УДК 629.113

САХНО В.П., д.т.н., профессор, Национальный транспортный университет
ВЕРБИЦКИЙ В.Г. д.ф.-м.н., профессор,
Государственный экономико-технологический университет транспорта
КУПЛИНОВ А.В., Донецкая академия автомобильного транспорта
ЛЫСЕНКО А.А., аспирант, Национальный транспортный университет

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ КОЛЕСНОГО ЭКИПАЖА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА II РОДА В СРЕДЕ ПАКЕТА MAPLE

В качестве иллюстрации возможностей системы аналитических преобразований MAPLE приводится листинг программы вывода уравнений движения пространственной маятниковой модели колесного экипажа, которая может быть применима и к более сложным расчетным схемам экипажа.
Ключевые слова: *колесный экипаж, модель, кинетическая энергия, потенциальная энергия, уравнения движения*

Введение

Вывод уравнений движения даже достаточно простой пространственной модели колесного экипажа является трудоемким процессом, требующим автоматизации, сохраняющей за исследователем возможность контроля над ним. Кроме того, задачи, которые стоят перед исследователем, могут быть нацелены на получение некоторых общих (с точки зрения динамического поведения) свойств модели (установление закономерностей свойств устойчивости, вскрытие причин характера поворачиваемости, синтез управления), что предопределяет необходимость исследования системы в общем виде [1, 2]. В этих случаях удобно воспользоваться системами численно-аналитических преобразований [3, 4].

Основная часть

Схему модели можно представить в виде двух частей (несущей неподрессоренной и кренящейся подрессоренной), соединенных цилиндрическим шарниром (ось шарнира горизонтальна – совпадает с продольной осью симметрии неподрессоренной платформы). Точка крепления цилиндрического шарнира совпадает с центром инерции несущей платформы C_o; в невозмущенном положении центр инерции подрессоренной части C проектируется в точку C_o. Расстояние между точками C_o и C – h. При крене корпуса возникает восстанавливающий момент, пропорциональный углу крена φ (*phi*) *Kphi* – коэффициент пропорциональности (суммарная жесткость). Массы и моменты инерции частей: *m1, m2, J1zz, J2xx, J2xy, J2yy, J2xz, J2yz, J2zz*. Скорость изменения курсового угла *Ps* (ψ –курсовой угол), скорость изменения угла крена Φ (*Phi*); *u* – поперечная составляющая скорости точки C_o, а *v* – ее продольная составляющая. Кинетическая энергия системы *T*, потенциальная энергия *POT*; {*omegax, omegay, omegaz*} – вектор угловой скорости в связанной с корпусом (подрессоренной частью) подвижной системе координат. Последующие обозначения будут ясны из контекста программы, например:

$DTu := diff\left(T,u\right)$ задает частную производную кинетической энергии по *u*;

$DTPsi := diff\,(T, Ps)$ задает частную производную кинетической энергии по Psi;

$DDTPsi := diff\left(subs\left(\left\{u = u\left(t\right), psi = psi\left(t\right), Ps = Ps\left(t\right), \phi i = \phi\left(t\right), \Phi = \Phi\left(t\right)\right\}, DTPsi\right), t\right)$ задает частную производную *DTPsi* по *t*;

Yi – сведенные боковые силы на передней и задней осях экипажа;

a, b – расстояние точки C_0 до передней и задней осей соответственно.
Уравнение e1 соответствует переменной u;
e2 – $Psi(\omega)$; e3 – φ.

$> \text{restart:}$

$$> T := \frac{1}{2}\cdot\left(J1zz\cdot Ps^2 + m1\cdot V_{CO}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(J2xx\cdot omegax^2 + J2yy\cdot omegay^2 + J2zz\cdot omegaz^2 - \right.$$
$$\left. -2\cdot J2xy\cdot omegax\cdot omegay - 2\cdot J2xz\cdot omegax\cdot omegaz - 2\cdot J2yz\cdot omegay\cdot omegaz + m2\cdot Vc\right);$$

$$T := \frac{1}{2}J1zz\,Ps^2 + \frac{1}{2}m1\,V_{CO} + \frac{1}{2}J2xx\,omegax^2 + \frac{1}{2}J2yy\,omegay^2 + \frac{1}{2}J2zz\,omegaz^2$$
$$- J2xy\,omegax\,omegay - J2xz\,omegax\,omegaz - J2yz\,omegay\,omegaz + \frac{1}{2}m2\,Vc$$

$$> Vco := u^2 + v^2;$$

$$Vco := u^2 + v^2$$

$$> Vc := \left(u - \mathrm{Phi}\cdot h\cdot\cos(\mathrm{phi})\right)^2 + \left(v + Ps\cdot h\cdot\sin(\mathrm{phi})\right)^2;$$

