УДК 372.851 Л. В. Грамбовська

СТВОРЕННЯ ЗАВДАНЬ З ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ В ТРИКУТНИКУ

У статті висвітлена методика створення завдань з параметрами на основі дослідження функціональних залежностей у довільному трикутнику в середовищі ППЗ, розв'язання якої потребує оригінального підходу. Задача сформульована на основі введення до розгляду функцій однієї змінної, що містять два параметри. У процесі роботи разом з учнями створена нова за змістом алгебраїчна задача з параметрами.

Ключові слова: *створення завдань з параметрами, комп'ютерний експеримент.*

Постановка проблеми. Одним з пріоритетних напрямків освітньої політики в Україні є перехід від знаннєво орієнтованої до особистісно орієнтованої парадигми навчання. Сучасна освіта сприймається суспільством як спеціально організоване освоєння суспільно-історичного досвіду в певній галузі, зокрема математиці, та формування на цій основі власного досвіду учнів по вирішенню різноманітних особистісних проблем. Результатом такого навчання є досягнення певного рівня освіченості людини. Набутий рівень повинен допомогти особині жити і реалізувати себе в умовах глобалізації, набути загальнокультурних компетентностей (навичок співпраці з іншими, толерантності, гнучкості, емпатії, разом з тим умінь приймати рішення, брати на себе відповідальність, бути громадянином суспільства тощо).

Такі фактори зумовлюють актуальність підготовки майбутніх вчителів і перепідготовки вчителів в системі післядипломної педагогічної освіти в нових умовах. У цьому контексті в системі післядипломної педагогічної освіти необхідно допомогти вчителю так організувати навчальну діяльність учнів, щоб дитина була максимально включена у власну навчально-пізнавальну діяльність, стала співучасником, співавтором створення навчальних задач і пошуку шляхів їх розв'язання.

Для досягнення поставленої мети на уроках математики в школі корисно використовувати педагогічні програмні засоби навчального призначення типу «Динамічна математика» (GeoGebra, Cabre2D, Cabre3D, DG, GRAN1, GRAN2D та інші), які дозволяють природно організовувати елементи дослідницької діяльності, виявляти несподівані цікаві математичні проблеми в добре знайомому навчальному матеріалі, який на перший погляд таких проблем не містить, занурювати учнів в глибини математичного експерименту, надавати дитині відчуття першовідкривача на теренах математики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Серед робіт, присвячених використанню ППЗ зазначеного типу виділимо роботи М. І. Жалдака, Ю. В. Горошка, А. О. Костюченка, С. А. Ракова, О. П. Зеленяка та інших. У працях науковців досліджені різні аспекти використання ППЗ «Динамічна математика» у навчальному процесі. Разом з тим, мало уваги приділяється проблемі дослідження властивостей геометричних об'єктів за допомогою програмного засобу GRAN1 у вигляді функціональних залежностей та створення на основі комп'ютерного експерименту нових алгебраїчних завдань з параметрами.

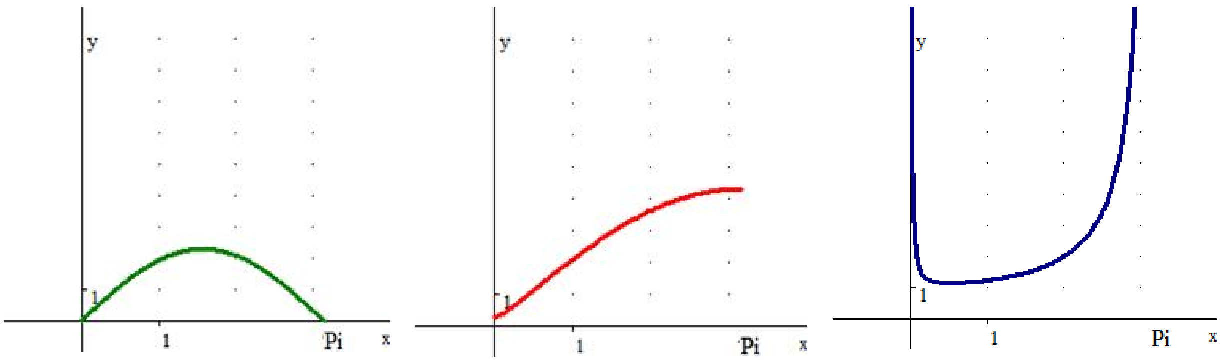
Мета статті – висвітлити методику створення завдань з параметрами на основі дослідження функціональних залежностей в довільному трикутнику, розв'язання яких потребує оригінального підходу.

