

УДК 330:51

**Ю.В. Коляда**, канд. техн. наук

Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана, м. Київ, Україна

**В.О. Тукало**, стипендіст

Ягеллонський університет, м. Краків, Польща

**ВЗАЄМОДІЯ ІНСТИТУЦІОНАЛЬНИХ СКЛАДОВИХ ЕКОНОМІКИ  
НА ПІДГРУНТІ ЯКІСНОГО АНАЛІЗУ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ****Ю.В. Коляда**, канд. техн. наук

Киевский национальный экономический университет им. В. Гетьмана, г. Киев, Украина

**В.А. Тукало**, стипендіст

Ягеллонский университет, г. Краков, Польша

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИНСТИТУЦИОНАЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ  
ЭКОНОМИКИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ****Y.V. Kolyada**, Candidate of Economic Sciences

V. Hetman Kyiv National Economic University, Kyiv, Ukraine

**V.O. Tukalo**, scholar

Jagellonian University, Krakow, Poland

**INTERACTION OF INSTITUTIONAL COMPONENTS OF ECONOMY ON THE  
BASIS OF QUALITATIVE ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS**

*Грунтуючись на множині площинних моделей типу Вайдліха, взаємодія і взаємовплив інституціональних складових економіки досліджується математичними засобами якісного аналізу. Графічним результатом якісного моделювання надається предметне тлумачення.*

*У цій праці модель Вайдліха застосовується до вивчення питання взаємодії інституціональних підсистем економіки (змінні у та x). При цьому здійснюється якісний аналіз нелінійної системи рівнянь, а результатам надається вербальне тлумачення.*

**Ключові слова:** модель Вайдліха, якісний аналіз, особливі точки, матриця Якобі, формули Крамера, математична модель, нелінійні процеси, економіка.

*Основываясь на множестве плоскостных моделей типа Вайдлиха, взаимодействие и взаимовлияние институциональных составляющих экономики исследуется математическими средствами анализа. Графическим результатом качественного моделирования предоставляется предметное толкование. В данной работе модель Вайдлиха применяется к изучению вопроса взаимодействия институциональных подсистем экономики (переменные у и x). При этом осуществляется качественный анализ нелинейной системы уравнений, а результатам предоставляется вербальное толкование.*

**Ключевые слова:** модель Вайдлиха, качественный анализ, особые точки, матрица Якоби, формулы Крамера, математическая модель, нелинейные процессы, экономика.

*Based on a set of planar models of Weidlich type, the interaction and mutual influence of institutional economics are examined by the components of mathematical means of qualitative analysis. Substantive interpretation is provided with the help of graphic results of quality modeling. In this paper Weidlich model is applied to the study of the interaction of institutional subsystems of economics (variables y and x). Together with this, qualitative analysis of nonlinear systems of equations is performed, and verbal interpretation is given to the results.*

**Key words:** Weidlich model, qualitative analysis, singular points, Jacobi matrix, Cramer's formulas, mathematical model, nonlinear processes, economy.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** У літературі відомі [4; 5] спроби застосування ортодоксальної моделі [7] Вайдліха до вивчення закономірностей соціальних процесів. Між іншим, автором [7] моделі стверджується, що перебіг перетворень в СРСР був передбачений за допомогою площинної, тобто системи двох диференціальних рівнянь, динамічної моделі, хоча і нелінійної. Варто зазначити, що структура моделі була жорсткою, незмінюваною.

Впровадження згаданих математичних моделей у моделювання економічної динаміки, але з широкою альтернативою так званих функцій впливу, тобто структура моделі апіорі передбачається гнучкою, вперше розглядається у працях [1; 3].

Розглядаючи зазначене вище, як взаємозамінне, доповнююче об'єднання, маємо галузь наукового знання – адаптивну соціоекономічну динаміку, вплив якої на успішне державотворення, або прийняття своєчасних виважених управлінських рішень в еконо-

міці незаперечний і дуже важливий, бо саме знання адаптивної економічної динаміки забезпечує раціональне і релевантне набуття важливих якостей із множини можливих.

**Постановка проблеми.** На відміну від синергетичного підходу, що спостерігається в економіко-математичному моделюванні, описати соціоекономічну динаміку, використовуючи узагальнену модель типу Вайдліха, але гнучкої структури, щоб охопити практично важливі аспекти життя таким чином, проголошуючи методологію адаптивного моделювання економіки.

