УДК 536.24 **Б.П. Головня, В.В. Хайдуров**

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Обратные задачи теплопроводности (ОЗТ) возникают в различных отраслях науки и техники. Известно, что подобные задачи очень ресурсоемки, т.е. их решение требует проведения очень больших вычислений. В данной статье предложена серия методов, позволяющих сократить время численного решения некоторых нелинейных обратных задач теплопроводности.

Ключевые слова: *обратная задача теплопроводности (ОЗТ), численное решение ОЗТ.*

Вступление

Многие важные вопросы теплообмена сводятся к решению обратных задач. Под обратными задачами здесь понимается следующее. Для решения стационарной или нестационарной стандартной задачи теплообмена требуется задать начальные условия, краевые условия, физические параметры среды и т.д. Имея в своем распоряжении все необходимые величины, мы можем рассчитать температурное поле в исследуемой области. Такая задача называется прямой. Но возможна и другая ситуация. Мы знаем это температурное поле, но не знаем значений некоторых определяющих параметров. В этом случае требуется по температурному полю и известным значениям части определяющих параметров восстановить значения неопределенных параметров. Такие задачи называются обратными задачами теплопроводности или ОЗТ.

Например. В нестационарной задаче требуется по температурному полю, измеренному через известное время после начала эксперимента, найти начальные условия. Или. По стационарному температурному полю требуется найти недостающие краевые условия.

Опыт показывает, что ОЗТ являются очень ресурсоемкими задачами, их решение требует больших вычислительных мощностей и значительного процессорного времени. Данная работа посвящена исследованию возможных путей ускорения решения ОЗТ.

Цель работы

Разработка и апробация методов, ускоряющих решение некоторых нелинейных обратных задач теплопроводности.

Математическая постановка задачи

В области $D\times[0,\tau]$ рассматривается уравнение теплопроводности:

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla\left(k\nabla T\right) \tag{1}$$

Полное решение задачи теплопроводности в заданной области содержит:

1) Значение температуры во всех внутренних точках области, т.е. $\forall x\in D$, $\forall t\in[0,\tau]$ известно $T(x,t)$. В частности, нам известно следующее:

1a) Начальное распределение температуры $T_{init}(x)=T(x,0)$.

1б) Конечное $T_{fin}(x) = T(x,\tau)$ распределение температуры.

2) Краевые условия: $\partial D = \partial D_D + \partial D_N$, $x \in \partial D_D : T = T(x,\tau)$; $x \in \partial D_N$: $\partial T / \partial n = p(x,\tau)$. Здесь ∂D - граница области, ∂D_D - часть границы (возможно, пустая), на которой задано условие Дирихле и ∂D_N - часть границы, на которой задано условие Неймана, n – нормаль к границе области.

3) Зависимость параметров задачи от координат и температуры: $\rho = \rho(x,T)$, $C = C(x,T)$, $k = k(x,T)$.

В этом случае прямая задача теплопроводности формулируется следующим образом:

Дано уравнение (1), начальное распределение температуры 1а), краевые условия 2), зависимости параметров от координат и температуры 3).

Требуется найти конечное значение температуры 1б) и, как промежуточный результат, значения температуры во всех внутренних точках области 1) для $\forall t \in [0,\tau]$.

В данной работе рассматривается следующая частная постановка ОЗТ. Дано уравнение (1), конечное распределение температуры 1б), краевые условия 2), зависимости параметров от координат и температуры 3). Требуется найти начальное значение температуры 1а) и, как промежуточный результат, значения температуры во всех внутренних точках области 1) для $\forall t \in [0,\tau]$.

Т.е., ОЗТ считается решенной, если найдено такое начальное распределение температуры $\overline{T_{init}}(x) = \overline{T}(x,0)$, что решение прямой задачи с использованием в качестве начальных условий этого распределения $T\left(\overline{T_{init}}\right)$ совпадает с требуемым конечным распределением T_{fin}.

Иначе, требуется найти начальное распределение температуры $\overline{T_{init}}$ такое, что

$$J(\overline{T_{init}}) = \left\| T(\overline{T_{init}}) - T_{fin} \right\| \to \min \tag{2}$$

В качестве нормы в (2) будет использоваться норма L_2, т.е. $\|x\| = \int_D x^2 dD$ или, в дискретном случае, $\|x\| = \sum x_i^2$.

