

УДК 622.831; 622.02.001.57:539.373

С.В. МАСЛО (ассистент)

Донецкий национальный технический университет, г. Донецк

С.Н. ГАПЕЕВ (канд. техн. наук, доц.)

Национальный горный университет, г. Днепропетровск

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ПОЛНОЙ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ЧИСЛЕННЫХ ЗАДАЧ ГЕОМЕХАНИКИ

В статье предлагается методика вычисления деформаций горных пород в запредельной зоне разрушений, проведен корреляционно-регрессионный анализ и установлена аналитическая связь между изменением величин напряжений и деформаций, получена теоретическая функциональная зависимости между этими значениями.

Ключевые слова: зоны неупругих деформаций, разупрочнение породного массива, закон связи напряжений и деформаций, корреляционно-регрессионный анализ, метод конечных элементов.

Введение. Добыча угля и проведение выработок с каждым годом осуществляется во все более сложных горно-геологических условиях. Средняя глубина разработки приближается к 700 м. Две трети шахт ведут разработку на глубоких (свыше 600 м) горизонтах [1].

Вокруг таких выработок появляются зоны неупругих деформаций. За пределами прочности особенно большое значение имеют закономерности деформирования горных пород, связанные с разупрочнением (снижением сопротивляемости) и с разрыхлением (необратимым увеличением объема). Именно такие закономерности в значительной мере определяют характер напряженно-деформированного состояния массива пород вокруг выработок.

Состояние вопроса. Для полного анализа напряженно-деформированного состояния нагружаемых областей необходимо иметь определенный закон связи напряжений и деформаций (закон состояния).

Из-за сложной структуры породной среды, различных нарушений сплошности и неоднородности породного массива его напряженно-деформированное состояние не может быть определено с высокой степенью надежности. При моделировании предполагается выделять наиболее важные особенности физического процесса, а расчет основных параметров процессов выполнять с точностью, удовлетворяющей практической задаче. При решении таких задач важное значение имеют экспериментальные исследования. Именно натурные данные являются исходным материалом для работы инженеров, исследователей-геомехаников. Формирование массивов входных данных для решаемой задачи непосредственно является сложной задачей.

В последние годы происходит бурное развитие компьютерной техники, появляются пакеты программ для решения прикладных задач, что позволяет модельное экспериментальное исследование проводить, не используя дорогостоящие натурные исследования. Таким образом, актуальным являются исследования в области компьютерного моделирования процессов геомеханики с учетом специфики решаемых задач, а также нахождения новых подходов к решению упруго-пластических задач геомеханики с учетом поведения среды за пределом упругости.

Применяемые расчетные модели должны, с одной стороны, отражать наиболее важные особенности механического поведения объекта, а с другой стороны, они

должны быть достаточно простыми, чтобы их можно было использовать без чрезмерных затрат времени и средств.

Целью настоящей статьи является решение задачи определения связи напряжений и деформаций горной породы, деформирующейся за пределом прочности, установление аналитической связи между изменением величин напряжения и деформаций, получение функциональной зависимости между этими значениями.

Изложение основного материала. В упругой области напряжения и деформации связаны известными соотношениями Гука. Поэтому до некоторых величин напряжений σ и деформаций ε , определяющих предел упругости, между ними существует линейная связь. Модуль упругости в этой зоне остается постоянным.

В зоне необратимых деформаций в породах происходит раскрытие микро- и макротрещин, поэтому деформирование пород характеризуется нелинейной связью между σ и ε (Рис. 1).

В известной мере можно говорить о пропорциональности между приращениями напряжений и деформаций [2]. Однако решение задач геомеханики в перемещениях с использованием таких зависимостей сталкивается со значительными математическими трудностями.

Гораздо проще ввести в рассмотрение некоторую эмпирическую зависимость между напряжениями и деформациями, которая обеспечивала бы достаточную точность решения [3].