**Мета дослідження** полягає у проведенні якісного аналізу моделі В. Вайдліха, яка описує антагоністичні процеси, які можуть мати місце серед інституціональних підсистем економіки. У такий спосіб відбувається адаптивне якісне моделювання, яке має передувати кількісному вивченню поведінки чинників економіки, прогнозуючи їх числові значення.

**Вступ.** В економічній теорії мають місце дослідження, наприклад [6], які вербально засвідчують складний характер нелінійної взаємодії інституціональних складових економіки з іншими її підсистемами. Наводяться [6] інтуїтивного походження графіки взаємозалежностей між власністю, владою, управлінням і працею.

Для прийняття адекватних управлінських рішень в економіці інтуїтивного уявлення замало, потрібне якомога повне знання еволюції економічної системи, яка детермінована як складна, нелінійна і темпорально динамічна. Адже хитросплетіння зазначених рис економіки (не механічне їх об'єднання) спричинюють широке поле можливостей економічного розвитку. Більше того, реально завжди реалізується один з багатьох шляхів, альтернатива якого має бути достатньо вмотивованою, з ясними наслідками такого вибору.

У моделюванні нелінійних економічних систем знайшли своє широке розповсюдження лише декілька моделей, що здатні адекватно відображати процеси, які відбуваються в економіці. Однією з таких моделей є модель Вайдліха, застосовувана в широкому спектрі проблем, як економічного, так і політичного характеру. Виходячи із засад, можливості цієї моделі, на думку авторів, не є досягнутими до кінця.

В економічній теорії мають місце дослідження, які прямо вказують на нелінійність характеру взаємодії інституціональних підсистем економіки. Так, у своїй монографії [1] професор Якубенко з КНЕУ ім. В. Гетьмана наводить приклади взаємозалежностей між власністю, владою, управлінням та працею. Причому окремо як ілюстративний матеріал наводяться графіки взаємозалежностей (які за своєю суттю є фазовими портретами), що недвозначно показують нелінійний характер описуваних процесів.

Таким чином, головним повідомленням цієї статті має бути ідея про можливість розширення сфери вживання моделі Вайдліха також і для опису процесів більш глибокого характеру, а саме підвалин економічної системи – інституціональних складових економіки.

**Математична модель (ММ) антагоністичних процесів.** У літературі [4; 6, с. 84-89] для вивчення динаміки соціальних процесів запропоновано систему нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a(y) * s - x) \\ \frac{dy}{dt} = y(b(x) * s - y) \end{cases} \quad (1)$$

Модель Вайдліха, де  $x(t)$  і  $y(t)$  – макрозмінні досліджуваних процесів, а  $a(y)$  і  $b(x)$  – так звані функції взаємовпливу складових явища.

Припущення щодо ступінчатого характеру функцій  $a(y)$  і  $b(x)$ , тобто в точці  $x=s$  вони міняються стрибкоподібно, дозволило записати [4; 5; 7] аналітичні розв'язки (типу логістичного) для кожної із змінних.

Використовуючи їх, було встановлено чотири варіанти взаємовпливу змінних (окремо взятого антагоністичного, кооперативного чи комбінованого характеру). Також наводяться якісні характеристики поведінки розв’язків моделі Вайдліха.

**Якісний аналіз математичної моделі досліджуваної проблеми.** Припускається, що функції взаємовпливу лінійні, тобто  $a(y)=a_0+a_1y$  і  $b(x)=b_0+b_1x$ . Темп змінюваності діючої на виробництві технології визначається трьома доданками відповідно: стартовими умовами  $s_a$ , інноваційною складовою  $s_a$  у технології виробництва, що цілком відображає економічне буття; дещо гальмується прогрес змін у структурі економічних інститутів внутрішньою боротьбою ( $-x^2$ ) його здійснення. Аналогічно тлумачиться темп  $(y/y)$  змінюваності суспільного укладу, який є прямим і явним відображенням глибинних аналізованих зрушень. Між іншим, обмежуючись  $a(y)=a_0$  і  $b(x)=b_0$  сталими величинами, матимемо відомий у літературі випадок.

Таким чином, по суті, спостерігаються зрушення в залежностях власності, влади, управління та праці, наслідком чого виступають, для прикладу, ототожнення понять управління і влади, або розбіжності в їх тлумаченнях, залежно від вектора руху і прогресивності в розвитку економічних систем.

Стаціонарні (особливі або рівноважні) точки ММ (2) знаходяться з умови  $x=0$  і  $y=0$ .