Ясно, что для заданного начального распределения T_{init} значения $T(T_{init})$ получаются в результате решения дифференциального уравнения (1). Для сокращения записей введем для уравнения (1) обозначение (3). Здесь подчеркивается, что решение получено с начальными условиями $T(x,0) = T_{init}(x)$.

$$L(T, T_{init}) = 0 \tag{3}$$

Можно сказать, что дифференциальное уравнение (3) выступает в задаче (2) в роли ограничения. Т.е., согласно современной классификации, мы имеем задачу поиска минимума функционала (2) с ограничением в виде дифференциального уравнения (3). Как правило, задачи поиска экстремума с ограничениями записываются с использованием множителей Лагранжа, т.е. задача ставится в виде задачи на безусловный экстремум

$$\int_D \left(T(T_{init}) - T_{fin}\right)^2 dD + \lambda L(T, T_{init}) \to \min .$$

Но, в связи с тем, что мы минимизируем квадратичный функционал (2), от использования множителей Лагранжа было решено отказаться.

Окончательно. Требуется найти начальное распределение температуры $\overline{T_{init}}$ такое, что распределение температуры $T(\overline{T_{init}})$ доставляет минимум функционалу

$$J\left(T_{init}\right)=\int_D \left(T(T_{init})-T_{fin}\right)^2 dD \to \min, \tag{4}$$

причем для любых начальных условий T_{init} значения $T(T_{init})$ находится в результате решения дифференциального уравнения (3).

Методика решения

Задача (4), (3) будет решаться численно, конечно-разностными методами. Это значит, что искомое начальное распределение температуры описывается значениями температуры в узлах сетки, т.е. представляет собой достаточно большой массив чисел. Отсюда следует, что мы имеем задачу минимизации, зависящую от большого числа определяющих параметров. Кроме того, поиск значения минимизируемой функции требует решения дифференциального уравнения. Все это обусловливает очень большую ресурсоемкость данной задачи. Т.е. оптимизация методики решения – это не искусственная, а, в самом деле, актуальная задача. Очевидный критерий оптимизации – минимум числа расчетов значений минимизируемой функции.

Будем минимизировать функционал (4)

а) методом спуска,

б) решая систему уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial\left(T_i\right)_{init}}=0. \tag{5}$$

Система (5) будет решаться методом Ньютона или какой-либо его модификацией. Здесь $\left(T_i\right)_{init}$ - значения искомого начального распределения температуры в узлах расчетной сетки, т.е. значения определяющих параметров задачи.

Тогда задачу оптимизации можно поставить следующим образом - среди существующих методов спуска и методов типа Ньютона выбрать наиболее соответствующие особенностям решаемой задачи и, если возможно, сократить в них количество вызовов функции а также построить достаточно хорошие начальные условия для задачи минимизации.

Методы спуска. Построение начальных условий

Этот прием хорошо работает, если для прямой задачи теплопроводности несложно получить аналитическое решение. Рассмотрим на простейшем примере. Решается прямая задача теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ T(0)=T(\pi)=0$$

Методом разделения переменных находим решение задачи

$$T(x,\tau) = \sum C_k e^{-k^2\tau} \sin(kx) + x/\pi$$

Отсюда следует, что в начальный момент времени

$$T(x,0) = \sum C_k \sin(kx) + x/\pi \, .$$

Т.е. начальные условия можно получить следующим образом. Решение T_{fin} раскладываем в ряд Фурье. $T_{fin}(x) = \sum C_{k\_fin} \sin(kx) + a$. Мы знаем, что это решение получено в момент времени $t=\tau$. Но тогда из общего решения следует, что $C_{k\_fin} = C_k e^{-k^2\tau}$ и начальное решение элементарно восстанавливается. Так как мы использовали отсечение ряда Фурье при разложении T_{fin}, то мы получаем не точное начальное условие, но достаточно хорошее его начальное приближение. Значит, итерационное уточнение сойдется значительно быстрей. Если в исследуемой области разложение в ряд Фурье построить сложно и/или задача нелинейная, заменяем область чем-либо подходящим, например, прямоугольником, кругом, кольцом и т.д., отбрасываем нелинейности и повторяем процедуру. В любом случае полученное начальное приближение будет заметно лучше, чем обычные нулевые начальные условия. После того, как было получено хорошее приближение к начальному условию, можно проводить его уточнение любым градиентным методом, к примеру, методом скорейшего спуска.

