УДК 519.17

ШУРКО Г.К., к. ф.-м. н, доцент,
ШУРКО И.Л., к. ф.-м. н, доцент,
Донецкий национальный университет

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ БЕЗОТКАЗНОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Построена вероятностная модель безотказной работы технической системы. Вычислена в общем виде вероятность безотказной работы.
***Ключевые слова**: техническая система, вероятностная модель, вероятность безотказной работы*

Анализ проблемы

Построение вероятностной модели технической системы (далее ТС), имеющей сложную иерархическую структуру (а одной из основных задач, решаемых в рамках такой модели, является оценка вероятности безотказной работы системы), как правило, происходит через моделирование безотказной работы подсистем, входящих в исходную систему, а затем компонирования построенных моделей в одну модель. Но возникают ситуации, когда ТС рассматривается как аналог своеобразного черного ящика и доступной является информация о результате мониторинга во времени, касающаяся входных и выходных параметров.

Анализ последних исследований и публикаций

Вопросам оценки вероятности безотказной работы технических систем посвящено много работ, ставших классическими в теории надежности [1]. Построение вероятностных моделей основывается на методах теории вероятностей [3], математической статистики [2], теории случайных процессов [4].

Во многих работах учитывается структура системы, внутренняя иерархия подсистем, образующих систему.

Выполненные исследования позволили получить оценку вероятности безотказной работы технической системы без учета анализа структуры системы и ее внутренней иерархии.

Цель работы

Получить оценку вероятности безотказной работы технической системы без учета анализа структуры системы и ее внутренней иерархии, основываясь лишь на информации о результатах наблюдений над входящими и выходящими параметрами, которые интерпретируются как случайные процессы.

Основной раздел

Пусть имеется некоторая техническая система, кибернетическая схема которой представлена на рисунке 1.

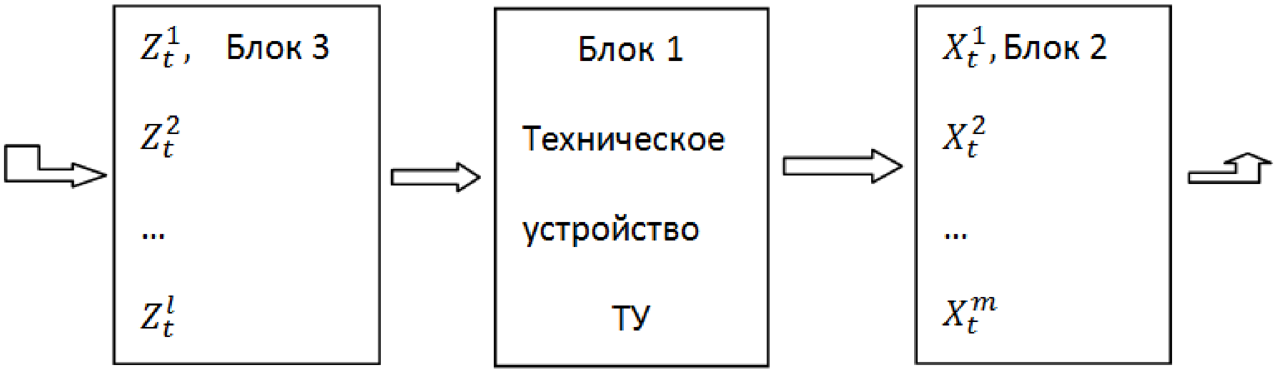

Рис.1. Кибернетическая схема технической системы

Кибернетическая схема содержит 3 блока:

блок 1 представляет собой саму техническую систему (ТС) – своеобразный «черный ящик»;

блок 2 представляет собой блок, содержащий информацию о выходящих параметрах:

$$X_t^i,\ i=\overline{1,m}\ ; \tag{1}$$

блок 3 представляет собой блок, содержащий информацию о входящих параметрах, осуществляющих управляющее воздействие:

$$Z_t^j, j=\overline{1,l}\ . \tag{2}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Известны границы изменения значений параметров X_t^i, Z_t^i:

$$a_i \le X_t^i \le b_i \quad i=\overline{1,m} \tag{3}$$

$$c_j \le Z_t^j \le d_j, \quad j=\overline{1,l} \tag{4}$$

2. Параметры $X_t^i, i=\overline{1,m}, Z_t^j, j=\overline{1,l}$, в силу очевидных причин, можно считать подверженными случайным возмущениям, т.е., с учетом зависимости их от времени, считать случайными процессами.

