

УДК 629.113

*САХНО В.П., д.т.н., професор,
Національний транспортний університет, м. Київ;
КУЗНЕЦОВ Р.М., к.т.н., доцент, ПАВЛЮК В.І., к.т.н., асистент,
Луцький національний технічний університет, м. Луцьк*

ДО РОЗРОБКИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ ЛЕГКОВИХ АВТОМОБІЛІВ

У статті отримана система диференціальних рівнянь, що описує рух легкового автомобіля. Врахування кутового ефекту в характеристиці бічного відведення дозволяє дослідити вплив неоднорідної жорсткісної характеристики кожної шини на курсову стійкість руху легкового автомобіля

Ключові слова. *автомобіль, стійкість, рівняння, рух, критична швидкість, шина, відведення, вісь*

Вступ

Більшість дослідників при дослідженні КСР автомобіля використовує велосипедну схему (не враховується колія автомобіля), але це обмежує їх можливості з огляду на різницю характеристик шин лівого та правого бортів автомобіля та неможливість врахування особливостей характеристик кожної з чотирьох шин, що встановлені на автомобіль. Це може суттєво вплинути на результати досліджень області керованості та стійкості руху легкових автомобілів [1]. Тому **метою роботи** є розробка розрахункової схеми легкового автомобіля, яка дозволяє дослідити КСР з урахуванням жорсткісної неоднорідності шин, що досягається введенням колії автомобіля та врахуванням в моделі характеристик кожної з чотирьох шин.

Результати досліджень

Для створення математичної моделі необхідно прийняти низку спрощень, які б з одного боку не порушили уявлення про реальні процеси, що відбуваються при русі автомобіля, а з іншого дозволили б понизити рівень диференціальних рівнянь з метою полегшення їх аналізу. Нижче наведено ці спрощення [2]:

- рух автомобіля проходить по рівній горизонтальній поверхні;
- кутові коливання керованих коліс у вертикальній площині відносно повздовжньої вісі автомобіля відсутні, тобто не враховуються гіроскопічні моменти на керованих колесах;
- відсутня підвіска – відсутній крен – виключення даного ступеня свободи не заважає розумінню поведінки автомобіля. Теорії з таким припущенням не в стані дати точного кількісного уявлення про автомобілі, що мають значний крен (так звані американські автомобілі), але більшість автомобілів обмежені за креном, тобто це припущення дає задовільне наближення;
- тягове зусилля при повороті розподіляється порівну між задніми ведучими колесами, не змінюється за величиною, не впливає на опір відведенню;
- величина тягової сили, що утворюється, достатня для подолання опору руху;
- величина поступальної швидкості є постійною на всіх поворотах, тобто прискорення в повздовжньому напрямку $v' = 0$;
- кути повороту керованих коліс рівні між собою;
- кути розвалу дорівнюють нулю, оскільки бічна сила, що спричинена розвалом, не залежить від сил, що виникають в результаті кочення колеса з відведенням;
- в шарнірах рульового приводу відсутні люфти;
- рульове керування закріплене;
- бічна сила описується, як функція від кута відведення;

– стабілізуючий момент, що створюється за рахунок пружних властивостей шини, не враховується, оскільки він має другорядне значення при описанні автомобіля із закріпленим рульовим керуванням, але стає першорядним при визначенні навантажень в механізмі рульового керування [3].

Для створення математичної моделі розглянемо процес руху легкового автомобіля з математичної точки зору. Розрахункову схему легкового автомобіля представлено на рис. 1.

Траєкторія руху моделі автомобіля розглядається відносно нерухомої декартової системи координат XY . Рівняння плоскопаралельного руху моделі розглядаються в рухомій декартовій системі координат x_0y_0 , що незмінно пов'язана з автомобілем. Кут γ – курсовий кут, кути θ_{11} та θ_{12} – кути повороту передніх керованих коліс.

Схема являє собою одномасову плоску модель автомобіля, який має дві осі – ведучу та керовану. На керованій осі два колеса, що повертаються окремо. До кожного з коліс автомобіля прикладено повздовжню та бічну сили, відповідно для ведучих – тягові сили та сили бічного відведення, для керованих – сили опору кочення та сили бічного відведення. Центр мас знаходиться в т. С, відстань від якої до передньої та задньої вісей a і b . Автомобіль має колію KOL . Відстань від центру мас до коліс лівого та правого бортів дорівнює H , тобто