Рассмотрим пример. Пусть $f(x) \to \min, x \in R$. Применим к задаче безусловной оптимизации метод скорейшего спуска. За направление спуска можно взять движение в направлении антиградиента, например, следующим образом:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k f'\left(x^{(k)}\right), \; h_k > 0, k = 0,1,2,\dots \, .$$

Задача состоит в том, чтобы найти на каждом шагу такое значение h_k, которое минимизирует функцию при некотором значении $x^{(k)}$, взятого из предыдущей итерации. Поиск такого значения h_k может быть реализован с помощью разных методов одномерной безусловной оптимизации.

Значение параметра $h_k \in R^1$ берется из условия минимума функции $f(x)$ в направлении движения антиградиента:

$$f\left(x^{(k)} - h_k f'\left(x^{(k)}\right)\right) = \min \; f\left(x^{(k)} - hf'\left(x^{(k)}\right)\right), \; h > 0 \, .$$

На основании одномерного случая, можно записать итерационную формулу для минимизации функционала типа (4):

$$J\left(T_{init}^{(k)} - h_k J'\left(T_{init}^{(k)}\right)\right) = \min J\left(T_{init}^{(k)} - h \cdot J'\left(T_{init}^{(k)}\right)\right), \; h > 0.$$

Таким образом, используя приближение к начальному условию, его можно уточнить, используя метод скорейшего спуска.

Методы типа Ньютона

Методы этого типа заменяют решение системы уравнений вида $F_i(\vec{x}) = F_i(x_1,...,x_n) = 0$ решением последовательности линейных систем вида:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\left(\vec{x}^k\right) & ... & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\left(\vec{x}^k\right) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}\left(\vec{x}^k\right) & ... & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\left(\vec{x}^k\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} - x_1^k \\ ... \\ x_n^{k+1} - x_n^k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_1\left(\vec{x}^k\right) \\ ... \\ F_n\left(\vec{x}^k\right) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Напомним, что нам надо решать систему вида (5), где в качестве неизвестных выступают значения начальных условий в узлах сетки. В результате, в качестве матрицы системы у нас будет использоваться гессиан исходной системы, т.е. матрица, состоящая из вторых производных системы.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J_1}{\partial T_{init_1}^2}\left(T_{init}^k\right) & ... & \frac{\partial^2 J_1}{\partial T_{init_1}\partial T_{init_n}}\left(T_{init}^k\right) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 J_n}{\partial T_{init_n}\partial T_{init_1}}\left(T_{init}^k\right) & ... & \frac{\partial^2 J_n}{\partial T_{init_n}^2}\left(T_{init}^k\right) \end{pmatrix} \tag{7}$$

.

Так как, рассчитывая гессиан, мы дифференцируем решение по начальным условиям, то, в общем случае, найти производную аналитически невозможно. Значит, мы вынуждены брать ее численно. При численном поиске второй производной по одной переменной мы должны иметь значения дифференцируемой функции в трех точках, а при поиске смешанной производной – в четырех. При решении одного уравнения, учитывая, что смешанных производных здесь нет, с этой задачей можно легко справиться. Здесь для расчета производной используют три найденных подряд значения функции, задающей уравнение $F(x)=0$. Но, при решении систем уравнений этот прием не проходит. Мы вынуждены рассчитывать значения функции специально. Но одно значение функции мы получаем, решив дифференциальное уравнение (3). Следовательно, учитывая симметричность матрицы (7), для проведения одного шага метода Ньютона нам необходимо решить дифференциальное уравнение $O\left(n^2\right)$ раз, где n - количество внутренних узлов сетки дискретного аналога уравнения вида (1).

Сначала рассмотрим простейший случай. Предположим, что нужно решить нелинейное уравнения вида $F(x)=0$. Классический метод Ньютона, решающий эту задачу, имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}. \tag{8}$$

Повысить точность метода (8) можно на основе следующего подхода. Пусть нужно решить дифференциальное уравнение вида $y' = f(x)$. Интегрируя обе его части, получим выражение:

$$\left\{\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx\right\} = \left\{y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx\right\} = \left\{y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx\right\} \tag{9}$$

Ясно, что взятие интеграла тесно связано с точностью расчетов. Используя формулу правых прямоугольников, уравнение (9) можно переписать следующим образом:

$$\left\{y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx\right\} = \{y_{k+1} = y_k + hy'(x_k)\} = \{y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k)y'(x_k)\}. \tag{10}$$