Виклад основного матеріалу. Ідея створення завдань з параметрами полягає в тому, що на підставі проведеного учнями разом з вчителем у динамічному середовищі ППЗ експерименту по дослідженню властивостей геометричних об'єктів, наприклад довільного трикутника, можна висунути цікаві гіпотези, наприклад: якщо взяти мінімальну кількість даних в загальному вигляді (без конкретних числових даних), зв'язаних між собою виявленим у процесі дослідження чином, у кінці міркувань можна отримати конкретні розміри трикутника. Властивості трикутника тоді розглядаються як функціональні залежності, виражені у вигляді відомих формул. Експеримент у динамічному середовищі наштовхує на гіпотези, припущення, які надалі доводяться аналітично за допомогою апарату математичного аналізу. Наведемо приклад.

Нехай задано довільний трикутник *ABC*. Для визначеності нехай в ньому задано три його елементи: $AC=a$, $AB=b$ і $\angle BAC=\alpha$. Запишемо співвідношення для знаходження: площі, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, третьої сторони, $BC=c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$ і радіуса описаного навколо кола, $R=\frac{BC}{2\sin\alpha}=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

Розглянемо дані залежності як функції однієї змінної. Так як у кожній з формул присутні як лінійні розміри (сторони), так і кутові (кут між сторонами), то розглянемо два види функціональних залежностей: $f(\alpha)$, де α - градусна міра кута *BAC* та $f(a)$, де a – довжина сторони трикутника.

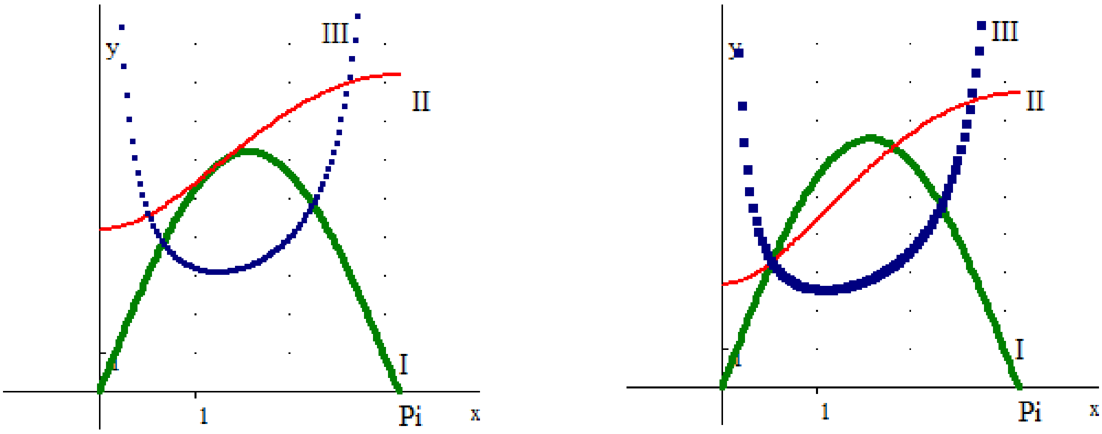
Нехай незалежною змінною x є кут ($x=\alpha$), тоді маємо три функціональні залежності: $S(x)=\frac{1}{2}ab\sin x$, $c(x)=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos x}$, $R(x)=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos x}}{2\sin x}$. В останніх формулах довжини сторін a і b є фіксованими невідомими числами, тобто параметрами. Побудуємо графіки даних функцій в системі координат *XOY*. По вісі *Ox* будемо відкладати градусну (радіанну) міру кута α трикутника *ABC*, де $\alpha\in(0;180^0)$, по вісі *Oy* значення відповідних функцій *S(x), c(x), R(x)*. Також урахуємо, що a і b є довжинами сторін, тому $a>0$, $b>0$. Так як графіки наведених функцій є складними, тому для їх побудови скористаємося вільним програмним забезпеченням GRAN1. Покладемо, що $a=p_1$, $b=p_2$. У ППЗ GRAN1 графіки набудуть виду (рис. 1).