Окрім першої  $O_1(0,0)$  тривіальної точки та інших, майже очевидних  $O_2(0;sb_0)$  і  $O_3(sa_0;0)$  особливих точок (перевіряється безпосередньо) існує ще одна, координати якої являють собою розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$x-sa_1y=sa_0 \rightarrow \text{пряма } L_1$$

$$-sb_1x+y=sb_0 \rightarrow \text{пряма } L_2$$

Застосовуючи формули Крамера до СЛАР ( $\Delta=1-s^2b_1a_1$ ;  $\Delta x=sa_0+s^2b_0a_1$ ;  $\Delta y=sb_0+s^2a_0b_1$ ), отримуємо координати четвертої рівноважної точки  $(\frac{sa_0+s^2b_0a_1}{1-s^2a_1b_1}; \frac{sb_0+s^2a_0b_1}{1-s^2a_1b_1})$ , які мають бути додатними.

Геометрично розв’язок СЛАР зображено на рис. 1.

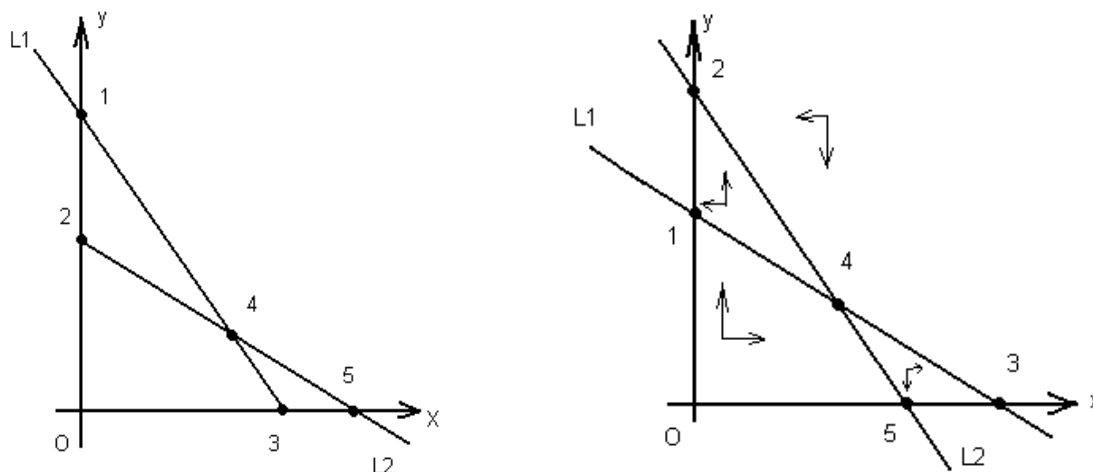


Рис 1. Розташування особливих точок  $O_1-O_4$

Точка 1:  $(0;0)$ ,

Точка 2:  $(0;sb_0)$ ,

Точка 3:  $(sa_0;0)$ ,

Точка 4:  $(\frac{sa_0+s^2b_0a_1}{1-s^2a_1b_1}; \frac{sb_0+s^2a_0b_1}{1-s^2a_1b_1})$ .

Символ  $\begin{matrix} \uparrow \\ \rightarrow \end{matrix}$  свідчить про  $x>0$  і  $y>0$ ;  $\begin{matrix} \downarrow \\ \rightarrow \end{matrix}$  – про  $x>0$  і  $y<0$  і т. д.

Із змісту предмета дослідження випливає, що коефіцієнти  $a_0$  і  $b_0$  є від'ємні.

Щоб скористатися методом дослідження стійкості за лінійним наближенням (теорема лінеаризації стверджує, що в околі простої стаціонарної точки фазові портрети нелінійної системи і її лінеаризовані якісно еквівалентні за виключенням точки центр), потрібно записати матрицю Якобі:

$$J = \begin{pmatrix} sa_0 + sa_1y - 2x & : & sa_1x \\ sb_1y & : & sb_0 + sb_1x - 2y \end{pmatrix},$$

яка обчислюється в рівноважних точках. Наприклад –  $J_1(0;0) = \begin{pmatrix} sa_0 & : & 0 \\ 0 & : & sb_0 \end{pmatrix}$ . Слід

матриці Якобі  $Spj_1 = s(a_0 + b_0)$ ; визначник  $detj_1 = s^2 b_0 a_0$ .

Характер залежності фазових портретів на площині  $Spj_1 O detj_1$  подано на рис. 2.

