

УДК 536.21

М.Г. Олененко, аспирант

И.Г. Величко, канд. физ.-мат. наук

Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье, Украина

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В МНОГОСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ

Показано решение двумерной задачи о стационарном распределении тепла в теле, состоящем из произвольного конечного числа анизотропных спаянных параллельных полос. В каждом слое одна из осей анизотропии параллельна границам полос, а вторая перпендикулярна. На верхней и нижней границах тела задана температура. На границе контакта двух слоев происходит идеальный тепловой контакт. Решение получено в виде интегралов Фурье. Приведены примеры расчета, показывающие влияние коэффициентов анизотропии и граничных условий на распределение температуры в двухслойной пластине.

Ключевые слова: многослойная анизотропная пластина, температура, поток, преобразование Фурье.

Показано розв'язок двовимірної задачі про стаціонарний розподіл тепла в тілі, що складається з довільного скінченного числа анизотропних спаяних паралельних смуг. У кожному шарі одна із осей анизотропії паралельна границям смуг, а друга перпендикулярна. На верхній та нижній границях тіла задано температуру. На границі контакту двох шарів відбувається ідеальний тепловий контакт. Розв'язок отримано у вигляді інтегралів Фур'є. Наведено приклади розрахунку, що демонструють вплив коефіцієнтів анизотропії та граничних умов на розподіл температури у двошаровій пластині.

Ключові слова: багатощарова анизотропна пластина, температура, потік, перетворення Фур'є.

A two-dimensional problem of the stationary distribution of heat in a body, which consists of random number of welded anisotropic parallel stripes, is solved in the article. In each layer one of the anisotropic axis is parallel to the border of the plates, another is perpendicular. There is a given temperature on the top and bottom borders of the body. At the border of a touch of two layers there is an ideal thermal contact. The solution has been got in the form of Fourier's integral. An example of calculation for the double-layer plate is given. These examples are demonstrate the influence of anisotropic coefficients and border conditions to the distribution of heat in double-layer plate.

Key words: multilayer anisotropic plate, temperature, stream, Fourier's transformation.

Постановка проблемы. В инженерной практике часто используются элементы конструкций, состоящих их разнородных материалов. Использование слоистых конструкций позволяет существенно улучшить эксплуатационные качества объектов. Если некоторый узел попадает под действие интенсивных тепловых полей, то исследование температуры в его элементах является необходимым условием расчета на прочность всей конструкции. Существующие аналитические методы ориентированы в основном на расчет изотропных материалов. Поскольку на практике используются и анизотропные материалы, то разработка способов расчета тепловых полей в многослойных анизотропных средах является актуальной.

Анализ последних исследований и публикаций. Задачам, касающимся однородных изотропных тел, посвящены классические монографии таких авторов, как: В.З. Партон, П.И. Перлин, А.Д. Коваленко, В. Новацкий [1-3]. Для многослойных тел основные трудности связаны с удовлетворением условий сопряжения слоев. Исследованию существенно многослойных изотропных сред посвящены работы [4; 5]. В известных авторах работах для исследования задач теплопроводности многослойных анизотропных сред применялись асимптотические методы [6; 7] и метод конечных элементов [7; 8].

Выделение не решенных ранее частей общей проблемы. Для расчета стационарных температурных полей в слоистых анизотропных средах применяются либо численные, либо асимптотические методы. Вопрос о построении аналитических выражений для температуры в существенно многослойных анизотропных телах остается открытым.

Цели статьи. Предложить аналитическое (в виде интегралов Фурье) решение задачи о стационарном распределении тепла в многослойной анизотропной пластине.

Изложение основного материала. Рассмотрим анизотропную пластину, состоящую из n бесконечных параллельных полос, материал каждой из которых является анизотропным, причем одна из осей анизотропии параллельна границам полос, а вторая перпендикулярна. Полосы будем нумеровать сверху вниз, начиная с единицы. На границе контакта двух слоев происходит идеальный тепловой контакт, т. е. выполняется

равенство температур и равенство потоков. В каждом слое введем локальную прямоугольную декартову систему координат, как показано на рис. 1.

