МАТЕМАТИЧНА ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ФІЗИКА

ORCID: 0000-0001-5208-1162

В. С. Баранюкова
Аспірант відділу «Прикладна механіка» ,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
irina63m28@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3928-3410

В. Ф. Щербак
Доктор фіз.-мат. наук, с.н.с., заст. директора з наукової роботи,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
scherbakvf@ukr.net

УДК 62-50:519.7 PACS 05.45.Xt; 11.10.Jj; 87.85.G; 87.85.Tu;
DOI: 10.31651/2076-5851-2019-1-69-79 43.40.Ga; 43.58.Wc; 87.10.Ed

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ДИССИПАЦИИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Рассмотрена задача идентификации параметров математической модели, описывающей колебания нескольких взаимосвязанных осцилляторов ван дер Поля. Такие системы возникают при моделировании многих нелинейных физических, биологических и прочих циклических процессов, имеющих сложный характер. Искомые параметры определяют нелинейные составляющие математической модели и характеризуют диссипацию, знак которой зависит от величин отклонений от положения равновесия рассматриваемой системы. Предполагается, что в процессе колебаний производятся соответствующие онлайн измерения состояния, т.е. фазовый вектор является известной функцией времени. Для построения идентификатора неизвестных параметров использован метод синтеза инвариантных соотношений, разработанный для решения обратных задач в теории управления. Метод позволяет формировать конечные соотношения, определяющие искомые неизвестные как функции от известных величин.

Ключевые слова: нелинейные колебания**,** осцилляторы ван дер Поля, идентификация параметров, инвариантные соотношения, асимптотические оценки.

1. Введение

Во многих приложениях физики, биологии и других наук в качестве приближенной модели сложных нелинейных процессов используется подход, основанный на концепции модельных уравнений. В основе такой концепции лежит положение о том, что небольшое число характерных типов движений (паттернов), свойственных простым математическим моделям и/или их комбинациям, дает ключ к пониманию и исследованию многих сложных явлений. При этом априори предполагается, что все физическое многообразие динамических взаимосвязей в исследуемой системе может быть представлено в форме достаточно простых модельных уравнений. Такие базовые модели в отдельности хорошо изучены, их параметры имеют физическую интерпретацию, что способствует качественному исследованию на этой основе сложных систем различной физической природы [1].

В частности, известно, что колебательное движение различных систем, имеющих устойчивый предельный цикл, может быть промоделировано системой, состоящей из одного или нескольких связанных между собой осцилляторов ван дер Поля [2], [3]. Системы такого рода достаточно широко представлены, например, при исследовании и моделировании биологических функций организма, таких как сердечная деятельность, дыхание, локомоторная активность и др. В связи с появлением устройств, отслеживающих и регулирующих состояние и параметры паттернов живых организмов, задачи определения в реальном масштабе времени характеристик таких систем по результатам измерения выходных сигналов являются актуальными [4], [5].

Одна из таких задач, а именно задача идентификации некоторых параметров нелинейной колебательной системы, рассмотрена в данной статье. Предлагается способ получения асимптотических оценок параметров, определяющих нелинейный характер колебаний системы связанных между собой осцилляторов ван дер Поля по информации об их движении. Вначале соответствующая задача идентификации решена для одного осциллятора ван дер Поля, далее, полученные результаты распространены на систему связанных между собой осцилляторов.

Искомый в данной работе параметр λ характеризует нелинейное слагаемое в уравнении ван дер Поля. Физически этот параметр определяет пороговое значение для величины отклонения, при достижении которого демпфирование в системе меняет знак. Для его нахождения используется разработанный в аналитической механике метод инвариантных соотношений [6], модификация которого в задачах управления позволяет синтезировать дополнительные связи между известными и неизвестными величинами динамической системы, возникающие при наблюдаемом движении [7], [8]. Метод не предполагает линеаризации исходной системы и является существенно нелинейным. В результате в работе построен идентификатор для системы осцилляторов, который обеспечивает асимптотическое оценивание неизвестных параметров. Проведенное численное моделирование подтверждает работоспособность предложенной схемы решения задачи идентификации.