$$Vc := \left(u - \Phi\,h\cos(\phi)\right)^2 + \left(v + Ps\,h\sin(\phi)\right)^2$$

$$> omegax := \mathrm{Phi};$$

$$omegax := \Phi$$

$$> omegay := Ps\cdot\sin(\mathrm{phi});$$

$$omegay := Ps\sin(\phi)$$

$$> omegaz := Ps\cdot\cos(\mathrm{phi});$$

$$omegaz := Ps\cos(\phi)$$

$$> DTu := diff\,(T, u);$$

$$DTu := m1\,u + \frac{1}{2}m2\left(2u - 2\Phi\,h\cos(\phi)\right)$$

$$> DTv := diff\,(T, v);$$

$$DTv := m1\,v + \frac{1}{2}m2\left(2v - 2Ps\,h\sin(\phi)\right)$$

$$> DTpsi := simplify\left(DTv\cdot u - DTu\cdot v\right);$$

$$DTpsi := m2\,h\left(u\,Ps\sin(\phi) + v\,\Phi\cos(\phi)\right)$$

$$> DTPsi := diff\,(T, Ps);$$

$$DTPsi := J1zz\,Ps + J2yy\,Ps\sin(\phi)^2 + J2zz\,Ps\cos(\phi)^2 - J2xy\,\Phi\sin(\phi)$$
$$- J2xz\,\Phi\cos(\phi) - 2J2yz\,Ps\sin(\phi)\cos(\phi) + m2\left(v + Ps\,h\sin(\phi)\right)h\sin(\phi)$$

$$> DDTu := diff\,\left(subs\left(\left\{u = u(t), \mathrm{psi} = \mathrm{psi}(t), Ps = Ps(t), \mathrm{phi} = \mathrm{phi}(t), \Phi = \Phi(t)\right\}, DTu\right), t\right);$$

$$DDTu := m1\left(\frac{d}{dt}u(t)\right) + \frac{1}{2}m2\left(2\left(\frac{d}{dt}u(t)\right) - 2\left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right)h\cos(\phi(t))\right.$$
$$\left. + 2\Phi(t)\,h\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\right)$$

$$> DDTPsi := diff\left(subs\left(\left\{u=u(t), \mathrm{psi}=\mathrm{psi}(t), Ps=Ps(t), \phi=\phi(t), \Phi=\Phi(t)\right\}, DTPsi\right), t\right);$$

$$DDTPsi := J1zz\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right) + J2yy\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right)\sin(\phi)^2 + J2zz\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right)\cos(\phi)^2$$
$$-J2xy\left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right)\sin(\phi) - J2xz\left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right)\cos(\phi)$$
$$-2J2yz\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right)\sin(\phi)\cos(\phi) + m2\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right)h^2\sin(\phi)^2$$

$$> DT\phi := diff(T, \phi);$$

$$DT\phi := J2yy\,Ps^2\sin(\phi)\cos(\phi) - J2zz\,Ps^2\cos(\phi)\sin(\phi) - J2xy\,\Phi\,Ps\cos(\phi)$$
$$+J2xz\,\Phi\,Ps\sin(\phi) - J2yz\,Ps^2\cos(\phi)^2 + J2yz\,Ps^2\sin(\phi)^2$$
$$+\frac{1}{2}m2\left(2\left(u-\Phi\,h\cos(\phi)\right)\Phi\,h\sin(\phi) + 2\left(v+Ps\,h\sin(\phi)\right)Ps\,h\cos(\phi)\right)$$

$$> DT\Phi := diff(T, \Phi);$$

$$DT\Phi := J2xx\,\Phi - J2xy\,Ps\sin(\phi) - J2xz\,Ps\cos(\phi) - m2\left(u-\Phi\,h\cos(\phi)\right)h\cos(\phi)$$

$$> DDT\Phi := diff\left(subs\left(\left\{u=u(t), \mathrm{psi}=\mathrm{psi}(t), Ps=Ps(t), \mathrm{phi}=\mathrm{phi}(t), \Phi=\Phi(t)\right\}, DT\Phi\right), t\right);$$

$$DDT\Phi := J2xx\left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right) - J2xy\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right)\sin(\phi(t)) - J2xy\,Ps(t)\cos(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)$$
$$-J2xz\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right)\cos(\phi(t)) + J2xz\,Ps(t)\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)$$
$$-m2\left(\frac{d}{dt}u(t) - \left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right)h\cos(\phi(t)) + \Phi(t)\,h\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\right)h\cos(\phi(t))$$
$$+m2\left(u(t)-\Phi(t)\,h\cos(\phi(t))\right)h\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)$$