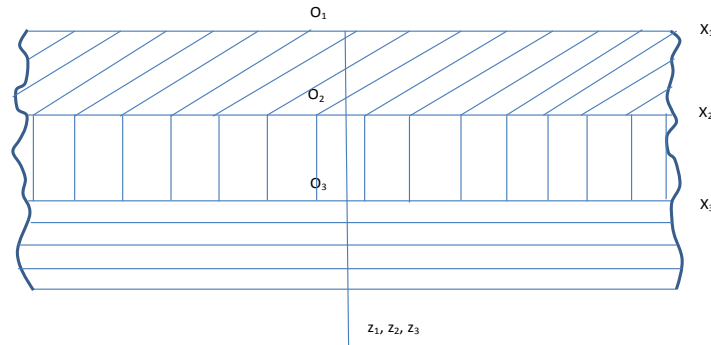


Рис. 1. Трехслойная пластина

Каждая полоса с номером i характеризуется высотой h_i , коэффициентами теплопроводности K_{ix} , K_{iz} и коэффициентами температуропроводности λ_{ix} , λ_{iz} , которые связаны между собой соотношениями [2]: $\lambda_{im} = -\frac{K_{im}}{c_p \rho}$, $m = x, z$, где c_p – изобарная удельная теплоемкость. На верхней и нижней границах задана температура. Требуется определить температуру в произвольной точке пластины.

Распределение температур в i -той полосе будем описывать функцией $T_i(x, z)$. Математическое решение задачи сводится к решению системы уравнений:

$$\lambda_{ix} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \lambda_{iz} \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = 0, \quad i = \overline{1, n} \tag{1}$$

при следующих условиях сопряжения:

$$T_i(x, h_i) = T_{i+1}(x, 0), \tag{2.1}$$

$$K_{iz} \frac{\partial T_i}{\partial z}(x, h_i) = K_{(i+1)z} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z}(x, 0), \quad i = 1, \dots, n-1. \tag{2.2}$$

Граничные условия задачи:

$$T_1(x, 0) = f(x), \quad T_n(x, h_n) = f_{n+1}(x),$$

где $f(x)$ и $f_{n+1}(x)$ – заданные функции. Для каждой полосы обозначим через η_i функцию, которая является трансформантой температуры на верхней границе i -того слоя. В силу того, что на общей границе температуры совпадают, получим, что:

$$\eta_i(\zeta) = \bar{T}_i(\zeta, 0); \tag{3}$$

$$\bar{T}_i(\zeta, h_i) = \eta_{i+1}(\zeta). \tag{4}$$

Задача решается с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной x . Предполагается, что все функции, входящие в уравнения, удовлетворяют условиям существования преобразования [9]. В пространстве трансформант уравнение (1) принимает вид:

$$-\tau_i^2 p^2 \bar{T}_i(\zeta, z) + \bar{T}_i''(\zeta, z) = 0, \tag{5}$$

где штрих означает дифференцирование по переменной z , а $p = |\zeta|$, ζ – параметр интегрального преобразования, $\tau_i^2 = \frac{\lambda_{ix}}{\lambda_{iz}} = \frac{K_{ix}}{c_p \rho} : \frac{K_{iz}}{c_p \rho} = \frac{K_{ix}}{K_{iz}}$, $\tau_i > 0$.

Введем фиктивный слой с номером $n+1$, тогда

$$\bar{f}_{n+1}(\zeta) = \bar{T}_n(\zeta, h_n) = \bar{T}_{n+1}(\zeta, 0) = \eta_{n+1}. \tag{6}$$

Общее решение в i -том слое ($i = \overline{1, n}$) можно записать в виде:

$$\bar{T}_i(\zeta, h_i) = \frac{1}{S_i} [\eta_i sh\tau_i p(h_i - z) + \eta_{i+1} sh\tau_i pz]. \quad (7)$$

Здесь и далее $S_i = sh(\varphi h_i)$, $C_i = ch(\varphi h_i)$. Из условия равенства потоков (2.2) выразим η_{i+1} через η_i и η_{i+2} :

$$\eta_{i+1} = \frac{\eta_{i+2} - \frac{K_{iz}\tau_i S_{i+1}}{S_i K_{(i+1)z}\tau_{i+1}} \eta_i}{\frac{K_{iz}\tau_i S_{i+1}}{S_i K_{(i+1)z}\tau_{i+1}} C_i + C_{i+1}} = \frac{\eta_{i+2} S_i K_{(i+1)z}\tau_{i+1} - \eta_i K_{iz}\tau_i S_{i+1}}{K_{iz}\tau_i S_{i+1} C_i + S_i K_{(i+1)z}\tau_{i+1} C_{i+1}}. \quad (8)$$

Записав эти соотношения для $i = \overline{2, n}$ с учетом того, что величины η_1 и η_{n+1} известны из граничных условий, получим линейную алгебраическую систему относительно η_i . После решения полученной системы восстанавливаем по формуле (7) трансформанты температуры в требуемом слое. Выполняя обратное преобразование Фурье методом Файлона, получаем решение поставленной задачи.