Данные преобразования сводятся к классическому методу Ньютона, если положить $y_{k+1} = 0$ и решить уравнение относительно x_{k+1}. Известно, что точность одного шага метода ломаных $O(h^2)$. Аналогичную точность вычислений имеет и классический метод Ньютона. Повысить точность одного шага решения уравнения можно, используя метод предиктор-корректор. При взятии интеграла методом трапеций будем иметь:

$$\begin{gathered}\left\{y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx\right\} = \{y_{k+1} = y_k + 0.5h(y'(x_k) + y'(x_{k+1}))\}. \\ \{y_{k+1} = y_k + 0.5(x_{k+1} - x_k)(y'(x_k) + y'(x_{k+1}))\}\end{gathered} \tag{11}$$

В последнем выражении нам значение $y'(x_{k+1})$ неизвестно, поэтому для него строится оценка. Оценку можно проводить на основании метода ломаных следующим образом:

$$\begin{gathered} z = x_k - \beta\frac{y_k}{y'_k}, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{2y_k}{y'(x_k) + y'(z)}. \end{gathered} \tag{12}$$

Одним из популярных вариантов (12) есть использование $\beta=1$.

Также можно предложить методы, у которых в правиле трапеций берется не среднее арифметическое значений на концах, а среднее геометрическое. Получим следующие выражения:

$$\left\{y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx\right\} = \left\{y_{k+1} = y_k + h\frac{(y'(x_k)y'(x_{k+1}))}{0.5(y'(x_k) + y'(x_{k+1}))}\right\}. \tag{13}$$

Аналогичным образом проводим оценку для неизвестного значения в (13) для $y'(x_{k+1})$. В результате имеем:

$$z = x_k - \beta\frac{y_k}{y'_k}, \tag{14}$$

$$x_{k+1} = x_k - y_k \frac{\left(y'(x_k) + y'(z)\right)}{2y'(x_k)y'(z)}.$$

Еще один вариант, основанный на правиле средних, можно записать в виде:

$$\left\{y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx\right\} = \left\{y_{k+1} = y_k + hy'\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right\} = \\ = \left\{y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k)y'\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\right\}. \tag{15}$$

В (15) присутствует множитель, который также как и в предыдущих выражениях требует проведения оценки. В результате будем иметь:

$$z = x_k - \beta \frac{y_k}{y'_k}, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{y_k}{y'\left(\frac{x_k + z}{2}\right)}. \tag{16}$$

Очевидно, что последний метод имеет третий порядок точности вычислений.

При решении рассмотренного класса задач, как уже говорилось, производные функционала по каждому его параметру надо задавать численно, поскольку решение подобных задач могут быть получены только численно, т.е. в виде таблицы значений. Перед тем, как записать формулы для вышерассмотренных методов (12), (14) и (16) запишем сначала классический метод Ньютона для поставленной ОЗТ.

$$G^k \Delta\theta^k = -R^k \\ \theta^{k+1} = \theta^k + \Delta\theta^k, \tag{17}$$

где $G = (G_{ij}) = \left(\partial^2 J / \partial\theta_i \partial\theta_j\right)$ – матрица Гессе, $\Delta\theta = (\Delta\theta_1, ..., \Delta\theta_n)^T$ – вектор-столбец приращений параметров, $R = (R_1, ..., R_n)^T = (\partial J/\partial\theta_1, ..., \partial J/\partial\theta_n)^T$ – вектор-столбец производных целевого функционала.

Использование методов (12), (14) и (16) для модификации метода (17) ведет к следующим методам. Напоминаем, что мы решаем ОЗТ, которая сводится к нахождению минимума функционала типа (4).

В данном случае формулы метода (12) для минимизации функционала типа (4) можно записать следующим образом:

$$\bar{z} = \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) \\ \bar{\theta}^{(k+1)} = \bar{\theta}^{(k)} - 2 \cdot \left(H\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) + H\left(\bar{z}\right)\right)^{-1} J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right). \tag{18}$$

.

