)\dot{x}_0 - a_2(t)x_0(t)$ за умовою $\lambda x_0^n + g(t) - a_1(t)\dot{x}_0 - a_2(t)x_0(t) \in C_{[0,1]}$, отже $\ddot{x}_0 \in C_{[0,1]}$, тоді $x_0(t) \in C^2_{[0,1]}$.

3. Застосування основного результату роботи

Доведеній в роботі основній результат допомагає розробити низку завдань методичного характеру, які дозволять використати їх в якості методичного забезпечення курсу «Теорія нелінійних операторів». Нехай дана перша крайова задача для квазілінійного рівняння другого порядку з параметром у правій частині і нелінійним степеневим зростом по $x(t)$: $x^n(t), n > 1$:

$$a_0(t)\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)x(t) = \lambda x^n + g(t), \quad (3)$$

$$x(0) = x(1) = 0, \quad (4)$$

де $a_0(t) \neq 0$, $a_2(t) \leq 0$ та $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $g(t) \in C_{[0,1]}$.

В цьому напрямку можливі завдання двох типів: по заданій функції g(t) знайти множину зміни параметра, в якій відповідна перша крайова задача матиме розв'язок, а також за відомим значенням параметра описати множину в просторі неперервних функцій, до якої має належати доданок g(t), для того щоб відповідна перша крайова задача мала розв'язок.

Завдання 1. Знайти значення параметру λ, при яких задача (3), (4) має розв'язки, якщо відома функція $g(t)$.

Наведемо приклади задач:

1. $(t+1)x'' - x' - \frac{3x}{t+1} = \lambda x^4 + t^3 - t, \;\; x(0) = x(1) = 0;$
2. $(t+1)^2x'' + 2(t+1)x' - 2x = \lambda x^2 - cost, \;\; x(0) = x(1) = 0;$
3. $(3+t^2)x'' + 2tx' = \lambda x^7 - t\sqrt[5]{t-1}, \;\; x(0) = x(1) = 0.$

Завдання 2. Знайти, для яких функцій $g(t)$ задача (3), (4) має розв'язки, якщо відомий параметр λ.

Наведемо приклади задач:

1. $t^2x'' - x' = 6x^5 - g(t), \;\; x(0) = x(1) = 0;$
2. $(t^2+1)x'' - 2tx' = 3x^9 - g(t), \;\; x(0) = x(1) = 0;$
3. $\left(\frac{x'}{t-2}\right)' - \frac{3x}{(t-2)^2} = 8x^4 - g(t), \;\; x(0) = x(1) = 0.$

Як приклад наведемо розв'язок однієї із запропонованих задач.

2.1. $(t^2+1)x'' - 2tx' = 3x^9 - g(t), \;\; x(0) = x(1) = 0.$

$a_0(t) = t^2 + 1 \in C[0,1], \quad a_1(t) = -2t \in C[0,1], \quad a_2(t) = 0.$

Отже, за теоремою дана задача має розв'язок при $\|g\|_{C_{[0,1]}} \le \frac{n-1}{nG\sqrt[n-1]{nG|\lambda|}}$. Знайдемо значення цього виразу. $\lambda = 3. n = 9.$

Побудуємо функцію Гріна для однорідної задачі:

$(t^2 + 1)x'' - 2tx' = 0, \quad x(0) = x(1) = 0.$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вид: $x_{з.р} = c_1 arctgt + c_2$. При виконанні крайових умов задача має лише тривіальний розв'язок, отже можливо побудувати функцію Гріна.

Нехай, $x_1 = arctgt$ – нетривіальний розв'язок, який задовольняє умові $x(0) = 0$, $x_2 = 4arctgt - \pi$– нетривіальний розв'язок, який задовольняє умові $x(1) = 0$.