Рассмотрим пластину, состоящую из двух слоев, высота каждого из которых будет составлять $2a$, где a – характерный линейный параметр. Обозначив через K характерный коэффициент теплопроводности, построим графики распределения температур в первом и втором слоях при следующих коэффициентах теплопроводности слоев (табл.).

Таблица

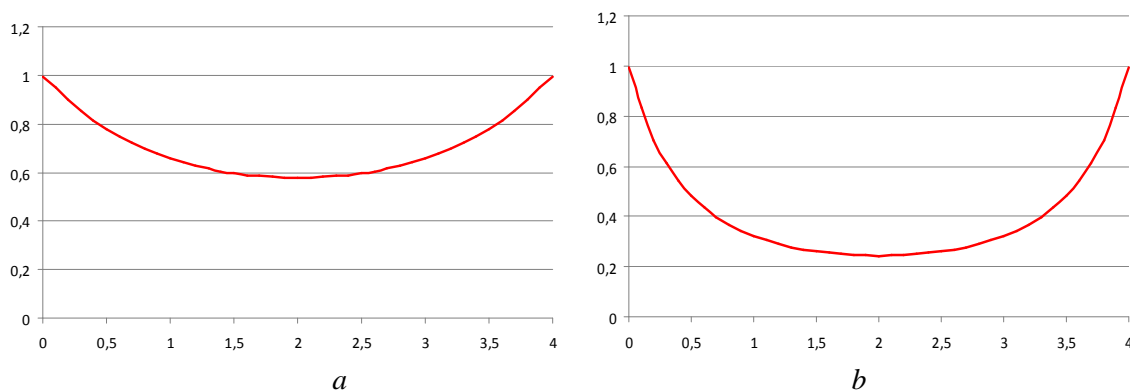
Коэффициенты теплопроводности для двухслойной пластины

	K_{1x}	K_{1z}	K_{2x}	K_{2z}
a	K	$3K$	K	$3K$
b	$3K$	K	$3K$	K
c	K	$3K$	$3K$	K
d	$3K$	K	K	$3K$

В том случае, когда температура на верхней и нижней границах описывается формулой:

$$f_1(x) = f_3(x) = T_0 e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

получим следующее распределение температур в слоях по глубине в сечении $x = 0$ (рис. 2). По оси абсцисс откладывается величина $\frac{T}{T_0}$.



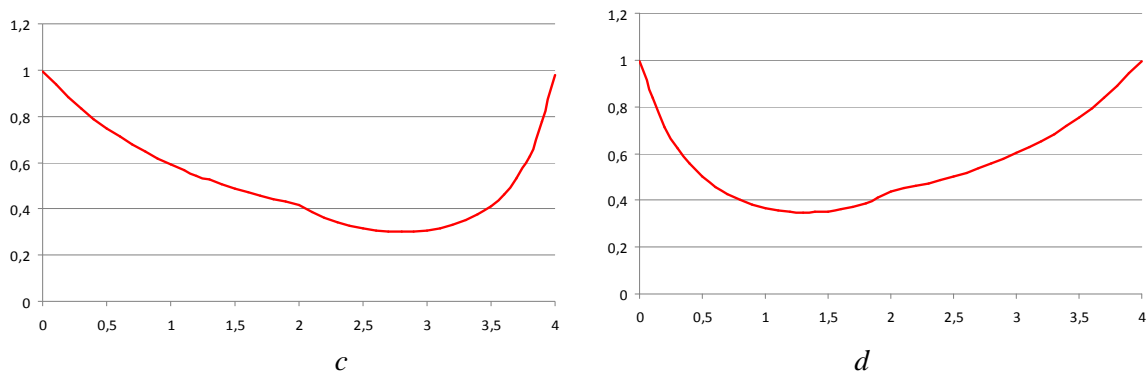


Рис. 2. Распределение температуры по глубине пластины в сечении $x = 0$

Заметим, что в случае, когда пластина не однородна (случаи c , d), графики не симметричны и имеют точки излома на границе слоев.