2. Задача определения характеристик осциллятора ван дер Поля

Рассмотрим уравнение ван дер Поля [9], описывающее процесс релаксационных колебаний, которое запишем в форме [2]

$$\ddot{x} = (\lambda - x^2)\dot{x} - \omega^2 x \tag{1}$$

Здесь x – отклонение точки от положения равновесия, λ — параметр, который определяет характер переменного демпфирования, $\lambda > 0$. Отсутствие нелинейного слагаемого в (1) соответствует гармоническим колебаниям осциллятора без трения с собственной частотой ω. Одной из задач, возникающих при изучении и моделировании физических, биологических и прочих процессов с помощью осцилляторных систем, является задача определения параметра λ в предположении, что значения фазового вектора $x(t), \dot{x}(t)$ измеряются в процессе функционирования объекта, т.е. являються известными функциями времени.

Обозначив $x_1 = x$, $x_2 = dx/dt$, перепишем (1) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = (\lambda - x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1, \\ y_1 = x_1, y_2 = x_2. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим задачу нахождения параметра λ как задачу идентификации системы (2) по известной информации о движении. Такой информацией является выход – функция $y(t)=(x_1(t),x_2(t))$, а также те величины, которые могут быть получены с использованием только лишь значений выхода. В частности, далее известным будем считать любое решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi}=U(\xi,x_1(t),x_2(t)),\ \ \xi(0)=\xi_0\in R^p,\ \ p\geq 1, \tag{3}$$

в которой функции $U(\xi,x_1(t),x_2(t))$ зависит от известных величин и удовлетворяют достаточным условиям теорем существования и единственности решений для $t\in[0,\infty)$.

Для решения исходной задачи идентификации используем метод синтеза инвариантных соотношений, который позволяет получать в процессе функционирования системы асимптотические оценки неизвестных [7], [8].

Задача 1. Найти асимптотически точные оценки параметра λ системы (2) по известным значениям выхода $y(t)=(x_1(t),x_2(t))$.

Замечание. Достаточным условием локальной идентифицируемости системы (2) является условие на ранги якобиевых матриц [10]

$$rank\,\frac{\partial(y,\dot{y})}{\partial(x_1,x_2,\lambda)}=1+rank\,\frac{\partial(y,\dot{y})}{\partial(x_1,x_2)},$$

где производная от выхода y взята в силу системы (2):

$$(y,\dot{y})=(x_1,x_2,x_2,(\lambda-x_1^2)x_2-\omega^2x_1).$$

Для рассматриваемой системы имеем, что при любых x_1,x_2 $rank\,\dfrac{\partial(y,\dot{y})}{\partial(x_1,x_2)}=2$, а $rank\,\dfrac{\partial(y,\dot{y})}{\partial(x_1,x_2,\lambda)}=3$ только лишь при $x_2(t)\neq 0$. Таким образом, достаточные условия идентифицируемости не выполнены для моментов времени, при которых $x_2(t)=0$.

Используемый далее подход предполагает получение асимптотических оценок неизвестных. В связи с тем, что условия идентифицируемости нарушаются на дискретном множестве моментов времени, предлагаемый ниже алгоритм оценивания будет использован для последовательного улучшения оценок неизвестных на интервалах знакопостоянства компоненты выхода $x_2(t)$.