Функція Гріна має вид $G(t,s) = \begin{cases} \alpha_1(s) arctgt, & t \in [0,s] \\ \alpha_2(s)(4arctgt - \pi), & t \in [s,1] \end{cases}$. Знайдемо $\alpha_1(s), \alpha_2(s)$ з умов:

$$\begin{cases} \alpha_1 arctgs = 4\alpha_2(4arctgs - \pi) \\ \dfrac{4\alpha_2}{1+s^2} - \dfrac{\alpha_1}{1+s^2} = \dfrac{1}{1+s^2} \end{cases}.$$

Тоді функція Гріна набуде вигляду:

$$G(t,s) = \begin{cases} (\dfrac{4arctgs}{\pi} - 1) arctgt, & t \in [0,s] \\ \dfrac{arctgs}{\pi}(4arctgt - \pi), & t \in [s,1] \end{cases}.$$

Далі розрахуємо знайдемо значення інтегралу від отриманої функції Гріна:

$$\int_0^1 G(t,s)ds = \int_0^t \left(\frac{4arctgs}{\pi} - 1\right) arctgtds + \int_s^1 \frac{arctgs}{\pi}(4arctgt - \pi)ds$$
$$= (arctgt - 1)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}ln2\right) - \frac{1}{2}\ln(1 + t^2).$$

Тепер можливо знайти необхідне значення $G = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |G(t,s)|\, ds \approx 0{,}44.$

Отже, дана задача має розв'язок при

$$\|g\|_{C_{[0,1]}} \le \frac{n-1}{nG\sqrt[n-1]{nG|\lambda|}} = \frac{8}{9 \times 0{,}44\sqrt[8]{9 \times 0{,}44 \times 3}} = 1{,}5.$$

Висновки

В роботі було сформульовано теорему про розв'язність першої крайової задачі для квазілінійних рівнянь другого порядку з параметром у правій частині. Сформульована теорема дозволяє досліджувати розв'язність квазілінійних рівнянь з нелінійним степеневим зростом по x(t) та параметром λ. На основі основного результату роботи сформульовано та наведено два типи завдань на розв'язність першої крайової задачі квазілінійного рівняння другого порядку з параметром у правій частині у випадку нелінійного степеневого зросту по x(t), які можуть бути використані у подальшому методичному забезпеченні курсу «Теорія нелінійних операторів» для студентів ОР «Магістр».

Список використаної літератури:

1. Birkhoff, G.D. Invariant points in function space / O.D. Kellogg, G.D. Birkhoff, // Trans. Amer. Math. Soc. . – 1922. – Vol. 23. – P. 95 – 115.

2. Bohl, P. Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage // J. reine angew. Math. – 1904. – Vol 127. – P. 179-276.
3. Brouwer, L. E. J. Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich // MA – 1910. – Vol 69. – P. 176–180.
4. Leray J. Topologie et équations fonctionnelles/ Leray J., Schauder J. // Ann. Sci. École Norm. – 1934. – Sup. 61. – P. 45-73.
5. Meetings of the Moscow Mathematical Society// Uspekhi Mat. Nauk, – 1955. – Vol 10, Issue 3. – P 65.
6. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations differentiélles // J. Math. Pures Appl., – 1881 –Vol 7 – P. 375–422.
7. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations differentiélles // J. Math. Pures Appl., – 1882 – Vol 8 – P. 251–286.
8. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations differentiélles // J. Math. Pures Appl., – 1885 –Vol 1, p. 167-244.
9. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations differentiélles // J. Math. Pures Appl., – 1886 – Vol 2 – P. 151-217.
10. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen // Math. Zeitschr. – 1927. – Vol. 26, №. 1. – P. 47. –-65.
11. Schauder, J. Invarianz des Gebietes in Funktionalraümen // Studia Math. – 1929. – Vol 1. №1. – P.123-139
12. Tychonoff, A. Ein Fixpunktsatz // MA –1935 – Vol 111– P.767-776
13. Боль П. О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применяемых в механике / Дисс. к.ф.-м.н. Юрьев, 1900. — 114 с
14. Буряченко К.О. Теореми про нерухомі точки та їх застосування в теорії диференціальних рівнянь: Текст лекцій / К.О. Буряченко, О.Л. Зуєв. Донецьк: ДонНУ, 2007. — 43 с.
15. Колмогоров А.М., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976.
16. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. Изд. 2-е, испр, М.: КомКнига, 2007. – 240с.
17. Фрум-Кетков Р. Л., Об отображениях в сферу банахова пространства / Докл. АН СССР – 1967 – Том 175, № 6. – С. 1229 – 1231.
18. Шашкин Ю. А. Неподвижные точки. – М.: Наука, 1989. — 80 с.
19. Шраменко В.М. Застосування нелінійного функціонального аналізу до теорії диференціальних рівнянь: навч. посібник/ В.М. Шраменко, К.О. Буряченко, Д.В. Лиманський – Донецьк: ДонНУ, 2011. — 184 с.