Аналогичным образом формулы метода (14) решения нелинейной ОЗТ можно записать в виде:

$$\bar{z} = \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right)$$
$$\bar{\theta}^{(k+1)} = \bar{\theta}^{(k)} - \frac{1}{2} \cdot \left(H\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) \cdot H\left(\bar{z}\right)\right)^{-1} \left(H\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) + H\left(\bar{z}\right)\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) \tag{19}$$

Формулы метода (16) для поставленной задачи имеют следующий вид:

$$\bar{z} = \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right),$$
$$\bar{\theta}^{(k+1)} = \bar{\theta}^{(k)} - H^{-1}\left(\frac{\bar{\theta}^{(k)} + \bar{z}}{2}\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right). \tag{20}$$

$\bar{\theta}^{(k)}$ - вектор неизвестных задачи на k-ой итерации, H - матрица Гессе. Нужно отметить, что метод (20) имеет третий порядок точности.

Можно попробовать ускорить методы (18), (19), (20), используя для нахождения вектора $\bar{\theta}^{(k+1)}$ метод скорейшего спуска.

Тогда формулировку метода (18) можно окончательно записать в виде:

$$J\left(\bar{\theta}^{(k)} - \beta_k J'\left(\bar{\theta}^{(k)}\right)\right) = \min J\left(\bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot J'\left(\bar{\theta}^{(k)}\right)\right), \ \beta > 0,$$
$$\bar{z} = \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right),$$
$$J\left(\bar{z} - h_k J'\left(\bar{z}\right)\right) = \min J\left(\bar{z} - h \cdot J'\left(\bar{z}\right)\right), \ h > 0,$$
$$\bar{\theta}^{(k+1)} = \bar{\theta}^{(k)} - 2h_k \cdot \left(H\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) + H\left(\bar{z}\right)\right)^{-1} J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right). \tag{21}$$

Формулировку метода (19) можно окончательно записать в виде:

$$J\left(\bar{\theta}^{(k)} - \beta_k J'\left(\bar{\theta}^{(k)}\right)\right) = \min J\left(\bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot J'\left(\bar{\theta}^{(k)}\right)\right), \ \beta > 0,$$
$$\bar{z} = \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right).$$
$$J\left(\bar{z} - h_k J'\left(\bar{z}\right)\right) = \min J\left(\bar{z} - h \cdot J'\left(\bar{z}\right)\right), \ h > 0,$$
$$\bar{\theta}^{(k+1)} = \bar{\theta}^{(k)} - \frac{h_k}{2} \cdot \left(H\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) \cdot H\left(\bar{z}\right)\right)^{-1} \left(H\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) + H\left(\bar{z}\right)\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right). \tag{22}$$

Аналогично, формулировка метода (20) по отношению к поставленной задаче будет иметь следующий вид:

$$J\left(\bar{\theta}^{(k)} - \beta_k J'\left(\bar{\theta}^{(k)}\right)\right) = \min J\left(\bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot J'\left(\bar{\theta}^{(k)}\right)\right), \ \beta > 0,$$
$$\bar{z} = \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right),$$
$$J\left(\bar{z} - h_k J'\left(\bar{z}\right)\right) = \min J\left(\bar{z} - h \cdot J'\left(\bar{z}\right)\right), \ h > 0,$$
$$\bar{\theta}^{(k+1)} = \bar{\theta}^{(k)} - h_k H^{-1}\left(\frac{\bar{\theta}^{(k)} + \bar{z}}{2}\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right). \tag{23}$$

Очевидно, что при решении поставленной задачи классическим методом Ньютона, нужно сначала найти градиент функционала (4). Для этого нужно найти численные решения $2n$ ПЗТ, где n - количество параметров. При вычислении каждого недиагонального элемента матрицы Гессе нужно решить еще $4n$ ПЗТ. Учитывая симметричность матрицы Гессе, количество решений ПЗТ на один шаг классического метода Ньютона будет равно:

$$N_f = 1 + 4(1 + 2 + ... + n) + 2n = 1 + 2n(n+1) + 2n = 2n^2 + 4n + 1.$$

Видно, что количество вызовов процедуры решения ПЗТ на один шаг решения ОЗТ классическим методом Ньютона имеет квадратичную зависимость. Здесь также возможны ускорения.

Тестирование разработанных методов проводилось на ряде задач. Некоторые из них приведены ниже.