3. Синтез дополнительного уравнения для определения λ

Для решения задачи идентификации используем метод синтеза инвариантных соотношений, позволяющий получать в процессе функционирования системы асимптотические оценки неизвестных. Суть данного подхода состоит в динамическом расширении исходной системы дифференциальных уравнений (2) дополнительным уравнением (3), где p равно 1 – числу неизвестных в задаче 1: а именно неизвестной постоянной λ. При этом правые части $U(\xi,x_1,x_2)$ подбираются таким образом, чтобы полученная расширенная система дифференциальных уравнений (2), (3) допускала инвариантное соотношение

$$F(x_1,x_2,\xi,\lambda)=0 \tag{4}$$

со следующими свойствами:

1) Соотношение (4) формирует дополнительное уравнение для неизвестной λ,

т.е. $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} \neq 0$;

2) Соответствующее (4) инвариантное многообразие $M = \left\{(x_1, x_2, \xi, \lambda) \subseteq R^4 : F(x_1, x_2, \xi, \lambda)\right\} = 0$ обладает свойством глобального притяжения для любых решений расширенной системы (2),(3). Иными словами, на любых решениях

$$\lim_{t\to\infty} F(x_1(t), x_2(t), \xi(t), \lambda) = 0 .$$

Таким образом, основная идея такого подхода состоит в получении дополнительного уравнения вида (4) для неизвестного в задаче 1.

4. Существование инвариантного соотношения

Покажем, что для рассматриваемой задачи соотношения вида (4) существуют.

Чтобы свойство 1) было выполнено во всей рассматриваемой области будем искать их в виде

$$F(x_1, x_2, \xi, \lambda) = \lambda - \xi - \Phi(x_1, x_2) = 0 , \qquad (5)$$

где переменные $\xi(t)$ являются решениями вспомогательного дифференциального уравнения (3). На функции $\Phi(x_1, x_2), U(\xi, x_1, x_2)$ пока не накладываем никаких ограничений, кроме требования непрерывной дифференцируемости по своим аргументам. Если эти функции выбраны так, что соотношения (5) инвариантны на рассматриваемом решении, то тогда неизвестный параметр λ может быть найден непосредственно из равенства (5),

$$\lambda = \xi + \Phi(x_1, x_2) .$$

Утверждение 1. Для любой дифференцируемой по своим аргументам функции $\Phi(x_1, x_2)$ можно подобрать правую часть $U(\xi, x_1, x_2)$ в дифференциальном уравнении (3) так, что равенство (5) выполняется тождественно на некоторых решениях расширенной системы дифференциальных уравнений (2), (3).

Доказательство. Введем переменные ε, которые характеризуют невязку в формуле (5) на решениях системы (2), (3).

$$\lambda - \xi(t) - \Phi(x_1(t), x_2(t)) = \varepsilon(t) \qquad (6)$$

Дифференцируя (6) в силу системы (2), (3), получаем дифференциальное уравнение для отклонения ε

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} - \dot{\xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\dot{x}_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\dot{x}_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}[(\varepsilon + \xi + \Phi - x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1] - U \,. \qquad (7)$$

Чтобы равенства (5) выполнялись тождественно на некоторых решениях системы дифференциальных уравнений (2), (3), достаточно показать, что система дифференциальных уравнений (7) допускает тривиальное решение $\varepsilon(t) \equiv 0$. Для этого фиксируем вид правых частей (3), а именно: для любых Φ положим

$$\dot{\xi} = U = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\left[(\xi + \Phi - x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1\right] \qquad (8)$$

В результате дифференциальное уравнение для отклонения $\boldsymbol{\varepsilon}$ становится однородным

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}x_2\varepsilon , \qquad (9)$$

а значит допускает тривиальное решение $\varepsilon(t) \equiv 0$. Утверждение доказано.

Таким образом, можно утверждать, что для любой дифференцируемой функции $\Phi(x_1, x_2)$ начальное значения $\varepsilon(0)$ в задаче Коши для дифференциального уравнения (7) может быть выбрано таким образом, что в момент $t = 0$ формулы (5) становятся верными равенствами. В частности, это означает, что начальные значения для отклонений $\varepsilon(0)$ равны нулю. В этом случае равенство (5) на траектории расширенной системы (2), (3) выполняется тождественно, образуя, тем самым, дополнительное конечное соотношение, в котором единственным неизвестным остается величина λ

В общем случае осуществить такой выбор $\varepsilon(0)$ не удается, поскольку для этого необходимо знать величину λ, которая, собственно, и является искомым неизвестным. В то же время можно попытаться использовать формулу (5) для получения асимптотической оценки параметра λ на достаточно широком множестве решений расширенной системы (2), (3). Для этого, в частности, требуется из множества возможных функций $\Phi(x_1, x_2)$ выбрать такие, для которых тривиальное решение системы (9) при наблюдаемом выходе $y(t) = (x_1(t), x_2(t))$ обладало бы свойством глобальной асимптотической устойчивости.