$$> POT := \frac{1}{2}\cdot\left(Kphi\cdot\phi^2 - m2\cdot g\cdot h\cdot\phi^2\right);$$

$$POT := \frac{1}{2}Kphi\,\phi^2 - \frac{1}{2}m2\,g\,h\,\phi^2$$

$$> DPOT := diff(POT, \mathrm{phi});$$

$$DPOT := Kphi\,\phi - m2\,g\,h\,\phi$$

$$> e1 := DDTu + omega\cdot DTv - Y1 - Y2;$$

$$e1 := m1\left(\frac{d}{dt}u(t)\right) + \frac{1}{2}m2\left(2\left(\frac{d}{dt}u(t)\right) - 2\left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right)h\cos(\phi(t)) + 2\Phi(t)\,h\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\right)$$
$$+\omega\left(m1\,v + \frac{1}{2}m2\left(2v + 2Ps\,h\sin(\phi)\right)\right) - Y1 - Y2$$

$$> e1 := simplify\left(subs\left(\left\{u(t)=u,\ psi(t)=psi,\ phi(t)=phi, \frac{d}{dt}\phi(t)=Phi, \frac{d}{dt}\psi(t)=\omega,\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.Ps(t)=\mathrm{omega}, Ps=\mathrm{omega}, \frac{d}{dt}u(t)=U, \frac{d}{dt}Ps(t)=\mathrm{Omega}, \frac{d}{dt}\Phi(t)=PP\right\}, e1\right)\right);$$

$$e1 := m1U + m2U - m2\,PP\,h\cos(\phi) + m2\,\Phi(t)\,h\sin(\phi)\,\Phi + \omega\,m1\,\nu$$
$$+ \omega\,m2\,\nu + m2\,\omega^2\,h\sin(\phi) - \mathrm{Y1} - \mathrm{Y2}$$

$> \; e2 := DDTPsi - DTPsi - a\cdot\mathrm{Y1} + b\cdot\mathrm{Y2};$

$$e2 := J1zz\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right) + J2yy\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right)\sin(\phi)^2 + J2zz\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right)\cos(\phi)^2$$
$$- J2xy\left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right)\sin(\phi) - J2xz\left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right)\cos(\phi) - 2\,J2yz\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right)\sin(\phi)\cos(\phi)$$
$$+ m2\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right)h^2\sin(\phi)^2 - m2\,h\big(u\,Ps\sin(\phi) + \nu\,\Phi\cos(\phi)\big) - a\,Y1 + b\,Y2$$

$> \; e2 := subs\left(\left\{u(t) = u, \mathrm{psi}(t) = \mathrm{psi}, \mathrm{phi}(t) = \mathrm{phi}, \frac{d}{dt}\phi(t) = \mathrm{Phi}, \frac{d}{dt}\psi(t) = \omega,\right.\right.$

$$\left.\left. Ps(t) = omega, Ps = omega, \frac{d}{dt}u(t) = U, \frac{d}{dt}Ps(t) = Omega, \frac{d}{dt}\Phi(t) = PP\right\}, e2\right);$$

$$e2 := J1zz\,\Omega + J2yy\,\Omega\sin(\phi)^2 + J2zz\,\Omega\cos(\phi)^2 - J2xy\,PP\sin(\phi)$$
$$- J2xz\,PP\cos(\phi) - 2\,J2yz\,\Omega\sin(\phi)\cos(\phi) + m2\,\Omega\,h^2\sin(\phi)^2$$
$$- m2\,h\big(u\,\omega\sin(\phi) + \nu\,\Phi\cos(\phi)\big) - a\,Y1 + b\,Y2$$

$> \; e3 := DDT\Phi - DT\varphi + DPOT;$

$$e3 := J2xx\left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right) - J2xy\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right)\sin(\phi(t)) - J2xy\,Ps(t)\cos(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)$$
$$- J2xz\left(\frac{d}{dt}Ps(t)\right)\cos(\phi(t)) + J2xz\,Ps(t)\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)$$
$$- m2\left(\frac{d}{dt}u(t) - \left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right)h\cos(\phi(t)) + \Phi(t)\,h\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\right)h\cos(\phi(t))$$
$$+ m2\big(u(t) - \Phi(t)\,h\cos(\phi(t))\big)h\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right) - J2yy\,Ps^2\sin(\phi)\cos(\phi)$$
$$+ J2zz\,Ps^2\cos(\phi)\sin(\phi) + J2xy\,\Phi\,Ps\cos(\phi) - J2xz\,\Phi\,Ps\sin(\phi) + J2yz\,Ps^2\cos(\phi)^2$$
$$- J2yz\,Ps^2\sin(\phi)^2 - \frac{1}{2}m2\Big(2\big(u - \Phi\,h\cos(\phi)\big)\Phi\,h\sin(\phi) + 2\big(\nu + Ps\,h\sin(\phi)\big)Ps\,h\cos(\phi)\Big)$$
$$+ Kphi\,\phi - m2\,g\,h\,\phi$$