Рассмотрим ту же задачу, но при условии, что температура на нижней границе будет задаваться формулой:

$$f_3(x) = T_0 e^{-\frac{2x^2}{a^2}}.$$

Полученные рисунки (рис. 3, 4) соответствуют тем же значениям параметров, что и выше.

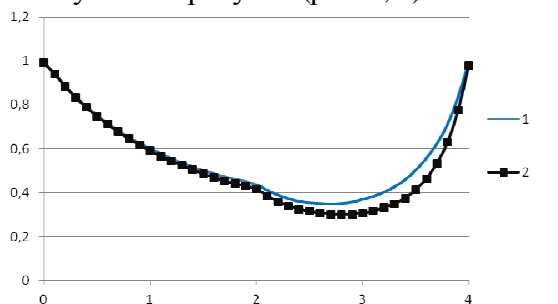


Рис. 3. Распределение температуры по глубине в двухслойной анизотропной пластине в сечении $x = 0$ при разных граничных условиях (случай c):
1 – условия на границах совпадают,
2 – условия на границах различны

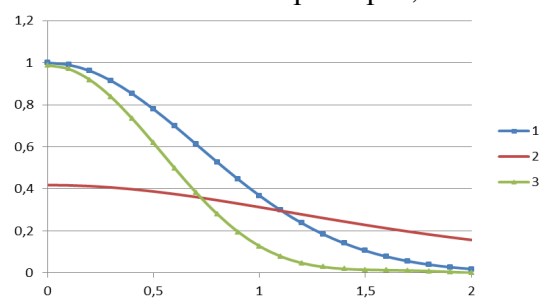


Рис. 4. Распределение температуры в двухслойной анизотропной пластине на границах слоев:
1 – температура на верхней границе,
2 – температура в середине слоя,
3 – температура на нижней границе

Полученные результаты позволяют провести анализ влияния коэффициентов анизотропии на распределение температуры в теле, что планируется сделать в следующих публикациях.

Выводы и предложения. В данной статье была рассмотрена двумерная задача о стационарном распределении тепла в анизотропной пластине, состоящей из произвольного конечного числа спаянных неограниченных, т. е. параллельных полос. Для вычисления температуры в каждом из слоев пластины получены общие формулы в виде интегралов Фурье. Приведены примеры расчета, показывающие влияние изменения коэффициентов анизотропии и граничных условий на распределение температуры в двухслойной пластине. При исследовании системы из n слоев задача сводится к решению $n - 1$ линейных уравнений. Эффективность предложенного метода можно повысить, если применить аналог метода функций податливости [4], который позволит вместо решения системы линейных уравнений для определения вспомогательных функций пользоваться рекуррентными соотношениями. В перспективе планируется провести детальный анализ зависимости тепловых полей от геометрических и физических характеристик слоев пластины.

Список использованных источников

1. *Партон В. З.* Методы математической теории упругости / В. Партон, П. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.
2. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – К. : Наукова думка, 1970. – 309 с.
3. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1970. – 256 с.
4. *Величко И. Г.* Стационарная задача о распределении температуры в многофазной пластинке / И. Г. Величко, И. Г. Ткаченко // Вісник ЗДУ. Фізико-математичні науки. Біологічні науки. – 2004. – № 1. – С. 16-20.
5. *Новые* направления получения аналитических решений краевых задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций [Электронный ресурс] / В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, А. Б. Ремезенцев и др. – Режим доступа : <http://relay.itmo.by/jepfer/MIF4/volume3/230.PDF>.
6. *Агаловян Л. А.* Смешанные краевые задачи теории упругости слоистых тонких тел переменной толщины, состоящих из анизотропных неоднородных материалов / Л. А. Агаловян // ПММ. – 2009. – Т. 73. Вып. 5. – С. 849-857.
7. *Немировский Ю. В.* Асимптотический анализ решения задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин при граничных условиях второго рода на лицевых поверхностях / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 2. – С.160-175.
8. *Куликов Г. М.* Исследование стационарной теплопроводности в телах вращения из слоистых композитов / Г. М. Куликов, И. Е. Карева // Вестник ТГТУ. – 2002. –Т. 8, № 1. – С. 31-40.
9. *Снеддон И.* Преобразование Фурье / И. Снеддон. – М. : Издательство иностранной литературы, 1955. – 668 с.