Предположим, что регистрация значений случайных параметров $X_{t,}^i i=\overline{1,m}, Z_{t,}^j\ j=\overline{1,l}$ производилась в моменты времени $t_{1,}t_{2,}\ldots,t_n$, а сами численные значения представлены в виде таблицы 1:

Таблица 1

Наблюдаемые значения случайных параметров $X_{t,}^i i=\overline{1,m}, Z_{t,}^j\ j=\overline{1,l}$ в моменты времени $t_{1,}t_{2,}\ldots,t_n$

	X_t^1	X_t^2	…	X_t^m	Z_t^1	Z_t^2	…	Z_t^l
t_1	X_1^1	X_1^2	…	X_1^m	Z_1^1	Z_1^2	…	Z_1^l
t_2	X_2^1	X_2^2	…	X_2^m	Z_2^1	Z_2^2	…	Z_2^l
…	…	…	…	…	...	…	…	…
t_n	X_n^1	X_n^2	…	X_n^m	Z_n^1	Z_n^2	…	Z_n^l

Здесь X_k^i и Z_k^j – наблюдаемые значения параметров, $k=\overline{1,n}$.

Учитывая, что разные параметры X_t^i и Z_t^j могут иметь разные физические размерности, приведем их к безразмерным величинам.

В качестве таких безразмерных параметров Y_t^i и U_t^j можно взять отношение указанных случайных параметров к своим среднеквадратическим отклонениям, которые, как известно, представляют собой корень квадратный из дисперсии, рассчитанной на основании информации о вероятностных законах распределения случайных процессов X_t^i и Z_t^j.

В случае, когда законы распределения не известны, в качестве среднеквадратических отклонений можно использовать их статистические оценки, полученные на основании наблюдений над значениями случайных процессов в фиксированные моменты времени.

Для приведения все показателей X_t^i и Z_t^j к безразмерным величинам поступим следующим образом:

1. Вычислим выборочные средние значения наблюдаемых значений параметров X_t^i и Z_t^i и выборочные средние значения их квадратов по формулам:

$$\overline{X^i} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_k^i \tag{5}$$

$$\overline{(X^i)^2} = \frac{1}{n}\sum_1^n \left(X_k^i\right)^2, i = \overline{1,m} \tag{6}$$

$$\overline{Z^j} = \frac{1}{n}\sum_1^n Z_k^j \tag{7}$$

$$\overline{(Z^j)^2} = \frac{1}{n}\sum_1^n \left(Z_k^j\right)^2, j = \overline{1,l} \tag{8}$$

2. Вычислим выборочные средние квадратические отклонения наблюдаемых значений параметров X_t^i и Z_t^j от их выборочных средних значений:

$$\sigma_X^i = \sqrt{\overline{(X^i)^2} - (\overline{X^i})^2} \tag{9}$$

$$\sigma_Z^j = \sqrt{\overline{(Z^j)^2} - (\overline{Z^j})^2} \tag{10}$$

Приведем параметры X_t^i к безразмерным величинам по формуле:

$$Y_t^i = \frac{X_t^i}{\sigma_X^i}, i = \overline{1,m}, \tag{11}$$

а параметры Z_t^j к безразмерным величинам по формуле:

$$U_t^j = \frac{Z_t^j}{\sigma_Z^j}, j = \overline{1,l} \tag{12}$$

Заметим, что после приведения параметров X_t^i и Z_t^j к безразмерным величинам по формулам (9) и (10), таблица 1 преобразуется к виду:

Таблица 2

	Y_t^1	Y_t^2	…	Y_t^m	U_t^1	U_t^2	…	U_t^l
t_1	Y_1^1	Y_1^2	…	Y_1^m	U_1^1	U_1^2	…	U_1^l
t_2	Y_2^1	Y_2^2	…	Y_2^m	U_2^1	U_2^2	…	U_2^l
…	…	…	…	…	…	…	…	…
t_n	Y_n^1	Y_n^2	…	Y_n^m	U_n^1	U_n^2	…	U_n^l

Здесь Y_t^i и U_t^j – значения безразмерных параметров, вычисленные на основании формул (11) и (12) по наблюденным значениям параметров X_k^i и Z_k^j, $k = \overline{1, n}$.

Очевидно, что между случайными параметрами $X_t^i, i = \overline{1, m}$ и $Z_t^j, j = \overline{1, l}$ и безразмерными параметрами Y_t^i, $i = \overline{1, m}$ и U_t^j, $j = \overline{1, l}$ соответственно существует взаимно-однозначное соответствие.

Безразмерные параметры Y_t^i, U_t^j будем рассматривать как координаты некоторой точки ξ_t в $m + l$ - мерном евклидовом пространстве, т.е.

$$\xi_t = \left(Y_t^1, Y_t^2, \dots, Y_t^m, U_t^1, U_t^2, \dots, U_t^l\right) \tag{13}$$

при этом область изменений значений параметров Y_t^i, будет иметь вид:

$$\frac{a_i}{\sigma_X^i} \le Y_t^i \le \frac{b_i}{\sigma_X^i}, i = \overline{1, m} \tag{14}$$

$$\frac{c_j}{\sigma_Z^j} \le U_t^j \le \frac{d_j}{\sigma_Z^j}, j = \overline{1, l} \tag{15}$$

или, полагая:

$$A_i = \frac{a_i}{\sigma_X^i}, B_i = \frac{b_i}{\sigma_X^i}, i = \overline{1, m} \tag{16}$$

$$C_j = \frac{c_j}{\sigma_Z^j}, \ D_j = \frac{d_j}{\sigma_Z^j}, j = \overline{1, l} \tag{17}$$

окончательно получим:

$$A_i \le Y_t^i \le B_i, i = \overline{1, m_i} \tag{18}$$

$$C_j \le U_t^j \le D_j, j = \overline{1, l} \tag{19}$$

Выделим в области изменения значений каждого параметра Y_t^i и U_t^j интервалы значений $[A_i^1, B_i^1]$, $[C_i^1, D_i^1]$, соответствующих безотказной работе ТС. Очевидно, что интервал $[A_i^1, B_i^1]$ включен в интервал $[A_i, B_i]$, $i = \overline{1, m}$, а интервал $[C_i^1, D_i^1]$ включен в интервал $[C_j, D_j]$, $j = \overline{1, l}$.

Обозначим через G область в $m + l$ - мерном евклидовом пространстве, состоящую из точек

$$\xi_t = \left(Y_t^1, Y_t^2, \dots, Y_t^m, U_t^1, U_t^2, \dots, U_t^l\right), \tag{20}$$

координаты которых представляют собой значения безразмерных случайных параметров, удовлетворяющих ограничениям (18) и (19). Область G представляет собой $m + l$ - мерный параллелепипед.