References

1. Birkhoff, G.D., Kellogg, O.D.(1922) Invariant points in function space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1922, vol. 23.
2. Bohl, P. Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage (1904). *J. reine angew. Math.* (127), 179-276.
3. Brouwer, L. E. J. Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich (1910). *MA*, 69, 176–180.
4. Leray J. Schauder J. Topologie et équations fonctionnelles (1934). *Ann. Sci. École Norm.*, 61, 45-73.
5. Meetings of the Moscow Mathematical Society (1955). Uspekhi Mat. Nauk, 10 (3), 65.
6. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations differentiélles (1881). *J. Math. Pures Appl.*, 7, 375–422.

7. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations differentiélles (1882). *J. Math. Pures Appl.*, 8, 251–286.
8. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations differentiélles (1885). *J. Math. Pures Appl.*, 1, 167-244.
9. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations differentiélles (1886) *J. Math. Pures Appl.*, 2, 151-217.
10. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen (1927). *Math. Zeitschr*, 26(1), 47-65.
11. Schauder, J. Invarianz des Gebietes in Funktionalraümen (1929). *Studia Math*, 1(1), 123-139.
12. Tychonoff, A. Ein Fixpunktsatz (1935), *MA*, 111, 767-776.
13. Bohl P., On some general differential equations applied in mechanics. (1900) Ph.D. Yuriev.
14. Buryachenko K.O., Zuev O.L. *Theorems on fixed points and their application in the theory of differential equations: Text of lectures* (2007). Donetsk: DonNU.(in Ukr.)
15. Kolmogorov A.M, Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis* (1976). M .: Nauka.(in Russ.)
16. Filippov A.F. *An Introduction to the Theory of Differential Equations: A Textbook.*(2007). M .: KomKniga.(in Russ.)
17. Frum-Ketkov, R. L., On mappings in the sphere of Banach space (1967). Dokl. USSR Academy of Sciences, 175 (6), 1229-1231.(in Russ.)
18. Shashkin Y. A. *Fixed points* (1989). M. : Nauka.(in Russ.)
19. Shramenko V.M, Buryachenko K.O., Limansky D.V., *Application of nonlinear functional analysis to the theory of differential equations: teach. Manual* (2011). Donetsk: DonNU. (in Ukr.).

A. Vorontsova
Master's Degree, Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine,
aki57776@gmail.com

K. Buryachenko
Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis and Differential Equations,
Vasyl` Stus Donetsk National University, Vinnytsia, Ukraine,
katarzyna_@ukr.net

SOLVABILITY OF THE BOUNDARY PROBLEMS FOR THE QUASILINEAR SECOND ORDER EQUATIONS WITH PARAMETER IN THE RIGHT-HAND SIDE

Summary. *The paper is devoted to the problem of solvability of the first boundary value problem for a quasilinear second-order equation with a parameter in the right-hand side and a power nonlinearity of arbitrary order. Using the operator methods (inverse operator method, fixed point method), the theorem for the existence of a classical solution of a problem is proved. The methodological and theoretical aspects of the application of the obtained result for the solving of the corresponding problems are given.*

Keywords: boundary value problems, quasilinear second-order equation, Green's function, fixed point, Schauder theorem.

Одержано редакцією 04.09.2018
Прийнято до друку 25.12.2018