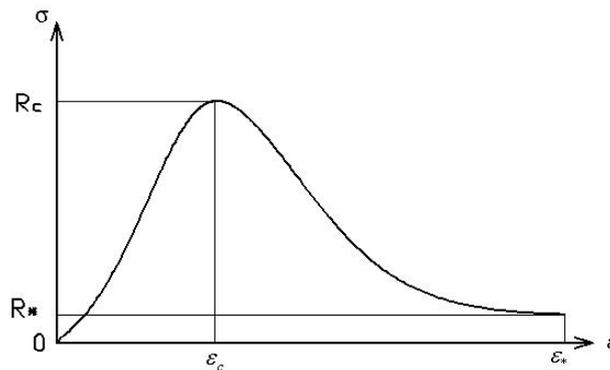


Рис. 1. Характерная диаграмма деформирования горных пород

При обосновании параметров расчетных моделей использовались непосредственные испытания образцов горных пород, различные эмпирические зависимости между напряжениями и деформациями и все доступные справочные данные [4, 5], которые были обработаны статистическими методами [6, 7] для нахождения аналитической зависимости σ и ε .

Использование возможностей вычислительной техники, оснащенной пакетами программ делает практически осуществимым оперативное решение задач изучения корреляционной связи любых показателей методами корреляционно-регрессионного анализа.

Наиболее разработанной в теории статистики является методология так называемой парной корреляции, рассматривающая влияние факторного признака X на результативный Y .

Важным этапом корреляционного анализа связи является оценка практической значимости синтезированных моделей. Проверка практической значимости синтезированных в корреляционно-регрессионном анализе математических моделей осуществляется посредством показателей тесноты связей между признаками X и Y .

Распределение величин в совокупности может быть различным. В инженерных экспериментах в большинстве случаев можно считать, что распределение подчиняется нормальному закону. Для нормального распределения характерна симметричность – положительные и отрицательные ошибки встречаются одинаково часто.

Нормальное распределение характеризуется двумя параметрами:

- генеральным средним (математическим ожиданием);
- генеральным средним квадратичным отклонением.

Математическое ожидание выступает как наиболее вероятное значение измеряемой величины. Дисперсия же является численной характеристикой степени рассеяния. Оценкой для математического ожидания является выборочное среднее M , а для определения оценки генерального среднеквадратичного отклонения первоначально находится дисперсия выборки D .

Степень связи оценивается коэффициентом корреляции. Если оценивается влияние на выходную величину одной входной величины, то определяется коэффициент парной корреляции. В корреляционном анализе исходят из того, что как входные, так и выходные величины являются случайными.

Оценкой коэффициента парной корреляции является величина:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n [(X_i - M_x) \cdot (Y_i - M_y)]}{(n-1) \cdot G_x \cdot G_y},$$

где i – порядковый номер опыта;

n – число опытов;

M_x, M_y - математическое ожидание для переменных X и Y соответственно;

$$M_x = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad M_y = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n},$$

G_x, G_y - среднеквадратичное отклонение для переменных X и Y соответственно;

$$G_x = M_k \cdot \sqrt{D_x}, \quad G_y = M_k \cdot \sqrt{D_y},$$

D_x, D_y - дисперсия для переменных X и Y соответственно;

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - M_x)^2}{n-1}, \quad D_y = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - M_y)^2}{n-1},$$

M_k – коэффициент, определяемый по таблице 1, в зависимости от числа степеней свободы $f=n-1$.

Таблица 1 – Значение коэффициента M_k

f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	60
M_k	1,253	1,128	1,085	1,064	1,051	1,042	1,036	1,032	1,028	1,025	1,004

V_x, V_y - коэффициент вариации для переменных X и Y соответственно;

$$V_x = \frac{G_x}{M_x} \cdot 100\%, \quad V_y = \frac{G_y}{M_y} \cdot 100\%.$$

Проверка значимости коэффициента корреляции осуществляется по выражению:

$$\frac{|r| \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \geq T\alpha,$$

где $T\alpha$ – табличное значение критерия Стьюдента для n и соответствующего уровня значимости $\alpha=0,95$. $T\alpha=2,201$.