5. Стабилизация отклонений

Рассмотрим задачу подбора функции $\Phi(x_1, x_2)$, остающейся пока свободной, с целью стабилизации решений системы (9).

Общее решение (9) имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)\exp\left\{-\int_0^t \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(x_1(\tau), x_2(\tau)\cdot x_2(\tau)d\tau)\right\}.$$

Следовательно, достаточным условием, обеспечивающим асимптотическое стремление отклонения $\varepsilon(t)$ к нулю, является условие

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(x_1(\tau), x_2(\tau))\cdot x_2(\tau)d\tau = \infty. \tag{10}$$

Очевидно, что существует класс функций $\Phi(x_1, x_2)$ и такие решения $x_1(t), x_2(t)$ системы (2), для которых интеграл в формуле (10) является расходящимся при $t \to \infty$. Пусть, например, $\Phi(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2}$, тогда условие (10) принимает вид

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t x_2^2(\tau)d\tau = \infty. \tag{11}$$

В случае, если наблюдаемое решение системы (2) не является тривиальным, то условие (11) будем считать выполненным. Действительно, проведенные выше построения никак не влияют на характер движения исходной системы, которая совершает циклические незатухающие колебания. При этом $x_2(t) = 0$ только лишь на дискретном множестве моментов времени, мера которого равна нулю. Естественно полагать, что на каждом из бесконечного числа циклов колебаний существует конечный интервал времени длины Δ, на котором непрерывная функция $|x_2(t)| \geq \alpha > 0$ Отсюда и следует расходимость интеграла в формуле (11).

6. Семейство идентификаторов параметра λ

Из приведенных выше выкладок следует, что для системы (2) построен идентификатор, заданный конечным соотношением (6) и дифференциальным уравнением (8). При достаточно слабых ограничениях на наблюдаемое решение исходной системы (2) идентификатор обеспечивает получение асимптотической оценки параметра λ. В частности, для функции $\Phi(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2}$ имеет место

Утверждение 2. Для любого нетривиального решения $x_1(t), x_2(t)$ системы (2) и любого начального значения $\xi(0)$ в задаче Коши для вспомогательного дифференциального уравнения

$$\dot{\xi} = -x_2 \left[(\xi + \frac{x_2^2}{2} - x_1)x_2 - \omega^2 x_1 \right], \xi(0) \in R \tag{12}$$

формула

$$\lambda = \xi(t) + \frac{x_2^2(t)}{2} \tag{13}$$

доставляет асимптотическую оценку параметра λ.

Замечание. Поскольку достаточным условием выбора функции $\Phi(x_1, x_2)$ является условие (10), то существует широкое семейство функций, удовлетворяющих этому условию, а, следовательно, и семейство соответствующих им идентификаторов, решающих задачу 1.

7. Система автоколебательных осцилляторов

Рассмотрим динамическую систему, образуемою цепочкой из трех неидентичных осцилляторов ван дер Поля, связанных между собой посредством упругих и диссипативных связей [2]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = (\lambda_1 - x_1^2)x_2 - \omega_1^2 x_1 + F_1 \\ \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = (\lambda_2 - x_3^2)x_4 - \omega_2^2 x_4 + F_2 \\ \dot{x}_5 = x_6, \dot{x}_6 = (\lambda_3 - x_5^2)x_6 - \omega_3^2 x_5 + F_3 \end{cases} \tag{14}$$