$$H = \frac{KOL}{2}.$$

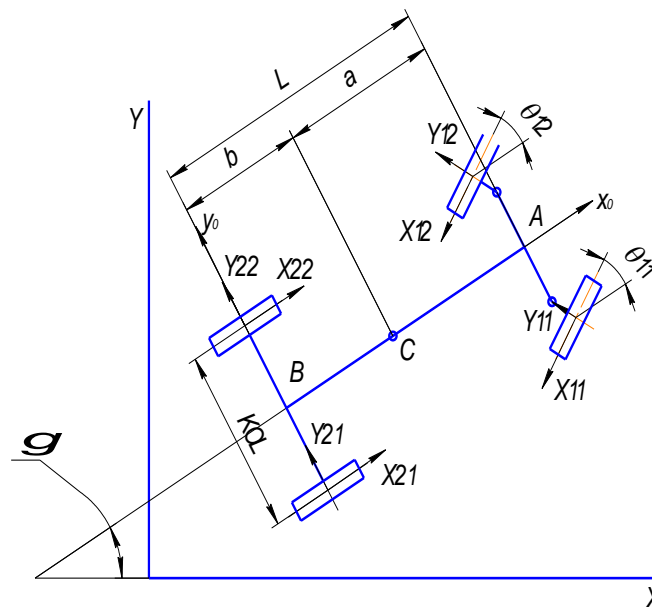


Рис. 1. Розрахункова схема легкового автомобіля

При отриманні рівнянь руху автомобіля використовується кінематика плоскопаралельного руху твердого тіла, яка зводиться до кінематики прямої на площині [4]. Траєкторії кінців відрізка прямої, що незмінно пов'язана з плоским тілом, однозначно визначають траєкторії точок всього тіла. Наприклад, якщо точка С – полюс, А – довільна точка фігури, а ω – кутова швидкість обертання навколо полюса, то швидкість точки А буде дорівнювати сумі швидкостей полюса (V_C) та швидкості точки А навколо полюса (V_{AC}):

$$\bar{V}_A = \bar{V}_C + \bar{V}_{AC}.$$

Причому

$$\bar{V}_{AC} = \bar{\omega} \times \bar{CA}.$$

Знайдемо кути відведення коліс передньої осі автомобіля з керованими колесами.
Швидкість точок контакту лівого переднього колеса (рис. 2, 3)

$$\bar{V}_D = \bar{V}_C + \bar{V}_{DC},$$

де \bar{V}_C – швидкість центру мас автомобіля;

$\bar{V}_{DC} = \bar{\omega} \times \bar{r}_D$ – швидкість точок контакту лівого колеса відносно полюса C;

\bar{r}_D – відстань від центру мас до точок контакту лівого переднього колеса CD;

$\bar{\omega}$ – кутова швидкість автомобіля.

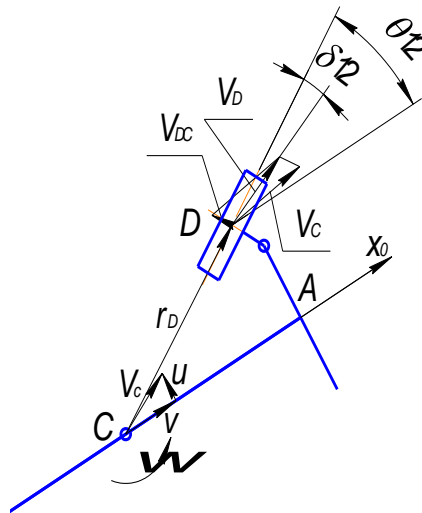


Рис. 2. Схема для визначення швидкості точки контакту лівого переднього колеса

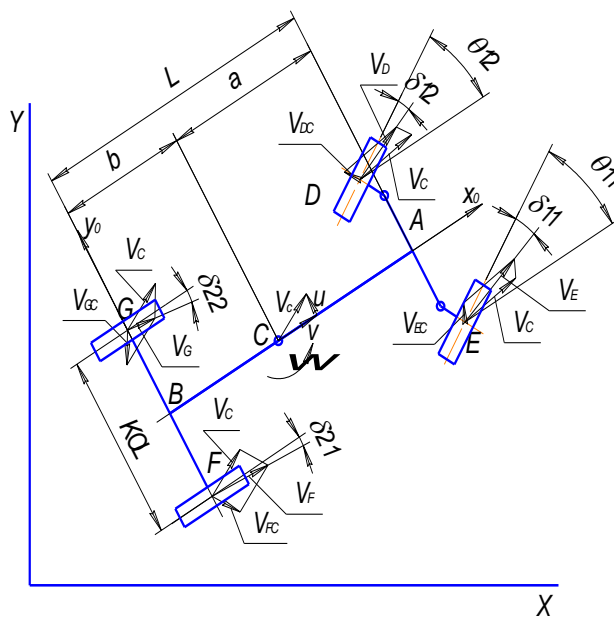


Рис.3. Схема для визначення швидкостей точок контакту та кутів відведення коліс

Аналогічно для правого переднього колеса (рис. 3)