При малом количестве измерений используется специальный коэффициент, зависящий от надежности α и числа измерений n , называемый коэффициентом Стьюдента $T\alpha$.

Коэффициент Стьюдента $T\alpha$ учитывает отличие случайной выборки от генеральной совокупности и зависит от числа образцов n и требуемой доверительной вероятности (чаще всего $\alpha=0,85-0,95$)[3].

Значение коэффициента корреляции должно удовлетворять соотношению:

$$-1 \leq r \leq 1.$$

Чем меньше отличается абсолютная величина r от единицы, тем ближе к линии регрессии располагаются экспериментальные точки. Если коэффициент корреляции равен нулю, то это означает, что между x и y не существует линейной связи, но между ними может существовать зависимость, отличная от линейной.

Оценка точности аппроксимации парной модели производится по индексу детерминации(причинности) R .

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - M_y)^2}},$$

где y – экспериментальные значения, Y – теоретические значения, M_y – среднее значение y . Проверка практической значимости синтезированных в корреляционно-регрессионном анализе математических моделей осуществляется посредством показателей тесноты связи между признаками x и y .

R выражает долю факторной дисперсии в общей дисперсии, т.е. характеризует, какая часть общей вариации результативного признака y объясняется изучаемым фактором x .

Коэффициент детерминации R показывает насколько значения Y зависят от значения X . Значения R находится в пределах от 0 до 1. При функциональной зависимости индекс корреляции равен 1. При отсутствии связи $R = 0$. Если коэффициент корреляции r является мерой тесноты связи только для линейной формы связи, то индекс корреляции R – и для линейной, и для криволинейной. При прямолинейной связи коэффициент корреляции по своей абсолютной величине равен индексу корреляции: $|r| = R$.

Целью регрессионного анализа является установление аналитической зависимости между выходной и входной величинами. В общем случае зависимость между величинами может быть представлена таблично, графически и аналитиче-

ски. Первый способ облегчает определение выходной величины для приведенных в таблице значений входных; графический – создает наглядность представления. Аналитическая зависимость позволяет исследовать функцию методом математического анализа, т.е. определить значения максимума, минимума, точек перегиба и т.д. Данная зависимость является наиболее универсальной.

Задача получения аналитической зависимости включает три этапа: выбор уравнения регрессии, определение коэффициентов уравнения, проверка соответствия установленной зависимости экспериментальному материалу.

В качестве уравнения для описания зависимостей напряжений и деформаций с были рассмотрены следующие: линейная, логарифмическая, степенная, экспоненциальная и полиномиальная. Для анализа использовался соответствующий аналитический модуль программного пакета MS Excel. На этапе предварительной оценки, построив точечные диаграммы для наборов данных напряжений и деформаций и линий тренда для всех предполагаемых зависимостей. Наиболее высокий коэффициент аппроксимации R^2 был у степенной зависимости (Рис.2). И это было характерно для всех рассматриваемых пород с различными коэффициентами крепости пород f по М.М. Протодьяконову. В результате были проведены расчеты для степенной зависимости. Более детальные расчеты производились для пород с $f=3,4, 5$ так как рассматривались породы для углевмещающих толщ Центрального Донбасса. Для породы с $f=3$ коэффициент $R^2=0.9862$, т.е. очень близко к единице.