где переменные x_1, x_3, x_5 характеризуют отклонения осцилляторов от начала координат, а переменные x_2, x_4, x_6 – скорости этих отклонений, соответственно; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – искомые параметры, отвечающие за нелинейный характер колебаний рассматриваемой механической системы; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ определяет частотные характеристики автономных осцилляторов. Влияние связей на динамику системы учтено с помощью функций

$$\begin{cases} F_1 = \nu(x_1 - x_3) + \mu(x_2 - x_4) \\ F_2 = \nu(x_3 - x_1) + \nu(x_3 - x_5) + \mu(x_4 - x_2) + \mu(x_4 - x_6) \\ F_3 = \nu(x_5 - x_3) + \mu(x_6 - x_4) \end{cases} \tag{15}$$

где ν – коэффициент жесткости, μ – коэффициент диссипативной связи.

Система (14) характеризуется большим числом параметров и может демонстрировать сложную и разнообразную картину колебательных режимов. Поскольку в значительной степени ее поведение зависит от величин и соотношений параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ между собой, то задача их определения в реальном времени по данным измерений фазового вектора $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), x_6(t))$ может представлять интерес при моделировании сложных колебательных процессов.

Задача 2. Найти асимптотически точные оценки параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ системы (14) по известным значениям фазового вектора $x(t)$.

Решение задачи 2 проведем по описанной выше схеме. Представим неизвестные в виде суммы неопределенных величин

$$\lambda_i - \xi_i(t) - \Phi_i(x_{2i}(t)) = \varepsilon_i(t) \tag{16}$$

где $\varepsilon_i(t)$ – соответствующие отклонения, функции $\Phi_i(.)$ будем искать как функции, зависящие от единственного аргумента x_{2i}, а переменные $\xi_i(t)$ являются решением задачи Коши для вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi}_i(t) = U_i(\xi_i, x(t)),\ \xi(0) = \xi_0 \in R^3,\ i = 1,2,3 \tag{17}$$

По аналогии со способом получения уравнения (7) для отклонения ε, получаем в нашем случае систему дифференциальных уравнений (знак «'» означает дифференцирование)

$$\dot{\varepsilon}_i = -\dot{\xi}_i(t) - \Phi'_{x_{2i}}\dot{x}_{2i} = -U_i - \Phi_{x_{2i}}\left[(\varepsilon_i + \xi_i + \Phi_i - x_{2i-1}^2)x_{2i} - \omega_i^2 x_{2i-1} + F_i\right], i = 1,2,3$$

Правые части системы (17) положим равными

$$U_i = -\Phi_{x_{2i}}\left[(\xi_i + \Phi_i - x_{2i-1}^2)x_{2i} - \omega_i^2 x_{2i-1} + F_i\right],\ i = 1,2,3 \tag{18}$$

В результате получаем для отклонений три одинаковых дифференциальных уравнения

$$\dot{\varepsilon}_i = -\Phi_{x_{2i}} x_{2i}\varepsilon_i,\ i = 1,2,3. \tag{19}$$

Полагая $\Phi_i(x_{2i}) = \dfrac{x_{2i}^2}{2}$ и, воспользовавшись результатами предыдущего раздела, получаем

Утверждение 3. Для любого нетривиального решения $x(t)$ системы (14) и любого начального значения $\xi(0)$ в задаче Коши для вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi}_i = -x_{2i}\left[\left(\xi_i + \frac{x_{2i}}{2} - x_{2i-1}^2\right)x_{2i} - \omega_i^2 x_{2i-1} + F_i\right],\ \xi(0) \in R^3 \tag{20}$$

формулы

$$\lambda_i = \xi_i(t) + \frac{x_{2i}^2(t)}{2},\ i = 1,2,3, \tag{21}$$

доставляют асимптотическую оценку параметрам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Замечание. Из приведенных построений легко видеть, что Утверждение 3 легко может быть распространено на цепочку из любого конечного числа осцилляторов. Более того, поскольку влияние упругих и диссипативных связей на динамику системы учитывается только лишь во вспомогательных уравнениях (20), то полученный результат может быть обобщен и на сеть осцилляторов произвольной структуры. Для этого достаточно учесть (предполагается, что параметры связей являются известными) взаимовлияние i-го и j-го осцилляторов в соответствующих выражениях для сил F_i, F_j.