$$\bar{V}_E = \bar{V}_C + \bar{V}_{EC};$$

$$\bar{V}_{EC} = \bar{\omega} \times \bar{r}_E.$$

Для заднього лівого колеса (рис. 3)

$$\bar{V}_G = \bar{V}_C + \bar{V}_{GC};$$

$$\bar{V}_{GC} = \bar{\omega} \times \bar{r}_G.$$

Для заднього правого колеса (рис. 3)

$$\bar{V}_F = \bar{V}_C + \bar{V}_{FC};$$

$$\bar{V}_{FC} = \bar{\omega} \times \bar{r}_F.$$

Для кожного колеса можна записати наступні вирази (рис. 3)

$$\text{tg}(\theta_{12} - \delta_{12}) = \frac{(\bar{V}_D)_{y_0}}{(\bar{V}_D)_{x_0}}; \quad \text{tg}(\theta_{11} - \delta_{11}) = \frac{(\bar{V}_E)_{y_0}}{(\bar{V}_E)_{x_0}};$$

$$\text{tg}(\theta_{22} - \delta_{22}) = \frac{(\bar{V}_G)_{y_0}}{(\bar{V}_G)_{x_0}}; \quad \text{tg}(\theta_{21} - \delta_{21}) = \frac{(\bar{V}_F)_{y_0}}{(\bar{V}_F)_{x_0}},$$

де $(\bar{V}_D)_{y_0}, (\bar{V}_E)_{y_0}, (\bar{V}_G)_{y_0}, (\bar{V}_F)_{y_0}$ – проекції векторів швидкостей на вісь y_0 рухомої системи координат;

$(\bar{V}_D)_{x_0}, (\bar{V}_E)_{x_0}, (\bar{V}_G)_{x_0}, (\bar{V}_F)_{x_0}$ – проекції векторів швидкостей на вісь x_0 рухомої системи координат.

Проекції векторів швидкостей на відповідні осі рухомої системи координат розраховуються за наступними залежностями

$$(\bar{V}_D)_{y_0} = (\bar{V}_E)_{y_0} = u + \omega a;$$

$$(\bar{V}_G)_{y_0} = (\bar{V}_F)_{y_0} = u - \omega b;$$

$$(\bar{V}_D)_{x_0} = v + \omega H;$$

$$(\bar{V}_E)_{x_0} = v - \omega H;$$

$$(\bar{V}_G)_{x_0} = v + \omega H;$$

$$(\bar{V}_F)_{x_0} = v - \omega H,$$

де u – поперечна складова швидкості центру мас автомобіля;

v – повздовжня складова швидкості центру мас автомобіля.

Тоді, кути відведення керованих коліс (δ_{11}, δ_{12}) передньої вісі

$$\delta_{11} = -\theta_{11} + \operatorname{arctg}\left(\frac{u + \omega a}{v - \omega H}\right);$$

$$\delta_{12} = -\theta_{12} + \operatorname{arctg}\left(\frac{u + \omega a}{v + \omega H}\right).$$

Кути відведення для некерованих коліс (δ_{21}, δ_{22}) задньої вісі

$$\delta_{21} = \operatorname{arctg}\left(\frac{u - \omega b}{v - \omega H}\right);$$

$$\delta_{22} = \operatorname{arctg}\left(\frac{u - \omega b}{v + \omega H}\right).$$

Оскільки кути відведення коліс автомобіля залежать від їх навантаження, визначимо вертикальні навантаження на осі легкового автомобіля:

– навантаження на передню вісь

$$G_1 = \frac{mgb}{L}.$$

– навантаження на задню вісь

$$G_2 = \frac{mga}{L}.$$

Для кожного колеса передньої вісі навантаження складе

$$Z_{11} = Z_{12} = \frac{mgb}{2L},$$

а для кожного з коліс задньої вісі

$$Z_{21} = Z_{22} = \frac{mga}{2L}.$$

При русі автомобіля в контактні колеса з дорогою виникає бічне відведення, отже, в рівняння руху математичної моделі необхідно ввести залежності, що описують сили бічного відведення. Для цього буде застосовано модель кочення колеса І. Рокара, яка завдяки своїй математичній простоті та здатністю описання основної властивості еластичного колеса рухатись із відведенням, отримала найбільше поширення при дослідженні стійкості руху автомобіля. Залежність Рокара негроміздка і досить зручна для використання при розрахунках та має наступний вигляд

$$Y = k \cdot \delta, \quad (1)$$

де k – коефіцієнт опору бічного відведення, що визначається тангенсом кута нахилу лінії, що характеризує залежність бічної сили від кута відведення, Н/рад.

