УДК 519.17

ШУРКО Г.К., к. ф.-м. н., доцент;
ШУРКО И.Л., к.ф.-м. н., доцент;
Донецкий национальный университет

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЦАХ ИНТЕГРАТИВНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕГО ПОВЕДЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Построена вероятностная модель эволюции технической системы во времени, получена оценка вероятности нахождения в детерминированных криволинейных границах интегративного показателя, характеризующего поведение технической системы.
***Ключевые слова**: техническая система, интегративный показатель, вероятностная модель, криволинейные границы, вероятность нахождения в криволинейных границах*

Анализ проблемы

Построение вероятностной модели эволюции технической системы (далее ТС) во времени с помощью некоторого интегративного показателя, характеризующего поведение ТС, подверженной возмущающему воздействию как экзо- так и эндогенных случайных факторов, возможно с помощью случайных процессов, задаваемых конечноразностными соотношениями.

Актуальной является задача оценки вероятности нахождения в детерминированных криволинейных границах интегративного показателя по наблюдениям над ним в фиксированные моменты времени на определенном временном интервале.

Анализ последних исследований и публикаций

Вопросам оценки вероятности нахождения в криволинейных границах случайных процессов (как детерминированных, так и случайных), представляющих собой решения стохастических дифференциальных уравнений, посвящено немало работ, некоторые из которых стали классическими [6].

Построение вероятностной модели поведения ТС, характеризуемой посредством некоторого интегративного показателя, описываемого конечноразностным уравнением, а также оценка вероятности его нахождения в детерминированных криволинейных границах основывается на методах теории вероятностей [3], математической статистики [2], теории случайных процессов [4].

Выполненные исследования позволили получить оценку вероятности нахождения в детерминированных криволинейных границах интегративного показателя, характеризующего поведение технической системы.

Цель работы

Получить оценку вероятности нахождения в детерминированных криволинейных границах интегративного показателя, характеризующего поведение технической системы.

Основной раздел

Пусть имеется некоторая техническая система (ТС), характеризуемая рядом показателей (параметров), изменяющих свои значения во времени. Допустим, что на основании этих показателей построен некоторый интегративный показатель $\xi(t)$, описывающий эволюцию ТС и учитывающий «вклад» каждого из показателей.

Т.к. практически любая ТС подвержена возмущающему воздействию как экзо- так и эндогенных случайных факторов, то интегративный показатель $\xi(t)$, по сути является случайным процессом.

Предположим, что значения интегративного показателя $\xi(t)$ наблюдаются нами на временном интервале $[0,T]$ в некоторые фиксированные моменты времени

$$t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T \tag{1}$$

Предположим также, что указанные моменты времени являются равноотстоящими, что, впрочем, не умаляет общности, и пусть

$$t_{i+1} - t_i = h, i = \overline{1, n-1} \tag{2}$$

Допустим, что процесс $\xi(t)$ представим в виде при $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$\begin{gathered}\xi(t) = \xi(0) + \sum_{0}^{i-1} a(t_k)(t_{k+1} - t_k) + a(t_i)(t - t_i) + \\ + \sum_{0}^{i-1} b(t_k)\left(w(t_{k+1}) - w(t_k)\right) + \mathrm{b}(t_i)\left(w(t) - w(t_i)\right)\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $w(t)$ является стандартным винеровским процессом [5], т.е. гауссовским случайным процессом, каждая траектория которого выходит из начала координат ($w(0) = 0$), а математическое ожидание и дисперсия его равны

$$M\left(w(t)\right) = 0 \tag{4}$$

$$D\left(w(t)\right) = t \tag{5}$$

Коэффициенты *a(t)* и *b(t)* являются некоторыми неслучайными функциями.

Заметим, что стандартный винеровский процесс $w(t)$ является процессом с независимыми приращениями [5], т.е. случайные величины $\Delta w(t_i) = (w(t_{i+1}) - w(t_i)$, $\Delta w(t_j) = w(t_{j+1}) - w(t_j)$ при $i \neq j$ являются гауссовскими независимыми величинами, при этом

$$M\left(\Delta w(t_i)\right) = 0 \tag{6}$$

$$D\left(\Delta w(t_i)\right) = \Delta t_i = h \tag{7}$$

Используя введенные выше обозначения, соотношение (2) и полагая $\xi(0) = \xi_0$, получим из (3) при $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$\xi(t) = \xi_0 + \sum_0^{i-1} a(t_k)(t_{k+1} - t_k) + a(t_i)(t - t_i) + \\ + \sum_0^{i-1} b(t_k)(w(t_{k+1}) - w(t_k)) + b(t_i)\left(w(t) - w(t_i)\right) = \xi_0 + A(t) + \zeta(t) \tag{8}$$

где

$$A(t) = \sum_0^{i-1} a(t_k)(t_{k+1} - t_k) + a(t_i)(t - t_i) \tag{9}$$

$$\zeta(t) = \sum_0^{i-1} b(t_k)(w(t_{k+1}) - w(t_k)) + b(t_i)\left(w(t) - w(t_i)\right) \tag{10}$$

Пусть y$=\varphi$(t), t$\in [0, T]$ – некоторая неслучайная функция, $\varphi(0) = \xi_0$.