Графік функції *S(x)* а) | Графік функції *c(x)* б) | Графік функції *R(x)* в)

Рис. 1

Дослідимо поведінку функцій *S(x), c(x), R(x)* в одній системі координат. Надаючи у довільному порядку конкретних значень параметрам $a=p_1$, $b=p_2$ в програмному засобі GRAN1 можна отримати різні конфігурації зазначених функцій (наприклад, такі як на рисунку 2).



а) б)

Рис. 2

У результаті дослідження можна помітити, що існують такі значення параметрів $a = p_1$, $b = p_2$, при яких всі три графіки функцій *S(x), c(x), R(x)* будуть мати одну спільну точку (рис. 2 б). На рисунку 2 б) по вісі абсцис відкладено міру кута між сторонами *a, b* трикутника *ABC*, тому можна висунути гіпотезу, що існує таке значення кута $\alpha = x_0$, при якому значення трьох функцій $S(x) = \frac{1}{2}ab\sin x$, $c(x) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos x}$, $R(x) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos x}}{2\sin x}$ у цій точці співпадатимуть: $S(x_0)=c(x_0)=R(x_0)$. Дану гіпотезу можна переформулювати так.

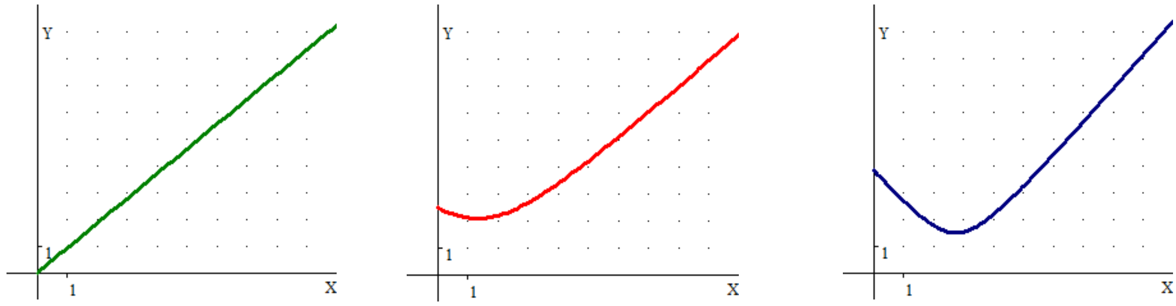
Гіпотеза 1. *На площині існує такий трикутник ABC, в якому при певному значенні довжин сторін і кута між ними, виконується рівність:*

$$S=c=R,$$

де S – площа трикутника, c – довжина сторони трикутника, що лежить навпроти заданого кута, R – радіус описаного навколо цього трикутника кола.

Зауважимо, що якщо розв'язувати сформульовану задачу, прирівнюючи відповідні величини (*S=c і c=R*), то у результаті отримаємо квадратне рівняння з параметром, розв'язок якого є невизначеним. У той самий час комп'ютерний експеримент чітко показує, що три графіки *S(x), c(x), R(x)* мають одну спільну точку при конкретних значеннях довжин сторін і кута між ними і, можливо, цей набір числових значень *a, b, α* є єдиним.

Нехай тепер незалежною змінною є одна із сторін трикутника *ABC*, наприклад, сторона *a*, тоді $a = x$, змінна x набуває тільки додатних значень, довжина іншої сторони *b* (*b>0*) та кут між сторонами α ($\alpha \in (0;180^0)$) є фіксованими, але невідомими числами, тому будемо розглядати їх у вигляді параметрів. Тоді функціональні залежності *S(x), c(x), R(x)* можна записати так: $S(x) = \frac{1}{2}xb\sin\alpha$, $c(x) = \sqrt{x^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$, $R(x) = \frac{\sqrt{x^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$. Побудуємо ці графіки в системі координат *xOy* за допомогою ППЗ GRAN1 (рис. 3).