На жаль, досліджень щодо характеристик бічного відведення шин, які використовуються на автомобілях сьогодні обмаль. Крім того, існуючі залежності мають протиріччя при описанні взаємодії шини та дороги при русі автомобіля. Тому є необхідність в отриманні такої залежності, для чого необхідно провести експериментальні дослідження і отримати характеристики бічного відведення для шин, що експлуатуються на легкових автомобілях.

Шинам притаманна силова неоднорідність, тому необхідно застосувати додаткові коректувальні параметри, що дозволять більш детально визначати характер взаємодії шини з дорогою. З одного боку, це безпосередньо буде впливати на безпеку руху, з іншого – може являти самостійний теоретичний інтерес, оскільки неоднорідність може характеризувати рівень досконалості шини при виробництві (і експлуатації), а може бути задана при проектуванні та виробництві шин.

Жорсткісна неоднорідність шин призводить до зміщення графіку бічного відведення, що пропонується врахувати шляхом введення в формулу (1) додаткових величин δ_0 та Y_0 , тобто

$$Y = k(\delta \pm \delta_0) \pm Y_0, \quad (2)$$

де δ_0 – кут відведення, що обумовлений наявністю в шині кутового ефекту;

Y_0 – складова бічної сили, що обумовлена наявністю в шині конічного ефекту.

Оскільки в даній роботі досліджується вплив на курсову стійкість тільки нових шин, які можуть мати тільки кутовий ефект, то рівняння, що буде введено до математичної моделі для дослідження КСР, прийме вигляд

$$Y = k(\delta \pm \delta_0). \quad (3)$$

Характер впливу кутового ефекту на бічне відведення зображено на рис. 4.

Рівняння (3) дозволяє врахувати силову неоднорідність шини, що обумовлена наявністю кутового ефекту. Це дає можливість враховувати в математичній моделі жорсткісну неоднорідність при дослідженні курсової стійкості руху легкового автомобіля.

У контакті кожного колеса із дорогою діють сили – поперечні та повздовжні; оскільки кожне з коліс автомобіля може мати індивідуальні характеристики, то ці сили можуть призвести до виникнення моменту відносно центру мас автомобіля. Отже, необхідно врахувати вклад кожного колеса в створення цього моменту.

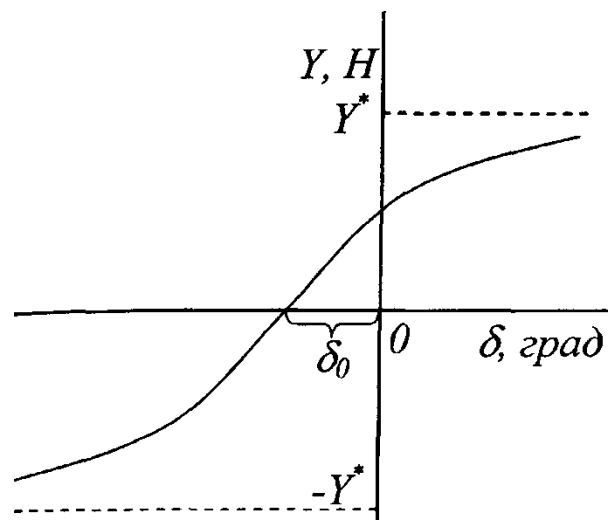


Рис.4. Залежність бічної сили від кута відведення при наявності в шині кутового ефекту

Момент відносно полюса С від сил, що діють в довільній точці А (рис. 5) знаходиться, як векторний добуток

$$\bar{M} = \bar{F} \times \bar{r}, \quad (4)$$

де \bar{F} – сила або рівнодіюча декількох сил, що діють в довільній точці;
 \bar{r} – плече дії сили або рівнодіючої декількох сил, що діють в довільній точці.

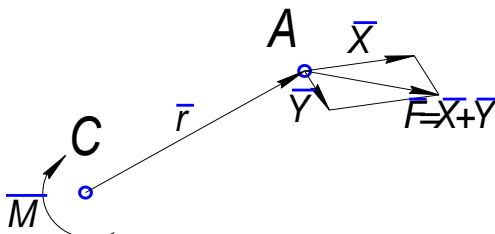


Рис.5. Схема для визначення моменту сил в довільній точці

Для знаходження моментів сил від кожного колеса розглянемо схему, що наведена на рис. 6.