Оценим вероятность нахождения в детерминированных криволинейных границах траекторий случайного процесса $\xi(t)$, характеризующего состояние ТС в момент времени t:

$$P\left\{|\xi(t)| < \varphi(\mathrm{t})\right\} = P\left\{-\varphi(\mathrm{t}) < \xi(t) < \varphi(\mathrm{t})\right\} \tag{11}$$

Используя соотношения (8) – (11), получим:

$$P\left\{|\xi(t)| < \varphi(\mathrm{t})\right\} = P\left\{-\varphi(\mathrm{t}) - \mathrm{A}(\mathrm{t}) - \xi_0 < \zeta(t) < \varphi(\mathrm{t}) - \mathrm{A}(\mathrm{t}) - \xi_0\right\} \tag{12}$$

Положим,

$$\zeta_k = b(t_k)\ \Delta w(t_k)$$
$$\zeta_k(t) = b(t_k)(w(t) - w(t_i)),\ k = \overline{1, n-1}$$

Учитывая неслучайность коэффициента b(t), получаем [4], что ζ_k и $\zeta_k(t)$ являются попарно независимыми, при этом ζ_k представляет собой гауссовскую случайную величину с параметрами

$$a_k = M\,\zeta_k = 0 \tag{13}$$
$$\sigma_k^2 = D\,\zeta_k = b_k^2\,\Delta t_k = b_k^2\,h \tag{14}$$

а случайный процесс $\zeta_k(t)$ представляет собой гауссовский случайный процесс с параметрами

$$a_k(t) = M\,\zeta_k(t) = 0 \tag{15}$$
$$\sigma_k^2(t) = D\,\zeta_k(t) = b_k^2(t - t_k) \tag{16}$$

Введем в рассмотрение нормированный гауссовский случайный процесс $\tilde{\zeta}(t)$, разделив $\zeta(t)$ на $\sigma_k(t)$:

$$\tilde{\zeta}(t) = \frac{\zeta(t)}{\sigma_k(t)} \tag{17}$$

Тогда функцией распределения нормированного гауссовского случайного процесса $\tilde{\zeta}(t)$ будет служить функция Лапласа [3]:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt \ ,$$

значения которой табулированы.

Тогда из (12), (17) следует, что

$$\begin{aligned} P\left\{|\xi(t)| < \varphi(\mathrm{t})\right\} &= P\left\{\frac{-\varphi(\mathrm{t}) - \mathrm{A}(\mathrm{t}) - \xi_0}{\sigma_k(t)} < \tilde{\zeta}(t) < \frac{\varphi(\mathrm{t}) - \mathrm{A}(\mathrm{t}) - \xi_0}{\sigma_k(t)}\right\} = \\ &= \Phi\left(\frac{\varphi(\mathrm{t}) - \mathrm{A}(\mathrm{t}) - \xi_0}{\sigma_k(t)}\right) - \Phi\left(\frac{-\varphi(\mathrm{t}) - \mathrm{A}(\mathrm{t}) - \xi_0}{\sigma_k(t)}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

Ответим теперь на вопрос, как по результатам наблюдений в определенные моменты времени t_k над интегративным показателем $\xi(t)$ построить оценки для коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$.

Из соотношения (3) следует, что

$$\begin{aligned} &\Delta\xi(t_i) = \xi(t_{i+1}) - \xi(t_i) = \\ &= \xi_0 + \sum_0^i a(t_k)\Delta t_k + \sum_0^i b(t_k)\Delta w(t_k) - \xi_0 - \sum_0^{i-1} a(t_k)\Delta t_k - \sum_0^{i-1} b(t_k)\Delta w(t_k) = \\ &= a(t_i)h + b(t_i)\ \Delta w(t_i) \end{aligned} \tag{19}$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей равенства (19) и, учитывая неслучайность коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ и соотношение (6), получим:

$$M\ \Delta\xi(t_i) = a(t_i)h \tag{20}$$

Отсюда следует:

$$a(t_i) = \frac{M\ \Delta\xi(t_i)}{h} \tag{21}$$

Учитывая тот факт, что точечной оценкой для математического ожидания некоторой случайной величины служит выборочная средняя величина [1,2], заменяя в (21) математическое ожидание на соответствующую выборочную среднюю, получим оценку $\hat{a}_i$ для соответствующего значения коэффициента $a(t_i)$:

$$\hat{a}_i = \frac{\overline{\Delta\xi(t_i)}}{h} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}\Delta\xi(t_i)}{h} = \frac{\xi(T)-\xi_0}{nh} \tag{22}$$

где $\overline{\Delta\xi(t_i)}$ – выборочная средняя величина приращений, наблюдаемых в моменты времени t_i значений интегративного показателя $\xi(t)$.

Заметим, что полученная оценка является одной и той же для каждого $i=\overline{1,n-1}$.