Графік функції S(x)
а)

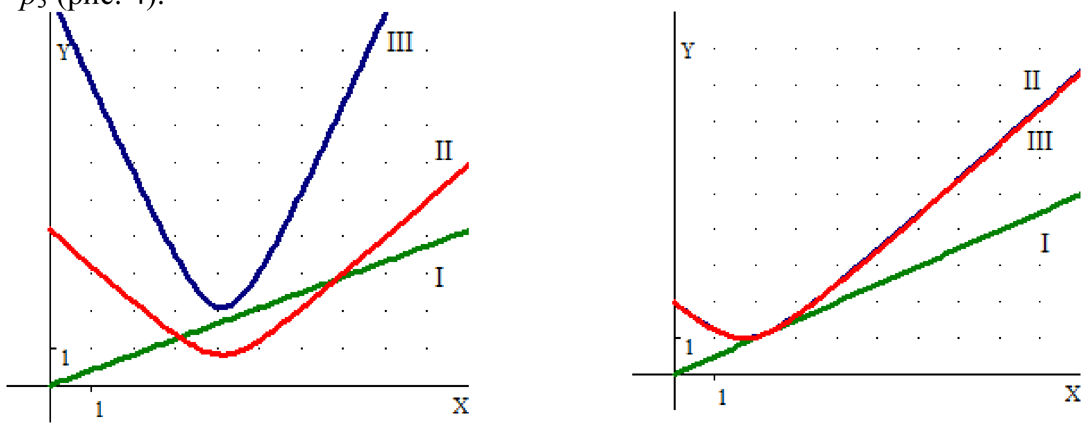
Графік функції *c(x)*
б)

Графік функції *R(x)*
в)

Рис. 3

Порівняємо графіки функції *S(x),* зображені на рисунках 1 а) і 3 а). Очевидним є те, що подання даної функції на рисунку 3 а) є значно простішим, ніж на рисунку 1 а), хоча б тому, що у першому випадку зображено графік прямої лінії $y=kx+b$, $b=0$, у той самий час, як у другому та сама функція *S(x)* представлена графіком синусоїди $y=A\sin x$.

Повернемося до гіпотези 1. Розглянемо конфігурацію трьох графіків функцій $S(x)=\frac{1}{2}xb\sin\alpha$, $c(x)=\sqrt{x^2+b^2-2ab\cos\alpha}$ і $R(x)=\frac{\sqrt{x^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$ в одній системі координат, де постійними величинами (параметрами) є сторона $b = p_2$ і кут $\alpha = p_3$ (рис. 4).



а)

б)

Рис. 4

Надаючи у довільному порядку значень параметрам $b = p_2$ і $\alpha = p_3$, можна дібрати такі їх величини, при яких три графіки функцій $S(x)=\frac{1}{2}xb\sin\alpha$, $c(x)=\sqrt{x^2+b^2-2ab\cos\alpha}$ і $R(x)=\frac{\sqrt{x^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$ будуть мати одну спільну точку (рис. 4 б).

Проведене дослідження надає змоги спростити формулювання гіпотези 1. З рисунку 4 б) можна зробити такі висновки: для того, щоб графіки функцій *S(x), c(x), R(x)* мали одну спільну точку, необхідно виконання двох умов: 1) щоб співпадали графіки функцій $c(x) = \sqrt{x^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$ і $R(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$, або *c=R*;

2) графік функції $S(x) = \frac{1}{2}xb\sin\alpha$ був би дотичною до графіків функцій *c(x), R(x)*.

Очевидним є те, що для того, щоб виконувалася рівність *c=R,* або $\sqrt{x^2 + b^2 - 2xb\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{x^2 + b^2 - 2xb\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$, необхідно, щоб $2\sin\alpha = 1$, або $\sin\alpha = 0{,}5$, або $\alpha = 30^0$ і $\alpha = 150^0$. Отже, з'ясовано значення одного з параметрів, наприклад, $p3 = \alpha = 30^0$. Підставимо одержане значення параметра в функції і після спрощень отримаємо: $S(x) = 0{,}25 \cdot bx$; $c(x) = R(x) = \sqrt{x^2 + b^2 - \sqrt{3}xb}$.

Тепер гіпотезу 1 можна переформулювати, перевівши геометричну задачу в площину розв'язування алгебраїчної задачі з параметром.

Гіпотеза 2. *При якому значенні параметра b>0, пряма* $y = 0{,}25 \cdot bx$ *є дотичною до графіка функції* $y = \sqrt{x^2 + b^2 - \sqrt{3}bx}$. *Знайти координати точки дотику.*

Розв'язання. Нехай точка $A(x_0;y_0)$ – точка дотику прямої $y = 0{,}25bx$ і залежності $y = \sqrt{x^2 + b^2 - \sqrt{3}bx}$. Покладемо, що $x=x_0$, тоді $y(x_0) = \sqrt{x_0^{\ 2} + b^2 - \sqrt{3}bx_0}$. Рівняння дотичної до графіка функції в точці має вигляд: $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$, де x_0, y_0 – координати точки дотику, $y'(x_0)$ – значення похідної в точці дотику.