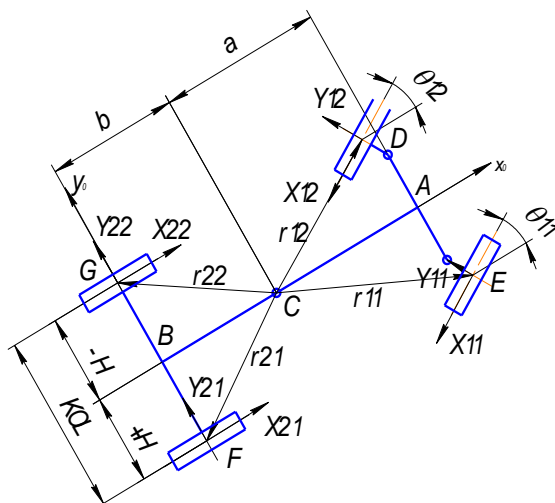


Рис.6. Схема для визначення моментів сил відносно центру мас

Моменти сил відносно точки С, що діють від кожного колеса (рис. 6), можна записати наступним чином:

– у точці Е

$$\overline{MM11} = (\overline{Y11}^* + \overline{X11}^*) \times \overline{CE}, \quad (5)$$

де $X11^* = X11 \cdot \cos \theta11 - Y11 \cdot \sin \theta11$;

$Y11^* = X11 \cdot \sin \theta11 + Y11 \cdot \cos \theta11$,

– у точці D

$$\overline{MM12} = (\overline{Y12}^* + \overline{X12}^*) \times \overline{CD}, \quad (6)$$

де $X12^* = X12 \cdot \cos \theta12 - Y12 \cdot \sin \theta12$;
 $Y12^* = X12 \cdot \sin \theta12 + Y12 \cdot \cos \theta12$,

– у точці F

$$\overline{MM21} = (\overline{Y21} + \overline{X21}) \times \overline{CF}, \quad (7)$$

– у точці G

$$\overline{MM22} = (\overline{Y22} + \overline{X22}) \times \overline{CG}. \quad (8)$$

У математичну модель входить такий параметр, як центральний момент інерції I, без якого розрахунок показників КСР автомобіля буде неможливий. Момент інерції визначається за формулою [5]

$$J = m\rho_z^2, \quad (9)$$

де m – маса автомобіля;

ρ_z – радіус інерції відносно вертикальної вісі, що проходить крізь центр мас автомобіля.

Найбільшу складність являє собою визначення радіуса інерції. В роботі [6] запропоновано імовірнісний метод визначення радіусу інерції автомобіля, перевагою якого є незначна похибка з експериментальними даними. При визначенні радіуса автори припускали наступне: момент інерції автомобіля залежить від закону розподілу маси автомобіля у межах колії і бази; щільність розподілу моменту інерції підпорядковується нормальному закону розподілу. Найбільш точні значення радіуса інерції відносно центральної осі можуть бути отримані за залежністю

$$\rho_z = \sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{B^2}{12} + \frac{1}{6}ab}, \quad (10)$$

де B – колія автомобіля;

a – відстань від центру мас до передньої вісі;

b – відстань від центру мас до задньої вісі.

Рівняння руху в рухомій системі координат (осі Кеніга) мають той же вигляд, що й у нерухомій. Для отримання похідної вектора швидкості (прискорення) в рухомій системі координат, необхідно знати суму «місцевої» похідної вектора швидкості та векторного добутку кутової швидкості рухомої системи координат і вектора швидкості

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v} + \bar{\omega} \times \bar{u},$$

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} + \bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (11)$$

Записавши проекції прискорення центру мас автомобіля на осі рухомої системи координат та додавши рівняння руху навколо вертикальної осі, отримуємо рівняння руху автомобіля з наступними ступенями свободи:

– по змінній v (ступінь свободи по повздовжній осі)

$$m(\dot{v} - \omega u) = X_{11} \cos \theta_{11} + X_{12} \cos \theta_{12} + X_{21} \cos \theta_{21} + X_{22} \cos \theta_{22} - \\ - Y_{11} \sin \theta_{11} - Y_{12} \sin \theta_{12} - Y_{21} \sin \theta_{21} - Y_{22} \sin \theta_{22}, \quad (12)$$

– по змінній u (ступінь свободи по поперечній осі)

$$m(\dot{u} + \omega v) = X_{11} \sin \theta_{11} + X_{12} \sin \theta_{12} + X_{21} \sin \theta_{21} + X_{22} \sin \theta_{22} + \\ + Y_{11} \cos \theta_{11} + Y_{12} \cos \theta_{12} + Y_{21} \cos \theta_{21} + Y_{22} \cos \theta_{22}, \quad (13)$$