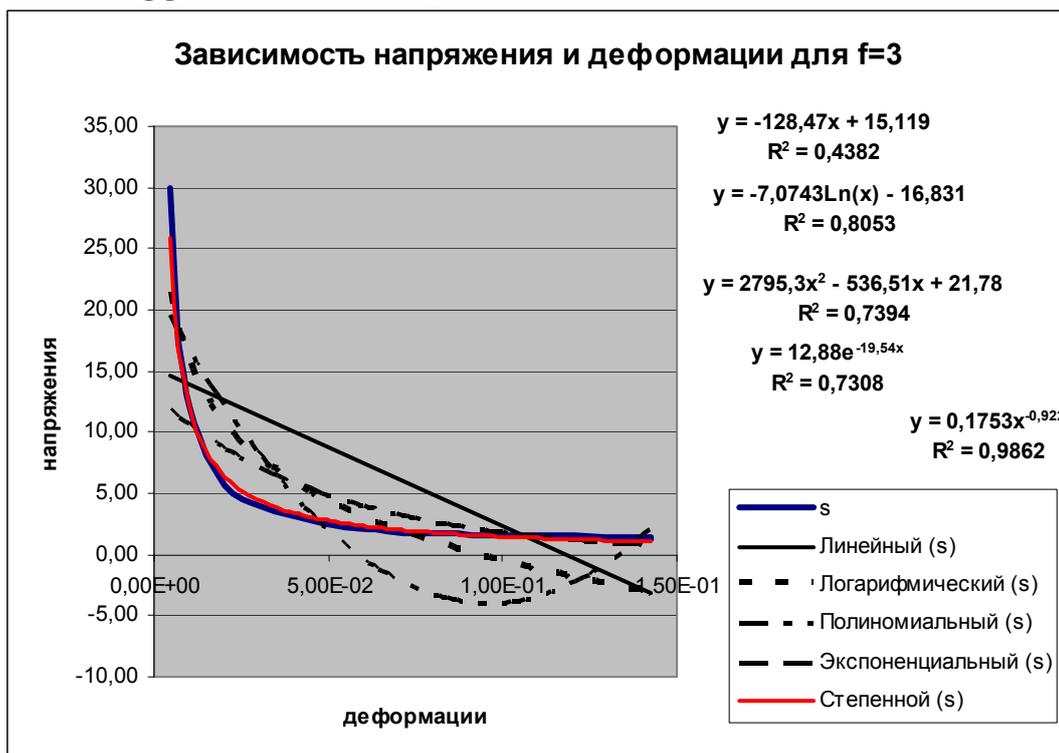


Рис. 2. Точечная диаграмма для наборов данных напряжений и деформаций и линии тренда линейной, логарифмической, полиномиальной, экспоненциальной и степенной зависимостей.

Одним из методов, наиболее часто применяемых к задаче определения параметров функций, является метод наименьших квадратов [7]. Сущность их сводится к тому, что коэффициенты ищутся такими, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных значений функции от значений, вычисленных по эмпирической формуле, оказалась минимальной.

Применительно к линейной зависимости:

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - (a \cdot X_i + b)]^2 \rightarrow \min,$$

где Y_i – фактическое значение функции для X_i ;
 $a \cdot X_i + b$ – расчетное значение функции.

Для определения коэффициентов уравнения необходимо решить систему нормальных уравнений для конкретной зависимости.

Степенная зависимость $y = ax^b$ преобразуются в линейные следующим образом:

1) если в степенной зависимости вида $\lg(y) = b \lg(x) + \lg(a)$ применить замену: $Y_1 = \lg(y)$, $A = \lg(a)$, $X_1 = \lg(x)$, то получим уравнение вида:

$$Y_1 = b \cdot X_1 + A.$$

Тогда для степенной зависимости система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} A \cdot n + b \cdot \sum_{i=1}^n X_{1i} = \sum_{i=1}^n Y_{1i} \\ A \cdot \sum_{i=1}^n X_{1i} + b \cdot \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 = \sum_{i=1}^n (X_{1i} \cdot Y_{1i}) \end{cases}$$

Обработка степенной зависимости происходит аналогично линейной с учетом проведенных замен. Далее решаем систему линейных уравнений методом обратной матрицы относительно переменных A и b . После расчета коэффициентов регрессионной модели необходимо вычислить истинные коэффициенты, используя для степенной зависимости $a = 10^A$

По результатам обработки экспериментальных данных напряжений и деформаций запредельной зоны, представленной выше, была получена аналитическая зависимость для определения величин деформаций горных пород вокруг выработки в запредельной зоне. Как указано выше, в данном случае была использована степенная форма уравнения для описания корреляционно-регрессионной тесноты связи между величиной напряжения и деформации на исследуемых участках $y = ax^b$.