Знайдемо похідну функції $y = \sqrt{x^2 + b^2 - \sqrt{3}bx}$: $y' = \dfrac{2x - \sqrt{3}b}{2\sqrt{x^2 + b^2 - \sqrt{3}bx}}$.

Обчислимо значення похідної в точці: $y'(x_0) = \dfrac{2x_0 - \sqrt{3}b}{2\sqrt{x_0^{\ 2} + b^2 - \sqrt{3}bx_0}}$.

Підставимо одержані дані у рівняння дотичної:

$$y = \sqrt{x_0^{\ 2} + b^2 - \sqrt{3}bx_0} + \frac{2x_0 - \sqrt{3}b}{2\sqrt{x_0^{\ 2} + b^2 - \sqrt{3}bx_0}}(x - x_0).$$

Після спрощень одержимо:

$$y = \frac{2x_0 - \sqrt{3}b}{2\sqrt{x_0^{\ 2} + b^2 - \sqrt{3}bx_0}}x + \frac{2b^2 - \sqrt{3}bx_0}{2\sqrt{x_0^{\ 2} + b^2 - \sqrt{3}bx_0}}.$$

Останнє рівняння є рівнянням дотичної до графіка функції $y = \sqrt{x^2 + b^2 - \sqrt{3}bx}$ в точці $A(x_0;y_0)$. За умовою пряма $y = 0{,}25bx$ є рівнянням дотичної до графіка функції $y = \sqrt{x^2 + b^2 - \sqrt{3}bx}$, тому прирівняємо відповідні коефіцієнти та складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{2x_0 - \sqrt{3}b}{2\sqrt{x_0^{\ 2} + b^2 - \sqrt{3}bx_0}} = \dfrac{b}{4}; \\ \dfrac{2b^2 - \sqrt{3}bx_0}{2\sqrt{x_0^{\ 2} + b^2 - \sqrt{3}bx_0}} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Розглянемо друге рівняння системи (1).

$$\frac{2b^2-\sqrt{3}bx_0}{2\sqrt{x_0^{\ 2}+b^2-\sqrt{3}bx_0}}=0 \Rightarrow \begin{cases} 2b^2-\sqrt{3}bx_0=0; \\ 2\sqrt{x_0^{\ 2}+b^2-\sqrt{3}bx_0}\neq 0. \end{cases}$$

Вираз, що стоїть під знаком кореня є завжди додатним, тому:

$\sqrt{3}bx_0=2b^2$, звідки $x_0=\dfrac{2b^2}{\sqrt{3}b}$. Так як за умовою *b>0*, то

$$x_0=\frac{2b}{\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Підставимо $x_0=\dfrac{2b}{\sqrt{3}}$ у перше рівняння системи (1):

$$\frac{2x_0-\sqrt{3}b}{2\sqrt{x_0^{\ 2}+b^2-\sqrt{3}bx_0}}=\frac{b}{4} \Rightarrow \frac{2\cdot\dfrac{2b}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}b}{2\sqrt{\left(\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right)^2+b^2-\sqrt{3}b\dfrac{2b}{\sqrt{3}}}}=\frac{b}{4}.$$

Після спрощень отримаємо *b=2*. Підставимо *b=2* у вираз (2):

$x_0=\dfrac{2b}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Отже $x_0=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$,

$$y(x_0)=\sqrt{x_0^{\ 2}+b^2-\sqrt{3}bx_0}=\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2+2^2-2\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot 2}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Отже, маємо: *b=2*, $x_0=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, $y(x_0)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Якщо взяти значення параметра $p_3=\alpha$ при $\alpha=150°$, то можна переконатися в тому, що трикутник *ABC* не існує. Отже, задача, сформульована у вигляді гіпотези 2 має єдиний розв’язок, що і було з’ясовано у процесі проведення комп’ютерного експерименту.

Повернемося до геометричної задачі, яку можна сформулювати так:

Задача 1. *У трикутнику ABC AB = a, AC = b, кут BAC =* α*. Знайти довжини сторін a, b та кут* α *між ними, якщо для даного трикутника виконується умова: S = c = R, де S – площа трикутника ABC, c – сторона BC і R – радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.*

Або дану задачу можна сформулювати інакше.