Первая задача имеет вид:

$$\begin{gathered}\rho(T)C(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right),\\ \rho(T) = 1 + 0.15T + 0.25T^2,\ C(T) = 0.25T^2 - 0.01T + 0.15.\\ T(x,0,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5\text{-}x)+0.5\pi)},\ T(x,1,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5\text{-}x)-0.5\pi)},\\ T(0,y,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5\text{-}y)+0.5\pi)},\ T(1,y,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5\text{-}y)-0.5\pi)}.\end{gathered} \tag{24}$$

Начальное условие, которое ищется как решение ОЗТ: $T(x,y,0) = 0.5 + \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$.

Вторая задача имеет вид:

$$\begin{gathered}\rho(T)C(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right),\\ \rho(T) = \frac{1 + T + 2T^2}{10},\ C(T) = 0.5 + (0.1\text{-}T)^2,\\ T(x,0,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5\text{-}x)+0.5\pi)},\ T(x,1,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5\text{-}x)-0.5\pi)},\\ T(0,y,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5\text{-}y)+0.5\pi)},\ T(1,y,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5\text{-}y)-0.5\pi)}.\end{gathered} \tag{25}$$

Начальное условие: $T(x,y,0) = 0.5 + xy(1-x)^2(1-y)^2$.

Третья задача:

$$\begin{gathered}\rho(T)C(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right)\\ \rho(T) = 1 - 0.05T + 0.55T^2,\ C(T) = 0.5 + T(0.1\text{-}T)^2.\\ T(x,0,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5\text{-}x)+0.5\pi)},\ T(x,1,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5\text{-}x)-0.5\pi)},\\ T(0,y,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5\text{-}y)+0.5\pi)},\ T(1,y,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5\text{-}y)-0.5\pi)},\end{gathered} \tag{26}$$

Начальное условие: $T(x,y,0) = 0.5 + xy(1-x)^4(1-y)^3$.

Тестирование двух классических и трех разработанных методов (21), (22) и (23) было проведено на нелинейных задачах (24), (25) и (26). Задачи (24)-(26) были решены на сетках разной размерности. Ниже приведены результаты расчетов всех рассмотренных методов без построения приближения к начальному условию (таблицы 1-2) и с построением приближения к начальному условию с применением метода Фурье. При проверке эффективности подхода использовались 4 члена разложения. Точность расчетов во всех методах на разных сетках $eps = 10^{-7}$. В каждом случае при решении данных нелинейных задач больше всего вызовов функции имеет метод скорейшего спуска. Для каждой задачи число вызовов функции при решении данным методом будет браться за 100%. Количества вызовов функции, которые были получены другими методами, будут пересчитаны относительно метода скорейшего спуска.

Таблица 1

Результаты работы разработанных методов на сетке 30x30 без применения метода Фурье для построения приближения к начальному условию.

Точность вычислений $eps = 10^{-7}$

	Задача 1 (24)	Задача 2 (25)	Задача 3 (26)
Метод скорейшего спуска	350 итераций / 10718750 вызовов функции (100%)	387 итераций / 9660100 вызовов функции (100%)	431 итерация / 10007873 вызова функции (100%)
Классический метод Ньютона	15 итераций / 56,67%	18 итераций / 75,47%	15 итераций / 60,70%
Первая модификация метода Ньютона (21)	7 итераций / 26,45%	7 итераций / 29,35%	6 итераций / 25,98%
Вторая модификация метода Ньютона (22)	8 итераций / 30,23%	6 итераций / 25,16%	6 итераций / 24,28%
Третья модификация метода Ньютона (23)	5 итераций / 18,89%	6 итераций / 25,16%	4 итерации / 10,11%

Таблица 2

Результаты работы разработанных методов на сетке 45x45 без применения метода Фурье для построения приближения к начальному условию.

Точность вычислений $eps = 10^{-7}$

	Задача 1 (24)	Задача 2 (25)	Задача 3 (26)
Метод скорейшего спуска	421 итерация / 12893125 вызовов функции (100%)	415 итераций / 12480749 вызовов функции (100%)	461 итерация / 10704476 вызова функции (100%)
Классический метод Ньютона	18 итераций / 30,65%	22 итерации / 35,24%	15 итераций / 27,28%
Первая модификация метода Ньютона (21)	10 итераций / 36,23%	8 итераций / 35,71%	7 итераций / 32,17%
Вторая модификация метода Ньютона (22)	8 итераций / 28,31%	6 итераций / 33,75%	6 итераций / 33,75%
Третья модификация метода Ньютона (23)	5 итераций / 25,32%	6 итераций / 19,98%	4 итерации / 17,85%

Теперь покажем в табличном виде результаты всех рассмотренных методов, перед использованием которых была сделана процедура построения хорошего приближения к начальному условию задач на основании метода Фурье. При построении начальных условий использовались 4 члена разложения.