В результате решения систем линейных уравнений получены соответствующие коэффициенты a и b .

Таким образом, для определения размеров деформаций можно использовать следующую эмпирическую зависимость

$$\sigma(\varepsilon) = a \cdot \varepsilon^b, \text{ откуда}$$

$$\varepsilon = \exp(\ln(\sigma/a)/b),$$

где a, b определяются согласно вышеизложенной методике для различных типов крепости пород. Точность данного уравнения оценивается по индексу корреляции R .

Для всех типов пород, как видим, R показывает хорошую сходимость результатов (см.рис.3).

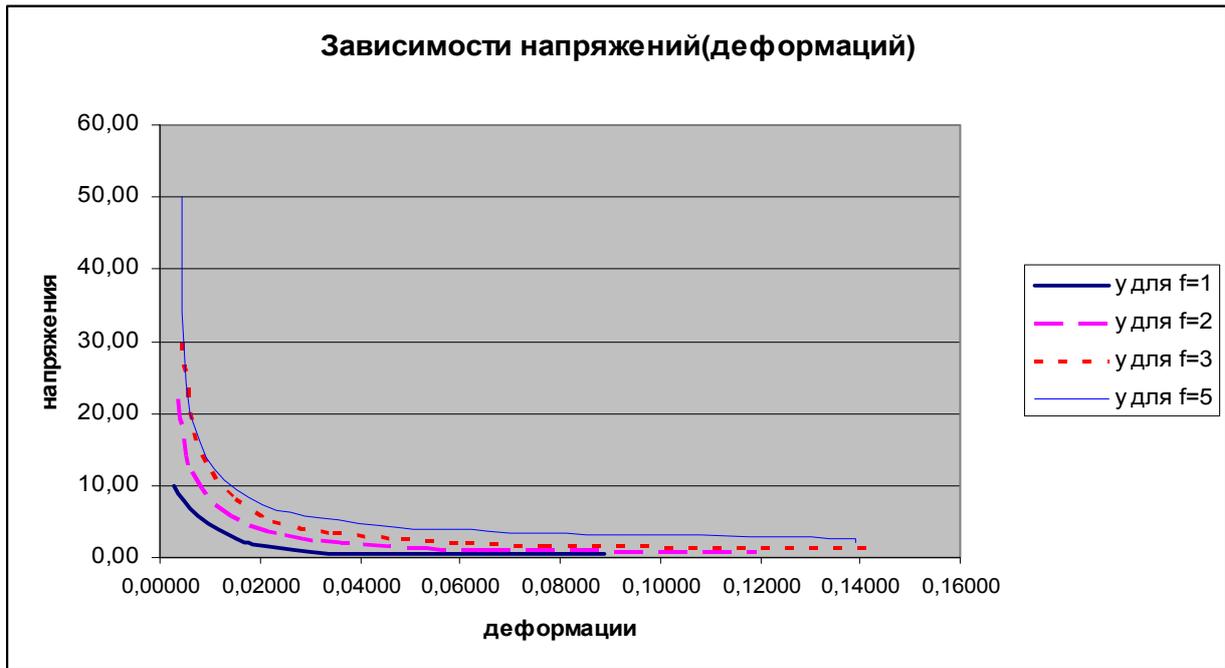
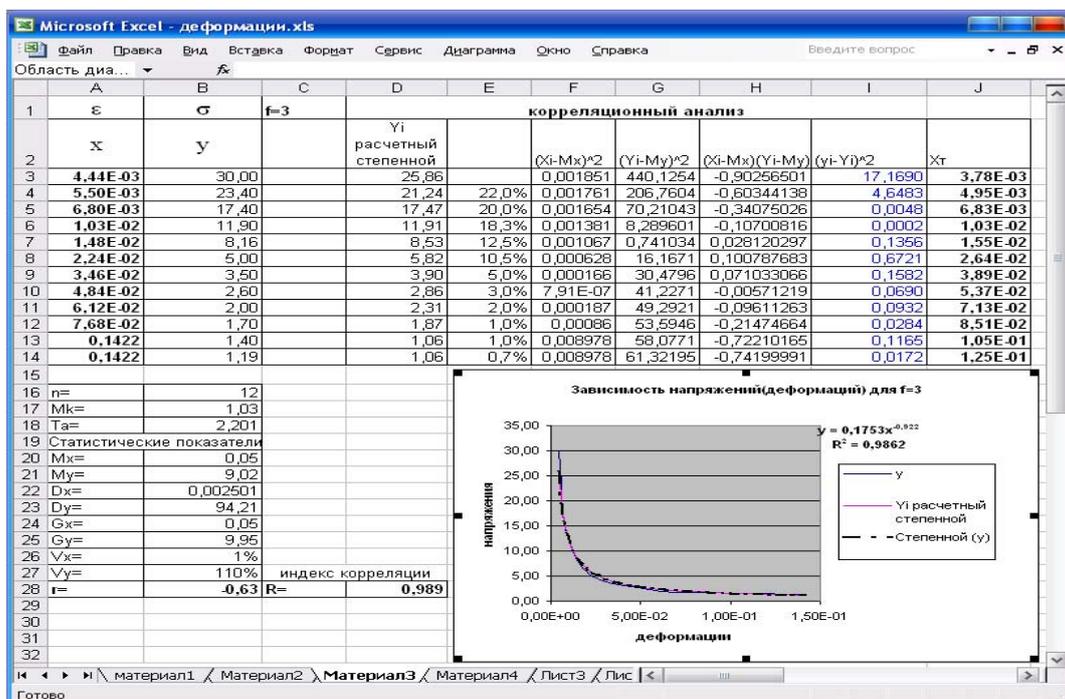