– по змінній ω (ступінь свободи навколо вертикальної осі)

$$J\dot{\omega} = M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22}. \quad (14)$$

При дослідженні курсової стійкості розглядають тільки два ступеня свободи (по поперечній та навколо вертикальної осей) та зневажають повздовжніми силами ($X_{11}=X_{12}=X_{21}=X_{22}=0$). Так, маємо наступну систему, що описує рух легкового автомобіля

$$\begin{cases} m(\dot{u} + \omega v) = Y_{11} \cos \theta_{11} + Y_{12} \cos \theta_{12} + Y_{21} \cos \theta_{21} + Y_{22} \cos \theta_{22}; \\ J\dot{\omega} = aY_{11} \cdot \cos \theta_{11} + aY_{12} \cdot \cos \theta_{12} + bY_{21} + bY_{22}. \end{cases} \quad (15)$$

У загальному вигляді рівняння руху мають наступний вигляд

$$0 = -m(\dot{u} + \omega v) + k_{11}(-\theta_{11} + \arctg\left(\frac{u + \omega a}{v - \omega H}\right) + \delta_{110}) \cos \theta_{11} + \\ + k_{12}(-\theta_{12} + \arctg\left(\frac{u + \omega a}{v + \omega H}\right) + \delta_{120}) \cos \theta_{12} + k_{21}(\arctg\left(\frac{u - \omega b}{v - \omega H}\right) + \\ + \delta_{210}) + k_{22}(\arctg\left(\frac{u - \omega b}{v + \omega H}\right) + \delta_{220}) \quad (16)$$

$$0 = -J\dot{\omega} + a k_{11}(-\theta_{11} + \arctg\left(\frac{u + \omega a}{v - \omega H}\right) + \delta_{110}) \cos \theta_{11} + \\ + a k_{12}(-\theta_{12} + \arctg\left(\frac{u + \omega a}{v + \omega H}\right) + \delta_{120}) \cos \theta_{12} + b k_{21}(\arctg\left(\frac{u - \omega b}{v - \omega H}\right) + \\ + \delta_{210}) + b k_{22}(\arctg\left(\frac{u - \omega b}{v + \omega H}\right) + \delta_{220}) \quad (17)$$

Використовуючи наведені вище вирази, отримаємо за допомогою програмного забезпечення Maple 10 систему диференціальних рівнянь, що описують рух легкового автомобіля