Далее, из соотношения (19) следует, что

$$\begin{gathered}\left(\Delta\xi(t_i)\right)^2 = \left(a(t_i)h + b(t_i)\ \Delta w(t_i)\right)^2 = \\ = \left(a(t_i)\right)^2 h^2 + 2b(t_i)\ \Delta w(t_i)a(t_i)h + \left(b(t_i)\right)^2\left(\Delta w(t_i)\right)^2\end{gathered} \tag{23}$$

Взяв от обеих частей равенства (23) математическое ожидание и учитывая равенства (7) и (22), получим:

$$\begin{gathered}M\left(\Delta\xi(t_i)\right)^2 = \left(a(t_i)\right)^2 h^2 + \left(b(t_i)\right)^2 h = \\ = \frac{\left(M\ \Delta\xi(t_i)\right)^2}{h^2}\ h^2 + \left(b(t_i)\right)^2 h = M\left(\Delta\xi(t_i)\right)^2 + \left(b(t_i)\right)^2 h\end{gathered} \tag{24}$$

Отсюда следует, что

$$\left(b(t_i)\right)^2 = \frac{M\left(\Delta\xi(t_i)\right)^2 - M\left(\Delta\xi(t_i)\right)^2}{h} \tag{25}$$

Тогда оценка $\hat{b}_i$ для соответствующего значения коэффициента $b(t_i)$ имеет вид:

$$\hat{b}_i = \sqrt{\frac{\overline{(\Delta\xi(t_i))^2} - \hat{a}_i^2}{h}} \tag{26}$$

где $\overline{(\Delta\xi(t_i))^2}$ – выборочная средняя величина квадратов приращений, построенных по наблюдаемым в моменты времени t_i значениям интегративного показателя $\xi(t)$.

Пусть теперь $t\in[t_i,t_{i+1}]$.

Заменив в выражениях (9) и (10) значения коэффициентов $a(t_i)$ и $b(t_i)$ соответствующими оценками, получим:

$$\hat{A}(t) = \sum_{0}^{i-1} \hat{a}_k \left(t_{k+1} - t_k\right) + \hat{a}_i \left(t - t_i\right) \tag{27}$$

$$\hat{\zeta}(t) = \sum_{0}^{i-1} \hat{b}_k \left(w(t_{k+1}) - w(t_k)\right) + \hat{b}_i \left(w(t) - w(t_i)\right) \tag{28}$$

Тогда равенство (18) будет иметь вид:

$$P\left\{\left|\xi(t)\right| < \varphi(\mathrm{t})\right\} = \Phi\left(\frac{\varphi(\mathrm{t}) - \hat{A}(t) - \xi_0}{\hat{b}_k\left(t - t_i\right)}\right) - \Phi\left(\frac{-\varphi(\mathrm{t}) - \hat{A}(t) - \xi_0}{\hat{b}_k\left(t - t_i\right)}\right) \tag{29}$$

Таким образом, соотношение (29) дает возможность оценит вероятность нахождения в момент времени t значения интегративного показателя в детерминированных границах.

Замечание. Модель (3), описывающая поведение технической системы с помощью интегративного показателя $\xi(t)$, построена в предположении, что указанный показатель эволюционирует во времени непрерывным образом. При этом возможно обобщение указанной модели на случай, когда процесс $\xi(t)$ в некоторые случайные моменты времени меняет свои значения скачкообразно, причем скачки представляют собой значения некоторой дискретной случайной величины с известным распределением.

Список литературы

1. Капур К. Надежность и проектирование систем / К. Капур, Л. Ламберсон // Надежность и проектирование систем. – М.: «Мир», 1980. – 605 с.

2. Джонсон Н. Статистика и обработка эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных / Н. Джонсон, Ф. Лион // Статистика и обработка эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных. – М.: «Мир», 1980. – 512 с.

3. Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. // Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: «Вища школа», 1979. – 408 с.

4. Гихман И.И. Теория случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход // Теория случайных процессов. – М.: «Наука», Т.1., 1971. – 664 с.

5. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения/ И.И. Гихман, А.В. Скороход // Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – К.: «Наукова думка», 1982. – 612 с.

Шурко Г.К., Шурко І.Л. Оцінка ймовірності знаходження в криволінійних межах інтегративного показника, що характеризує поведінку технічної системи.

Анотація. *Побудовано ймовірнісну модель поведінки ТС, яка характеризується за допомогою інтегративного показника, що описується скінченнорізнісним рівнянням. Отримана оцінка ймовірності знаходження в криволінійних детермінованих межах даного інтегративного показника.*

Ключові слова: *технічна система, інтегративний показник, ймовірнісна модель, криволінійні межі, ймовірність знаходження в криволінійних межах.*

Shurko G.K., Shurko I.L. Estimating the probability of being in a curvilinear boundary integrated indicator characterizing the behavior technical system.

Abstract. *We construct a probability model for the evolution of the technical system in time, an estimate of the probability of being in a deterministic curved boundaries integrative index that characterizes the behavior of the technical system.*

Keywords: *technical system, integrated indicator, probabilistic model, curved borders, the probability of being in a curvilinear boundar*

Стаття надійшла до редакції 09.09.2015 р.