Рис. 3. Зависимости регрессионных кривых для различных крепостей пород: для f=1 R= 0,992; для f=2 R= 0,947; для f=3 R= 0,989; для f=3 R= 0,892

Нахождение вида функции для разных пород с разным характером деформирования сводится к следующему. Задаются исходные данные в виде предельной точки $\sigma(\epsilon)$ на сжатие, которые можно легко определить на простых испытаниях. Сравнение заданных значений напряжений и деформаций в предельной точке (рис.4) с теми, которые получены аналитическим путем по изложенной методике показывает (рис.4), что аналитически полученные значения оказываются несколько заниженными относительно реально измеренных.



Регрессионный анализ									
$y=ax^b$	$A=lg(a)$	$Y1=bX1+A$							
$X1=lg(x)$	$Y1=lg(y)$	$X1^2$	$X1*Y1$		$SX1^2=$	$33,370$			
-2,352	1,477121255	5,533	-3,4744652		$SX1=$	-19,045			
-2,260	1,369215857	5,106	-3,0939312		$SY1=$	8,485289			
-2,167	1,240549248	4,698	-2,6886794		$SX1*Y1=$	-16,3666			
-1,987	1,075546961	3,949	-2,1372869		Исходная матрица				
-1,830	0,911690159	3,348	-1,6681544		12	-19,045	8,485288791	8,48528879	
-1,650	0,698970004	2,722	-1,1531271		-19,045	33,370	-16,36655734	-16,3665573	
-1,461	0,544068044	2,134	-0,794842		Обратная матрица				
-1,316	0,414973348	1,731	-0,545918		0,884171	0,504604	A=	-0,75619193	
-1,214	0,301029996	1,473	-0,3653182		0,504604	0,317949	b=	-0,922	
-1,115	0,230448921	1,242	-0,2568673				a=	0,1753	
-0,847	0,146128036	0,717	-0,1237762						
-0,847	0,075546961	0,717	-0,0639912						