$> \; e3 := simplify\left(subs\left(\left\{u(t) = u, psi(t) = psi, phi(t) = phi, \frac{d}{dt}\phi(t) = Phi, \frac{d}{dt}\psi(t) = \omega,\right.\right.\right.$

$$\left.\left.\left. Ps(t) = \mathrm{omega}, Ps = \mathrm{omega}, \frac{d}{dt}u(t) = U, \frac{d}{dt}Ps(t) = \mathrm{Omega}, \frac{d}{dt}\Phi(t) = PP\right\}, e3\right)\right);$$

$$e3 := J2xx\,PP - J2xy\,\Omega\sin(\phi) - J2xz\,\Omega\cos(\phi) - m2\,h\cos(\phi)U + m2\,h^2\cos(\phi)^2\,PP$$
$$- 2m2\,h^2\cos(\phi)\Phi(t)\sin(\phi)\Phi - J2yy\omega^2\sin(\phi)\cos(\phi) + J2zz\omega^2\cos(\phi)\sin(\phi)$$
$$+ 2J2yz\omega^2\cos(\phi)^2 - J2yz\omega^2 + m2\,\Phi^2h^2\sin(\phi)\cos(\phi) - m2\,\omega\,h\cos(\phi)\nu$$
$$- m2\,\omega^2h^2\cos(\phi)\sin(\phi) + Kphi\,\phi - m2\,g\,h\,\phi$$

$> \ subs\left(\left\{\sin(\phi)=0, \cos(\phi)=1\right\}, e1\right);$

$$m1U + m2U - m2\,PP\,h + \omega\, m1\, v + \omega\, m2\, v - Y1 - Y2$$

$> \ subs\left(\left\{\sin(\phi)=0, \cos(\phi)=1\right\}, e2\right);$

$$J1zz\,\Omega + J2zz\,\Omega - J2xz\,PP - m2\,h\,v\,\Phi - a\,Y1 + b\,Y2$$

$> \ subs\left(\left\{\sin(\phi)=0, \cos(\phi)=1\right\}, e3\right);$

$$J2xx\,PP - J2xz\,\Omega - m2\,h\,U + m2\,h^2\,PP + J2yz\,\omega^2 - m2\,\omega\,h\,v + Kphi\,\phi - m2\,g\,h\,\phi$$

Выводы

Предлагаемый метод выведения уравнений движения дает возможность получить как исходные нелинейные уравнения движения, так и провести их линеаризацию; достаточно просто «контролируется» и имеет определенный запас возможностей по его реализации в случае усложнения расчетной схемы.

Список литературы

1. Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г. «Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин», Киев: Наукова Думка; 1990г. – 232с.

2. Новожилов И.В., Павлов И.С. «Приближенная математическая модель колесного экипажа», Изв.РАН, МТТ, №2, 1997г., с. 196-204.

3. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. — М.: Мир, 1997. — С. 208.

4. Погорелов ДЮ «Введение в моделирование динамики систем тел», Учеб пособие, Брянск, БГТУ, 1997 г, 156 с

Сахно В.П., Вербицький В.Г. Куплінов А.В, Лисенко О.О. Виведення рівнянь руху просторової моделі колісного екіпажу на основі рівнянь Лагранжа II роду в середовищі пакету MAPLE

Анотація. *В якості ілюстрації можливостей системи аналітичних перетворень MAPLE приводиться лістинг програми виводу рівнянь руху просторової маятникової моделі колісного екіпажу, яка може бути реалізована й у випадку більш складних розрахункових схем екіпажу.*

Ключові слова: *колісний екіпаж, кінетична енергія, модель, потенціальна енергія, рівняння руху.*

Sahno V.P., Verbitsky V.G., Kuplinov A.V., Lysenko A.A. The equation of motion spatial model of a wheeled vehicle based Lagrange equations of type II in the environment of MAPLE

Abstract. *Program listing output equations of motion of the pendulum spatial model of a wheeled vehicle is given to illustrate the capabilities of the system of analytical transformations MAPLE that can be applied to more complex calculation scheme vehicle.*

Keywords: *vehicle, kinetic energy, model, potential energy, equations of motion.*

Стаття надійшла до редакції 18.04.2014 р.