Обозначим через G_1 область в $m+l$ - мерном евклидовом пространстве, состоящую из точек

$$\eta_t = \left(Y_t^1, Y_t^2, \dots, Y_t^m, U_t^1, U_t^2, \dots, U_t^l\right), \tag{21}$$

координаты которых представляют собой значения безразмерных случайных параметров, удовлетворяющих ограничениям:

$$A_i^1 \le Y_t^i \le B_i^1, i = \overline{1, m_i} \tag{22}$$

$$C_j^1 \le U_t^j \le D_j^1, j = \overline{1, l} \tag{23}$$

Область G_1 представляет собой также $m+l$ - мерный параллелепипед. При этом между параллелепипедами G и G_1 выполняется соотношение:

$$G \subseteq G_1$$

Оценим теперь вероятность того, что ТС в определенный момент времени t будет находиться в режиме безотказной работы, т.е., иными словами, нам нужно оценить вероятность попадания точки

$$\xi_t = \left(Y_t^1, Y_t^2, \dots, Y_t^m, U_t^1, U_t^2, \dots, U_t^l\right)$$

в параллелепипед G_1:

$$P\{\xi_t \in G_1\}$$

Воспользовавшись понятием геометрической вероятности [3], получим:

$$P\{\xi_t \in G_1\} = \frac{\mathrm{mes}(G_1)}{\mathrm{mes}(G)}, \tag{24}$$

где $\mathrm{mes}(G)$ ($\mathrm{mes}(G_1)$) – мера области G (G_1). В нашем случае $\mathrm{mes}(G)$ и $\mathrm{mes}(G_1)$ представляют собой «объемы» $m+l$ - мерных параллелепипедов G и G_1:

$$\mathrm{mes}(G) = \left(\prod_1^m (B_i - A_i)\right) \times \left(\prod_1^l \left(D_j - C_j\right)\right) \tag{25}$$

$$\mathrm{mes}(G_1) = \left(\prod_1^m (B_i^1 - A_i^1)\right) \times \left(\prod_1^l \left(D_j^1 - C_j^1\right)\right) \tag{26}$$

Заметим, что формулы (25) и (26) представляют собой $m+l$ - мерные аналоги формулы объема прямоугольного параллелепипеда.

Из формул (24)-(26) вытекает, что

$$P\{\xi_t \in G_1\} = \frac{\left(\prod_1^m (B_i^1 - A_i^1)\right) \times \left(\prod_1^l \left(D_j^1 - C_j^1\right)\right)}{\left(\prod_1^m (B_i - A_i)\right) \times \left(\prod_1^l \left(D_j - C_j\right)\right)} \tag{27}$$

Выводы

Полученная формула (27) позволяет вычислить вероятность бесперебойной работы ТС в некоторый момент времени t. Заметим, что найденная вероятность не зависит от временного параметра t. Отметим также, что границы интервалов $[A_i, B_i]$, $[A_i^1, B_i^1]$, $\left[C_j, D_j\right]$, $[C_i^1, D_i^1]$ можно определить экспериментальным образом, т.е. оценить с помощью статистических методов.

Список литературы

1. Капур К. Надежность и проектирование систем / К. Капур, Л. Ламберсон // Надежность и проектирование систем. – М.: «Мир», 1980. – 605 с.

2. Джонсон. Н. Статистика и обработка эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных / Н. Джонсон, Ф. Лион // Статистика и обработка эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных. – М.: «Мир», 1980. – 512 с.

3. Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. // Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: «Вища школа», 1979. – 408 с.

4. Гихман И.И. Теория случайных процессов / Гихман И.И., Скороход А.В., // Теория случайных процессов. – М.: «Наука», Т.1. 1971. – 664 с.

Шурко Г.К., Шурко І.Л. Ймовірнісна модель безвідмовної роботи технічної системи

Анотація. *Побудовано ймовірнісну модель безвідмовного функціонування технічної системи. Наведено формулу для обчислення ймовірності того, що технічна система в певний момент часу буде перебувати в режимі безвідмовної роботи.*

Ключові слова: *технічна система, ймовірнісна модель, ймовірність безвідмовної роботи*

Shurko G.K., Shurko I.L. Probability model technical system uptime

Abstract. *Built probabilistic model of trouble-free operation of technical systems. The formula to calculate the probability that the technical system at a time will be in the mode uptime.*

Keywords: *technical system, probability model, the probability uptime*

Стаття надійшла до редакції 17.02.2015 р.