Таблица 3

Результаты работы разработанных методов на сетке 30х30
(с применением метода Фурье).
Точность вычислений $eps = 10^{-7}$

	Задача 1 (24)	Задача 2 (25)	Задача 3 (26)
Метод скорейшего спуска	153 итерации / 1451850 вызовов функции (100%)	235 итераций / 31566601 вызовов функции (100%)	271 итерация / 40153473 вызова функции (100%)
Классический метод Ньютона	12 итераций / 15,12%	13 итераций / 17,15%	12 итераций / 15,53%
Первая модификация метода Ньютона (21)	7 итераций / 10,11%	7 итераций / 10,11%	4 итерации / 7,72%
Вторая модификация метода Ньютона (22)	8 итераций / 12,82%	5 итераций / 9,71%	6 итераций / 10,82%
Третья модификация метода Ньютона (23)	5 итераций / 8,85%	6 итераций / 10,82%	4 итерации / 7,22%

Таблица 4

Результаты работы разработанных методов на сетке 45х45 без применения метода Фурье для построения приближения к начальному условию.
Точность вычислений $eps = 10^{-7}$

	Задача 1 (24)	Задача 2 (25)	Задача 3 (26)
Метод скорейшего спуска	193 итерации / 1821805 вызовов функции (100%)	298 итераций / 3656021 вызовов функции (100%)	3251 итераций / 40153473 вызова функции (100%)
Классический метод Ньютона	12 итераций / 15,12%	16 итераций / 21,51%	13 итераций / 17,83%
Первая модификация метода Ньютона (21)	7 итераций / 10,11%	9 итераций / 15,31%	5 итераций / 8,33%
Вторая модификация метода Ньютона (22)	9 итераций / 16,35%	7 итераций / 12,11%	8 итераций / 15,28%
Третья модификация метода Ньютона (23)	5 итераций / 8,85%	6 итераций / 10,82%	4 итерации / 6,35%

Выводы

Разработанные методы эффективно решают нелинейные ОЗТ по восстановлению начальных условий. Тестирование этих методов было выполнено на различных двумерных задачах. Сходимость результатов достаточно хорошая. Показано заметное ускорение расчетов по сравнению с классическими методами.

Литература

1. Klibanov M.V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problem. / M.V. Klibanov, L. Beilina. – USA.: Springer, 2012. – 407p. ISBN 978-1-4419-7804-2.
2. Isakov V., Inverse Problems for Partial Differential Equations. / V. Isakov. – USA.: Springer, 2005 – 40p.

Стаття надійшла _15_._04_._2014___
Прийнято до друку _06_._05_._2014___

Анотація

Б.П. Головня, В.В. Хайдуров
Ефективні методи розв'язання нелінійних обернених задач теплопровідності

Зворотні задачі теплопровідності (ЗЗТ) виникають в різних галузях науки і техніки. Відомо, що подібні завдання дуже ресурсномісткі, тобто їх рішення вимагає проведення дуже великих обчислень. У роботі розроблена серія методів чисельного рішення нелінійних обернених задач теплопровідності з відновлення початкової умови. Описана методика побудови початкових умов, що дозволяє помітно скоротити обсяг обчислень. Тестування розглянутих методів показало їх високу ефективність при вирішенні обернених задач даного класу.

Ключові слова: *зворотна задача теплопровідності (ЗЗТ), чисельне рішення ЗЗТ.*

Summary

B.P. Golovnya, V.V. Haydurov
Effective method for solving nonlinear inverse heat conduction problem

In this paper we developed a series of methods for the numerical solution of nonlinear inverse heat conduction problems to restore the initial condition. Methodology on the base of that the good approaching is built to the initial condition is also described, that in times abbreviates the amount of calculations to the receipt of numeral decision of certain task with the set exactness. Calculable optimization of each is conducted of the considered methods on the amount of calls of function. Testing of the considered methods is conducted. All methods showed high efficiency at the decision of reverse tasks of this class.

Key words: *inverse heat conduction problem, the numerical solution of inverse heat conduction problem.*