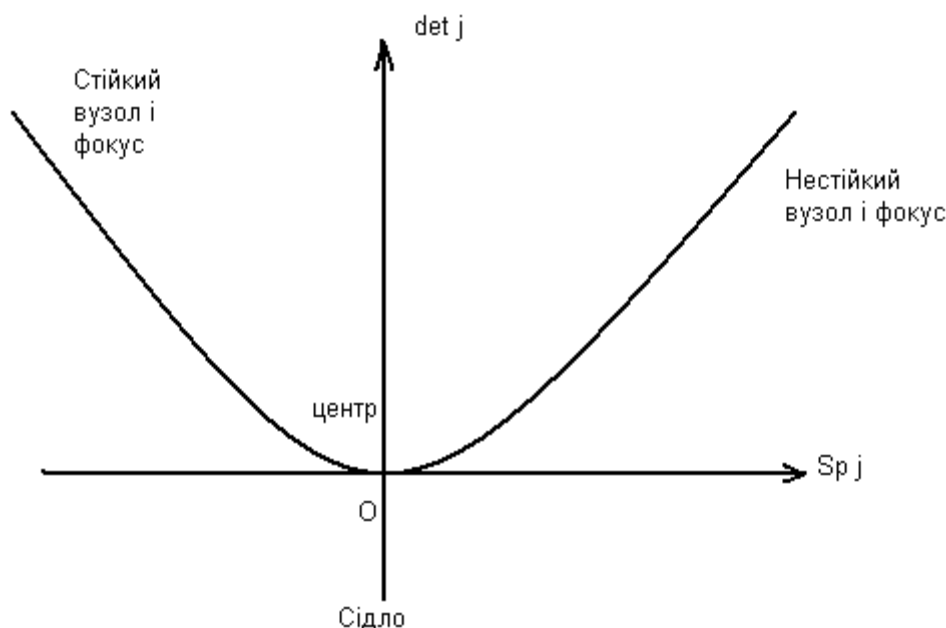


Рис. 2. Розташування фазових портретів у координатах «слід  $Spj$ -визначник  $det J$ » матриці лінеаризації

Кожній точці зазначеної площини відповідає пара власних значень матриці лінеаризації, які є корені рівняння  $\lambda^2 - Spj \cdot \lambda + detj = 0$ .

Отже, початок координат  $O_1(0;0)$  може бути нестійкою точкою – вузол або фокус, бо величина  $Spj_1$  і  $detj_1$  завжди додатні. Траєкторії виходять з особливої точки.

Для особливої точки  $O_2(0;Sb_0)$  має місце таке:

$$J_2(0;sb_0) = \begin{pmatrix} sa_0 + sa_1sb_0 & : & 0 \\ s^2b_1b_0 & : & sb_0 \end{pmatrix}.$$

Приймаючи до уваги знаки коефіцієнтів  $a_0, a_1, b_0, b_1$ , виконуються нерівності

$$Spj_2 = sa_0 + s^2b_0b_1 - sb_0 \equiv sa_0 + sb_0(sb_1 - 1) < 0;$$

$$Detj_2 = -sb_0(sa_0 + s^2b_0b_1) > 0.$$

Таким чином стаціонарна точка кваліфікується як стійкий фокус чи вузол.

У випадку рівноважної точки  $O_3(sa_0;0)$  послідовно маємо:

$$J_3 = \begin{pmatrix} -sa_0 & : & s^2a_1a_0 \\ 0 & : & sb_0 + s^2b_1a_0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Sp} \hat{j}_3 = sb_0 + sa_0(sb_1 - 1) < 0,$$

$$\text{det} \hat{j}_3 = -sa_0(sb_0 + s^2 a_0 b_1) > 0.$$

Також спостерігається стійкий вузол або фокус.

**Зауваження.** Стійкість особливих точок  $O_2(0; Sb_0)$  і  $O_3(Sa_0; 0)$  свідчить, що траєкторії сценарію збігаються до них. Нульова координата кожної з точок вказує, що для однієї із змінних розвиток подій завершується.

Для четвертої особливої точки обчислення дають:

$$J_4 = \begin{pmatrix} \frac{-sa_0 - s^2 b_0 a_1}{1 - s^2 b_1 a_1} & \frac{s^2 a_0 a_1 + s^2 a_0 a_1 b_0}{1 - s^2 b_1 a_1} \\ \frac{s^2 b_0 b_1 + s^2 b_1^2 a_0}{1 - s^2 b_1 a_1} & \frac{-sb_0 - s^2 a_0 b_1}{1 - s^2 b_1 a_1} \end{pmatrix},$$

$$\text{Sp} j_4 = (s^2 a_1 b_0 + sa_0 + sb_0 + s^2 a_0 b_1) / (-1 + s^2 b_1 a_1) > 0;$$

$\text{det} j_4 < 0$  після очевидних, але громіздких викладок. Отже, ця точка є сідло, графічне зображення якої наводяться на рис. 3. Взаємини складових інституціональної підсистеми економіки можуть бути показані способом, зображеним на рис. 4.