Задача 2. *У трикутнику ABC AB = a, AC = b. Знайти довжини сторін a, b, якщо для даного трикутника виконуються умови: 1) рівняння, що описує площу даного трикутника є рівнянням дотичної до графіка функції, що описує сторону BC трикутника ABC; 2)довжина сторони BC дорівнює радіусу описаного навколо даного трикутника кола.*

Висновки. Отже, у статті окреслена методика створення завдань з параметрами на підставі проведеного разом з учнями у динамічному середовищі ППЗ дослідження залежності між такими елементами довільного трикутника, як площа, радіус описаного кола і третя сторона трикутника, якщо відомі дві його інші сторони і кут між ними. Задача сформульована на основі введення до розгляду функцій однієї змінної, що містять два параметри. У процесі роботи разом з учнями створена нова за змістом алгебраїчна задача з параметрами. Без експерименту в динамічному середовищі додуматися прирівнювати числові значення величин площ і лінійних розмірів елементів трикутника досить важко, бо використані формули достатньо громіздкі, містять принаймні три різні величини (букви), прирівнювати навмання і розв'язувати «в лоба» рівняння, що містять два параметри складно. Для графічного подання розглянутих залежностей у динаміці використано вільне програмне забезпечення GRAN1, застосування якого дозволило висунути гіпотези щодо взаємозв'язків між елементами довільного трикутника. У процесі роботи сформульована авторська геометрична задача підвищеної складності, яка потребує оригінального підходу до розв'язання. Уміння організовувати елементи дослідницької діяльності, створювати нові цікаві задачі на очах в учнів, вчити останніх шляхам пошуку вирішення сформульованих проблем є невід'ємною складовою професійної компетентності вчителя математики.

Список використаної літератури

1. Горошко Ю. В. Система інформаційного моделювання у підготовці майбутніх учителів математики та інформатики [текст] : дис. ... докт. пед. наук : 13.00.02 / Ю. В. Горошко. – Чернігів, ЧНПУ імені Т. Г. Шевченка, 2013. – 470 с.
2. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером : посібн. для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – 2-ге вид. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. – 282 с.
3. Костюченко А. О. Комп'ютерно орієнтована методична система підготовки майбутніх учителів математики та інформатики до розроблення педагогічних програмних засобів [текст]: дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / А. О. Костюченко. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014. – 283 с.
4. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу в навчанні з використанням інформаційних технологій [текст]: дис. … д-ра. пед. наук: 13.00.02 / С. А. Раков. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. – 381 с.

Одержано редакцією 30.01.2015 р.
Прийнято до публікації 08.02.2015 р.

Аннотация. **Грамбовская Л. В. Создание задач с параметрами на основе исследования функциональных зависимостей в треугольнике**. *В статье освещена методика создания задач с параметрами на основе исследования функциональных зависимостей в произвольном треугольнике в среде ППС, решение которой требует оригинального подхода. Задача сформулирована на основе введения к рассмотрению функций одной переменной, содержащихх два параметра. В процессе работы вместе с учениками создана новая по содержанию алгебраическая задача с параметрами.*

Ключевые слова: *создание заданий с параметрами, компьютерный эксперимент.*

Summary. Grambovskaya L. Creating tasks with parameters based on a study of functional relationships in the triangle. *The article outlined method of creating problems with the parameters on the basis of conducted with students in a dynamic research environment middleware dependencies between elements such arbitrary triangle, a square, circle described by the radius and the third side of the triangle if we know its two other sides and angle between them. The problem is formulated based on input to the consideration of functions of one variable, containing two options. While working with students, a new content algebraic problem with parameters. Without an experiment in a dynamic environment equate think of numeric values of the area and linear dimensions of the triangle is difficult, because the formula used quite bulky, contain at least three different sizes (letter), equate random and resolve «in the forehead» equations containing two options difficult. For graphical representation of the considered dependencies dynamics used free software GRAN1, the use of which allowed the hypothesis regarding the relationships between the elements of an arbitrary triangle. In the process, the author formulated a geometric problem of increased complexity, which requires an original approach to the solution. In further studies could consider other problem of this type.*

Keywords: *create jobs with parameters, computer experiment.*