8. Численное моделирование

Предложенная в работе схема решения задачи идентификации была численно промоделирована для широкого спектра начальных условий и параметров системы (14). Результаты одного из вариантов расчетов приведены на рисунке.

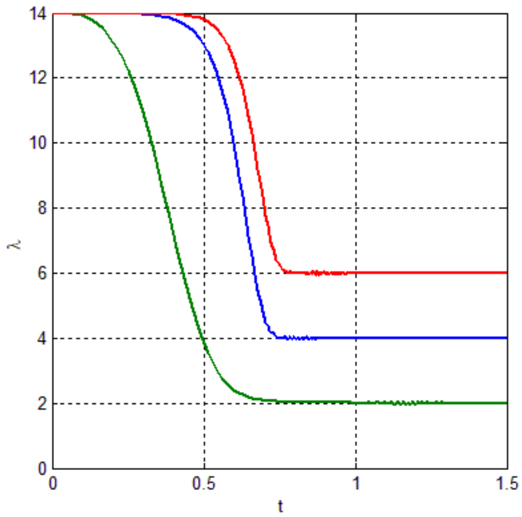

Рис. 1. Асимптотическое оценивание параметров λ_1=2.0, λ_2=4.0, λ_3=6.0.
Fig. 1. Asymptotic parameter estimation λ_1=2.0, λ_2=4.0, λ_3=6.0.

Используемый в формулах идентификатора (20), (21) наблюдаемый выход системы – вектор $x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t),x_5(t),x_6(t))$ был получен в результате численного решение системы дифференциальных уравнений (14). Искомые параметры $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ равны 2.0, 4.0 и 6.0, соответственно. Остальные параметры: ω_1=3.0; ω_2=2.0; ω_3=1.0; ν=0.5; μ=1.5.

Рассмотренный вариант расчета моделирует случай, когда цепочка осцилляторов выведена из состояния равновесия путем смещения положения первого из них на 0.5 единиц длины, соответственно начальные условия в задаче Коши для исходной системы приняты равными: $x(0)=(0.5;0.0;0.0;0.0;0.0;0.0)$; начальные условия для переменных вспомогательной системы дифференциальных уравнений (20) выбраны произвольно. В данном случае $\zeta_1(0)=\zeta_2(0)=\zeta_3(0)$ = 14.0.

На рисунке приведены графики функций $\xi_i(t)+0.5\cdot x_{2i}^2(t)$, $i=1,2,3$ которые, в соответствии с Утверждением 3, асимптотически сходятся к искомым значениям параметров, равным 2.0, 4.0 и 6.0. Результаты моделирования как для данного, так и для многих других наборов значений всех параметров системы (14) подтверждают работоспособность предложенной схемы решения задачи идентификации.

9. Выводы

Рассмотрена задача идентификации параметров, характеризующих явление переменной диссипации в системе, состоящей из одного или нескольких связанных между собой осцилляторов ван дер Поля. Предложен метод построения нелинейного идентификатора, который позволяет получать асимптотические оценки искомых параметров по результатам измерения выходных сигналов в реальном масштабе времени. Используется разработанный в аналитической механике метод инвариантных соотношений, который в задачах управления позволяет синтезировать дополнительные связи между известными и неизвестными величинами. Проведенное численное моделирование подтверждает работоспособность предложенной схемы решения задачи идентификации. Разработанный подход асимптотического оценивания неизвестных параметров в дальнейшем будет использован в задачах адаптивного управления характером колебаний осцилляторных сетей.