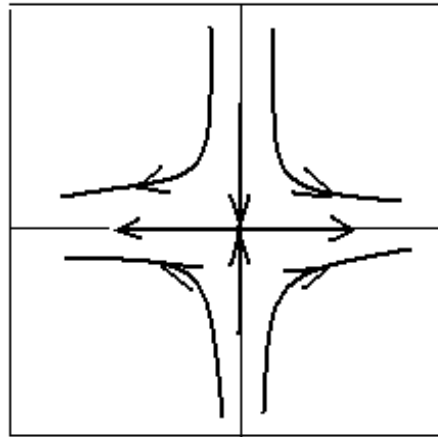


Рис. 3. Сідло

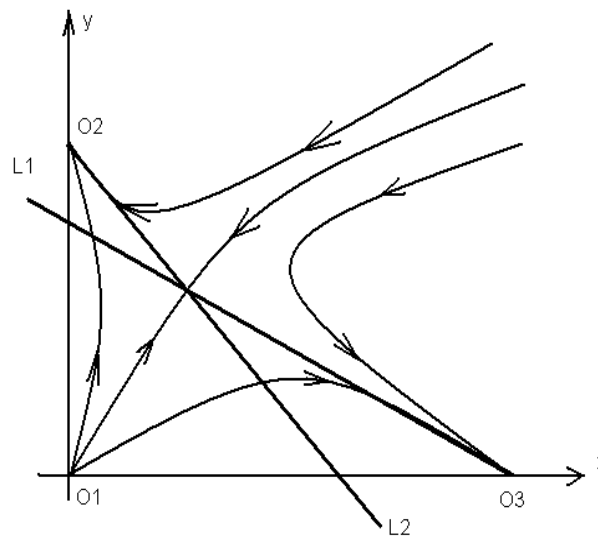


Рис. 4. Фазовий портрет

**Висновки.** У репрезентованій до розгляду праці наведені результати якісного аналізу нелінійної системи рівнянь, показані взаємозалежності між фазовими портретами, подані особливі точки, а також наведено їх розташування в системі координат, визначено, що перша особлива точка, як і друга, можуть являти собою вузол, або фокус, але

перша, відповідно – нестійкий, а друга, як і третя – стійкий. Натомість четверта особлива точка представлена сідлом.

Переважаання елементів стійкості серед якісних характеристик системи дає право стверджувати про наявність міцних зв'язків між елементами суспільного устрою, зокрема його економічної складової. Певні застереження несе в собі присутність нестійкого вузла чи фокуса, але цей аспект потребує подальших досліджень.

#### Список використаних джерел

1. Вітлінський В. В. Підготовка економіста як майбутнього дослідника / В. В. Вітлінський, Ю. В. Коляда, В. О. Тукало // Наукова складова навчального процесу та інноваційні технології його розвитку : збірник матеріалів науково-методичної конференції (12 квітня 2011 р.). – Луганськ–Євпаторія, 2010. – С. 573-574.
2. Коляда Ю. В. Адаптивна парадигма моделювання економічної динаміки : монографія / Ю. В. Коляда. – К. : КНЕУ, 2011. – 297 с.
3. Коляда Ю. В. Екзогенна адаптація узагальнень моделі Вайдліха / Ю. В. Коляда, В. О. Тукало // Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці : матеріали II Міжнародної наук.-метод. конф. (4-6 травня 2011 р.). – Чернівці : Друк Арт, 2011. – С. 140-141.
4. Плотинский Ю. М. Математическое моделирование динамики социальных процессов / Ю. М. Плотинский. – М. : Изд-во МГУ, 1992. – 133 с.
5. Плуготаренко С. А. К моделированию динамики политического взаимодействия двух сил с учетом информационного характера [Электронный ресурс] / С. А. Плуготаренко. – Режим доступа : [http://ffke-campus-gh.mipt.ru/~serge/newest\\_hp/about\\_me/study/works/articles/infor](http://ffke-campus-gh.mipt.ru/~serge/newest_hp/about_me/study/works/articles/infor).
6. Якубенко В. Д. Базисні інститути у трансформаційній економіці / В. Д. Якубенко. – К. : КНЕУ, 2004. – 251 с.
7. Weidlich W. Stability and Cyclicity in Social Systems // Behavioral Sciences. – 1988. – Vol. 33. – P. 241-256.