$$\begin{aligned} ee1 = & (-k_{21}\sin(\theta_{21})\theta_{21}v^2 + k_{21}\sin(\theta_{21})uv - k_{21}\sin(\theta_{21})\delta_{210}v^2 - \\ & -k_{22}\sin(\theta_{22})\theta_{22}v^2 + k_{22}\sin(\theta_{22})uv - k_{22}\sin(\theta_{22})\delta_{220}v^2 + m\omega v^2 - \\ & -m\omega^3 uH^2 - \cos(\theta_{11})k_{11}\sin(\theta_{11})\theta_{11}v^2 + \cos(\theta_{11})k_{11}\sin(\theta_{11})u\omega H + \\ & + \cos(\theta_{11})k_{11}\sin(\theta_{11})\omega^2 aH - \cos(\theta_{11})k_{11}\sin(\theta_{11})\delta_{110}v^2 + \\ & + \cos(\theta_{11})k_{11}\sin(\theta_{11})\delta_{110}\omega^2 H^2 + \cos(\theta_{11})k_{11}\sin(\theta_{11})\omega av - \\ & - \cos(\theta_{12})k_{12}\sin(\theta_{12})v^2 + \cos(\theta_{12})k_{12}\sin(\theta_{12})\theta_{12}\omega^2 H^2 + \\ & + \cos(\theta_{12})k_{12}\sin(\theta_{12})uv - \cos(\theta_{12})k_{12}\sin(\theta_{12})u\omega H + \\ & + \cos(\theta_{12})k_{12}\sin(\theta_{12})\omega av - \cos(\theta_{12})k_{12}\sin(\theta_{12})\omega^2 aH - \\ & - \cos(\theta_{12})k_{12}\sin(\theta_{12})\delta_{120}v^2 + \cos(\theta_{12})k_{12}\sin(\theta_{12})\delta_{120}\omega^2 H^2 + \\ & + k_{21}\sin(\theta_{21})\theta_{21}\omega^2 H^2 + k_{21}\sin(\theta_{21})u\omega H + k_{21}\sin(\theta_{21})\delta_{210}\omega^2 H^2 + \\ & + k_{22}\sin(\theta_{22})\theta_{22}\omega^2 H^2 - k_{22}\sin(\theta_{22})u\omega H - k_{22}\sin(\theta_{22})\omega bv + \\ & + k_{22}\sin(\theta_{22})\omega^2 bH + k_{22}\sin(\theta_{22})\delta_{220}\omega^2 H^2 + \\ & + \cos(\theta_{11})k_{11}\sin(\theta_{11})\theta_{11}\omega^2 H^2 + \cos(\theta_{11})k_{11}\sin(\theta_{11})uv - k_{21}\sin(\theta_{21})\omega bv - \\ & - k_{21}\sin(\theta_{21})\omega^2 bH)/(v^2 - \omega^2 H^2); \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} ee2 = & -(m\omega v^3 - m\dot{u}\omega^2 H^2 - m\omega^3 vH^2 + m\dot{u}v^2 - \cos(\theta_{11})^2 k_{11}\theta_{11}v^2 + \\ & + \cos(\theta_{11})^2 k_{11}uv - \cos(\theta_{11})^2 k_{11}\delta_{110}v^2 - \cos(\theta_{12})^2 k_{12}\theta_{12}v^2 + \\ & + \cos(\theta_{12})^2 k_{12}uv - \cos(\theta_{12})^2 k_{12}v^2 - k_{21}\cos(\theta_{21})\theta_{21}v^2 + \\ & + k_{21}\cos(\theta_{21})\theta_{21}uv - k_{21}\cos(\theta_{21})\delta_{210}v^2 - k_{22}\cos(\theta_{22})\theta_{22}v^2 + \\ & + k_{22}\cos(\theta_{22})\theta_{22}uv - k_{22}\cos(\theta_{22})\delta_{220}v^2 + \cos(\theta_{12})^2 k_{12}\theta_{12}\omega^2 H^2 + \\ & + k_{21}\cos(\theta_{21})u\omega H + k_{21}\cos(\theta_{21})\theta_{21}\omega^2 H^2 + \cos(\theta_{11})^2 k_{11}\theta_{11}\omega^2 H^2 + \\ & + \cos(\theta_{11})^2 k_{11}u\omega H + \cos(\theta_{11})^2 k_{11}\omega av + \cos(\theta_{11})^2 k_{11}\omega^2 aH + \\ & + \cos(\theta_{11})^2 k_{11}\delta_{110}\omega^2 H^2 - \cos(\theta_{12})^2 k_{12}u\omega H + \cos(\theta_{12})^2 k_{12}\omega av - \\ & - \cos(\theta_{12})^2 k_{12}\omega^2 aH + \cos(\theta_{12})^2 k_{12}\delta_{120}\omega^2 H^2 - k_{21}\cos(\theta_{21})\omega bv - \\ & - k_{21}\cos(\theta_{21})\theta_{21}\omega^2 bH + k_{21}\cos(\theta_{21})\delta_{210}\omega^2 H^2 + k_{22}\cos(\theta_{22})\theta_{22}uv\omega^2 H^2 - \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 & -k_{22} \cos(\theta_{22}) u \omega H - k_{22} \cos(\theta_{22}) \omega b v + k_{22} \cos(\theta_{22}) \omega^2 b H + \\
 & + k_{22} \cos(\theta_{22}) \delta_{220} \omega^2 H^2 / (v^2 - \omega^2 H^2); \\
 ee_3 = & (a \cos(\theta_{11}) k_{11} \theta_{11} v^2 - a^2 \cos(\theta_{11}) k_{11} \omega v - a \cos(\theta_{11}) k_{11} u \omega H + J \dot{\omega} \omega^2 H^2 - \\
 & - k_{21} b \theta_{21} v^2 + k_{21} b u v - k_{21} b^2 \omega v - k_{21} b^2 \omega^2 H - k_{21} b \delta_{210} v^2 - J \dot{\omega} v^2 + \\
 & + k_{21} b \theta_{21} \omega^2 H^2 + k_{21} b u \omega H + k_{21} b \delta_{210} \omega^2 H^2 - k_{22} b \theta_{22} v^2 + k_{22} b u v - \\
 & - k_{22} b^2 \omega v + k_{22} b^2 \omega^2 H - k_{22} b \delta_{220} v^2 + k_{22} b \theta_{22} \omega^2 H^2 - k_{22} b u \omega H + \\
 & + k_{22} b \delta_{220} \omega^2 H^2 - a \cos(\theta_{11}) k_{11} \theta_{11} \omega^2 H^2 - a \cos(\theta_{11}) k_{11} u v - \\
 & - a^2 \cos(\theta_{11}) k_{11} \theta_{11} \omega^2 H + a \cos(\theta_{11}) k_{11} \delta_{110} v^2 - a \cos(\theta_{11}) k_{11} \delta_{110} \omega^2 H^2 + \\
 & + a \cos(\theta_{12}) k_{12} \theta_{12} v^2 - a \cos(\theta_{12}) k_{12} \theta_{12} \omega^2 H^2 - a \cos(\theta_{12}) k_{12} u v + \\
 & + a \cos(\theta_{12}) k_{12} u \omega H - a^2 \cos(\theta_{12}) k_{12} \omega v + a^2 \cos(\theta_{12}) k_{12} \omega^2 H + \\
 & + a \cos(\theta_{12}) k_{12} \delta_{120} v^2 - a \cos(\theta_{12}) k_{12} \delta_{120} \omega^2 H^2) / (v^2 - \omega^2 H^2),
 \end{aligned} \tag{20}$$