Список использованной литературы:

1. Хакен Г. Принципы работы головного мозга: Синергетический подход к активности мозга, поведению и когнитивной деятельности. / Г. Хакен.; [пер. с англ.] – М.: ПЕРСЭ, 2001. – 351 с. – Режим доступу: ISBN: 5-9292-0047-5
2. Кузнецов А.П. Динамика трех неидентичных по управляющим параметрам связаных осцилляторов ван дер Поля / А.П. Кузнецов, Ю.П. Емельянова, Л.В. Тюрюкина // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2011. – Т. 19, № 5. – С. 76-90. – Режим доступу: https://cyberleninka.ru/article/n/dinamika-treh-neidentichnyh-po-upravlyayuschim-parametram-svyazannyh-ostsillyatorov-van-der-polya
3. Кузнецов А.П. Феномен уравнения ван дер Поля / А.П. Кузнецов, Е.С. Селиверстова, Д.И. Трубецков, Л.В. Тюрюкина // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3-42. – Режим доступу: https://cyberleninka.ru/article/n/fenomen-uravneniya-van-der-polya
4. Grudzinski K. Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators / K. Grudzinski, J.J. Zebrowski // Applied Mathematics. – 2003. – P. 153-162. – Режим доступу: https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.01.020
5. Булдаков Н.С. Моделирование связей в системе «сердце-сосуды» / Н.С. Булдаков, Н.С. Самочетова, А.В. Ситников, С.И. Суятинов // Наука и образование, Электронный научно-технический журнал. – 2013. – С. 123-134. – Режим доступу: https://doi.org/10.7463/0113.0513571
6. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15-24.
7. Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения / В.Ф. Щербак // Механика тведого тела. – 2004. – Вып. 41. – С. 197 -216.
8. Жоголева Н.В. Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления / Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 69-76. – Режим доступу: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/140839
9. Van der Pol B. On relaxation oscillations / B. Van der Pol // The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci. – 1926. – Vol. 2, Is 7. – P. 978-992. – Режим доступу: https://doi.org/10.1080/14786442608564127
10. Ковалев А.М. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем / А.М. Ковалев, В.Ф. Щербак. – К.: Наук. думка. 1993. – 236 с. – Режим доступу: ISBN 5-12-003156-0

References:

1. Haken H. (2001). *Principles of Brain Functioning: A Synergetic Approach to Brain Activity,* Moscow, PERCE, (in Russ.) Retrieved from ISBN: 5-9292-0047-5
2. Kuznetsov A. P., Emelyanova Yu. P., Tyuryukina L.V. (2011). Dynamics of three van der Pol oscillators that are not identical in control parameters. *News of higher educational institutions. Applied nonlinear dynamics.* 19(5), 76-90. Retrieved from https://cyberleninka.ru/article/n/dinamika-treh-neidentichnyh-po-upravlyayuschim-parametram-svyazannyh-ostsillyatorov-van-der-polya

3. Kuznetsov A. P., Seliverstova E. S., Trubetskov D. I., Tyuryukina L.V. (2014). The phenomenon of the van der Pol equation. *News of Universities. Applied Nonlinear Dynamics*. 22(4), 3-42. Retrieved from https://cyberleninka.ru/article/n/fenomen-uravneniya-van-der-polya
4. Grudzinski K., Zebrowski J. J (2003). Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators. *Applied Mathematics*. 153-162. Retrieved from https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.01.020
5. Buldakov N. S., Samochetova N. S., Sitnikov A.V., Suyatinov S. I. (2013) Modeling relationships in the system «heart-vessels». *Science and Education, Electronic Scientific and Technical Journal.* 123-134. Retrieved from https://doi.org/10.7463/0113.0513571
6. Kharlamov P. V. (1974). On invariant relations of a system of differential equations. *Solid Mechanics*. 6. 15-24.
7. Scherbak V. F. (2004). Synthesis of Additional Relationships in the Observation Problem. *Mechanics of the Solid Body,* 41, 197-216.
8. Zhogoleva N. V., Scherbak V. F. (2015). Synthesis of additional relations in inverse control problems. *Transactions of IAMM NAS of Ukraine,* 29, 69-76. Retrieved from http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/140839
9. Van der Pol B. (1926). On relaxation oscillations. The London, Edinburgh and Dublin *Phil. Mag. and J. of Sci.* 2(7), 978-992. Retrieved from https://doi.org/10.1080/14786442608564127
10. Kovalev A. M., Scherbak V. F. (1993). Controllability, observability, identifiability of dynamical systems. *Kyiv: Science idea*. Retrieved from ISBN 5-12-003156-0