Рис.4. Результаты выполнения корреляционно-регрессионного анализа для получения аналитической связи величин напряжений и деформаций

Такое отклонение прочности среды в расчетной модели в случае небольшой его величины будет только в плюс, так как условия эксплуатации выработки будут искусственно ухудшены, что в конечном счете идет в запас прочности систем крепи в выработке, которые будут рассчитаны на несколько завышенную нагрузку.

Рассмотренный подход используется при подготовке исходных данных для автоматизации решения задач с использованием метода конечных элементов [9, 10] по алгоритму, учитывающему эффекты разупрочнения и разрыхления породной среды в зоне неупругих деформаций в окрестности горной выработки [3, 8].

Выводы

Предложена методика построения теоретической кривой связи деформаций и напряжений за пределом прочности, что позволит исследователю не проводить громоздкие аналитические расчеты или дополнительные лабораторные исследования. Данная методика может быть использована при создании процедур генерации графиков ниспадающей ветви полного деформирования горных пород. Этот график является составляющей частью базы данных программы расчета, реализующей метод конечных элементов и служащей для численного моделирования геомеханических процессов в окружающем выработку породном массиве [3, 8].

Список использованной литературы

1. Янко С.В. Основные направления технического развития шахт Украины / С.В. Янко // Уголь Украины. – 1993. – №1. – С. 8-11.
2. Шашенко А.Н. Некоторые задачи статистической геомеханики / А.Н. Шашенко, С.Б. Тулуб, Е.А. Сдвижкова. – К.: Універ. вид-во «Пульсари», 2002. – 304 с.
3. Шашенко А.Н. Деформируемость и прочность массивов горных пород: Монография / А.Н.Шашенко, Е.А. Сдвижкова, С.Н. Гапеев. – Днепропетровск: НГУ, 2008. – 224 с.
4. Ставрогин А.Н. Пластичность горных пород / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. – М.: Недра, 1979. – 301 с.
5. Кирничанский Г.Т. Элементы теории деформирования и разрушения горных пород / Г.Т.Кирничанский // АН УССР, Ин-т геотехн. механики. – К.: Наукова думка, 1989. – 183 с.

6. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности / Я. Б. Шор. – М.: Госэнергоиздат, 1962. – 552 с.
7. Гутер Р.С. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта / Р.С. Гутер, Б.В. Овчинский. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
8. Шашенко А.Н. Учет эффекта разупрочнения породного массива в задачах геомеханики / А.Н.Шашенко, В.И. Янко, А.В. Солодянкин // Науковий вісник НГУ. – 2003. – № 7. – С. 29-33.
9. Амусин Б.З. Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики / Б.З. Амусин, А.Б. Фадеев. – М.: Недра, 1975. – 144 с.
10. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра, 1987. – С. 221.

Надійшла до редакції 10.03.2014

С.В. Масло, С.Н. Гапеев

У статті пропонується методика обчислення деформацій гірських порід у позамежній зоні руйнувань, проведений кореляційно-регресійний аналіз та встановлено аналітичну зв'язок між зміною величин напружень і деформацій, отримана теоретична функціональна залежності між цими значеннями.

K. Labinskiy

INFLUENCE OF SHOCK ADIABAT OF MINE ROCKS ON THEIR DESTRUCTION WITH BLAST-HOLE CHARGE EXPLOSION

The paper considers the influence of explosive charge detonation parameters on shock wave speed in mine rocks. We found the dependence between the relative radius of destruction and the properties of rocks and explosives. We grounded the average distance between blast-holes in rocks taking into account maximum radius of rock destruction by a shock wave from blast-hole charge explosion.

Keywords: detonation speed, shock wave speed, shock adiabat, radius of destruction.