де m – маса автомобіля;

u, v – поперечна та повздовжня швидкості центру мас автомобіля;

\dot{u} – поперечне прискорення центру мас автомобіля;

$\omega, \dot{\omega}$ – кутова швидкість та кутове прискорення автомобіля;

θ_{11}, θ_{12} – кути повороту передніх правого та лівого коліс відповідно;

θ_{21}, θ_{22} – кути повороту задніх правого та лівого коліс (в нашому випадку $\theta_{21} = \theta_{22} = 0$);

k_{11}, k_{12} – коефіцієнти опору відведенню передніх правого та лівого коліс відповідно;

k_{21}, k_{22} – коефіцієнти опору відведенню задніх правого та лівого коліс відповідно;

H – відстань від коліс правого та лівого бортів до центру мас (половина колії).

Висновки

Отримана система диференціальних рівнянь, що описує рух легкового автомобіля, яка дозволяє дослідити вплив режимів руху і жорсткісних характеристик шин на показники курсової стійкості. Врахування кутового ефекту в характеристиці бічного відведення дозволяє дослідити вплив неоднорідної жорсткісної характеристики кожної шини на курсову стійкість руху легкового автомобіля.

Список літератури

1. Вплив на керованість двовісного автомобіля асиметричних жорсткісних характеристик коліс / Сахно В.П., Вербицький В.Г., Макаров В.А., Костенко А.В., Петров А.В. // Автошляховик України: Окремий випуск. Вісник Північного наукового центру ТАУ. – 2005. – Вип. 8. – С. 159 – 161.
2. Макаров В.А., Костенко А.В., Петров О.В. До вибору математичної моделі для дослідження курсової стійкості руху автомобіля з урахуванням жорсткісної неоднорідності шин // Вісник Донецького інституту автомобільного транспорту. – 2004. – №1. – С. 33 – 35.
3. Эллис Д.Р. Управляемость автомобиля: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1975. – 216 с.
4. Автомобили: Теория и конструкция автомобиля и двигателя: Учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / В.К. Вахламов, М.Г. Шатров, А.А. Юрчевский; Под ред. А.А. Юрчевского. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 816 с.
5. Волков В.П. Теория эксплуатационных vlastивостей автомобиля: Навч. Посіб. - Харків: ХНА-ДУ, 2003. – 292 с.



6. Подригало М.А., Волков В.П. Определение радиусов инерции автомобиля на стадии его проектирования // Автомобильная промышленность. – 2003. – №6. – С. 19 – 22.

Сахно В.П., Кузнецов Р.М., Павлюк В.И. К разработке математической модели для исследования устойчивости движения легковых автомобилей

Аннотация. В статье получена система дифференциальных уравнений, описывающая движение легкового автомобиля. Учет углового эффекта в характеристике бокового увода позволяет исследовать влияние неоднородной жесткостной характеристики каждой шины на курсовую устойчивость движения легкового автомобиля

Ключевые слова: автомобиль, устойчивость, уравнение, движение, критическая скорость, шина, увод, ось.

Sakhno V.P., Kuznetsov R.M., Pavliuk V.I. To develop a mathematical model to study the stability of the movement of cars

Abstract. The system of differential equalizations, describing motion of passenger car, is got in the article. The account of angular effect in description of lateral slip angles allows to probe influence of inhomogeneous stiffness description of every tire on course stability of motion of passenger car

Keywords: car, stability, equalization, motion, stalling speed, tire, withdrawal, ax.

Стаття надійшла до редакції 05.03.2014 р.