I. S. Baranukova

Postgraduate student of the Department of Applied Mechanics,
Institute of Applied Mathematics and Mechanics, NAS of Ukraine,
irina63m28@gmail.com

V. F. Shcherbak

Doctor of Science (MSc), Ph.D., Assistant Professor the director of scientific work,
Institute of Applied Mathematics and Mechanics, NAS of Ukraine,
scherbakvf@ukr.net

IDENTIFICATION OF DISSIPATION CHARACTERISTICS FOR VAN DER POL OSCILLATORS

Summary. *In many applications of physics, biology, and other sciences, an approach based on the concept of model equations is used as an approximate model of complex nonlinear processes. The basis of this concept is the provision that a small number of characteristic types movements of simple mathematical models inherent in systems gives the key to understanding and exploring a huge number of different phenomena. With this approach it is a priori assumed that the entire physical manifold can be represented in the form of fairly simple model equations. It is contributes to a qualitative study of complex systems for various physical nature since basic models individually are well studied, and their parameters have a physical interpretation.*

In particular, it is well known that oscillatory motion of various systems with a stable limit cycle can be modeled by a system consisting of one or more coupled van der Pol oscillators. This systems are widely represented, for example, in the study and modeling of some biological functions of the body, such as cardiac activity, respiration, locomotor activity, etc. Therefore, the tasks of determining in real time the state and *parameters of such systems based on the results of measuчяring the output signals are relevant. One of these problems, namely, the problem of identification some parameters of an oscillatory system, is considered in this article. In the paper it is proposed Aa method is proposed for obtaining asymptotic estimates of parameters that determine the nonlinear nature of oscillations for a system of interconnected van der Pol oscillators by information about their motion. On the first step the corresponding identification problem was solved for one van der Pol oscillator; further, the results obtained results are extended to a system of interconnected oscillators.*

The unknown parameter characterizes the nonlinear term in the van der Pol equation and determines the threshold value for deviations at which the damping value in the system changes sign. The method of invariant relations is used for identification scheme design. Such approach allows us to synthesize additional relations arising between known and unknown quantities during the observed motion of the system considered. The constructed identifier provides an asymptotic estimation of unknown parameters for oscillatory networks of arbitrary structure. The numerical simulation confirms the operability of the proposed scheme for solving the identification problem.

Keywords: nonlinear oscillations, coupled van der Pol oscillators, parameter identification, invariant relations, asymptotic estimates.

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИСИПАТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОСЦИЛЯТОРІВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Анотація. *Розглянуто задачу ідентифікації параметрів математичної моделі, яка описує коливання декількох взаємопов'язаних осциляторів ван дер Поля. Такі системи виникають при моделюванні багатьох нелінійних фізичних, біологічних та інших циклічних процесів, що мають складний характер. Шукані параметри визначають нелінійні складові математичної моделі і характеризують дисипацію, знак якої залежить від величин відхилень від положення рівноваги даної системи. Передбачається, що в процесі коливань проводяться відповідні онлайн вимірювання стану, тобто фазовий вектор є відомою функцією часу. Для побудови ідентифікатора невідомих параметрів використано метод синтезу інваріантних співвідношень, який розроблено для розв'язування обернених задач в теорії керування. Метод дозволяє формувати скінченні співвідношення, що визначають шукані невідомі як функції від відомих величин.*

Ключові слова: нелінійні коливання, осцилятори ван дер Поля, ідентифікація параметрів, інваріантні співвідношення, асимптотичні оцінки.

Одержано редакцією 08.07.2019
Прийнято до друку 20.10.2019