

УДК 629.113

**МОЙСЯ Д.Л., старший преподаватель,  
Донецкая академия автомобильного транспорта**

## **АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОПОЕЗДА С УПРАВЛЯЕМЫМ ПОЛУПРИЦЕПОМ В КРУГОВЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ**

*Выполнен анализ устойчивости стационарных режимов автопоезда с управляемым полуприцепом. Устойчивость прямолинейного режима оценена на основе критерия Рауса – Гурвица. Поиск области устойчивости произведен в пространстве параметров: продольная скорость – передаточное отношение механизма управления осью полуприцепа. Устойчивость круговых режимов проанализирована на основе анализа собственных значений системы линейного приближения.*

**Ключевые слова:** устойчивость, модель автопоезда, продольная скорость, ось полуприцепа, кольцевой коридор, диапазон скоростей

### **Введение**

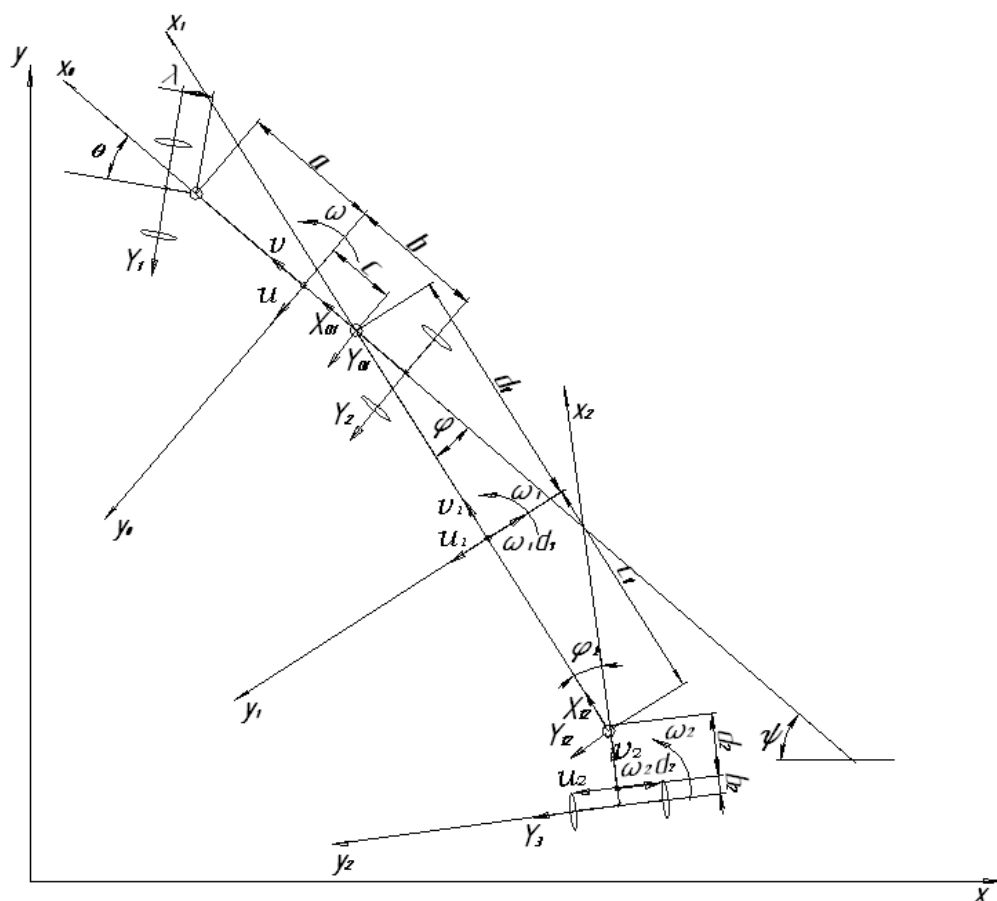
В более ранних работах [1-2] были разработаны рекомендации по выбору передаточного отношения механизма управления осью полуприцепа на основе условий совпадения следа второй и третьей осей в круговых стационарных режимах без анализа условий их устойчивости. В данной статье выполнен анализ устойчивости стационарных режимов автопоезда для рекомендованных передаточных отношений. Устойчивость круговых стационарных режимов движения изучена менее полно – обычно рассматривались случаи движения по траекториям достаточно большого радиуса [4-6]. В данной работе развивается программно-вычислительная база, позволяющая исследовать устойчивость и круговых стационарных состояний модели автопоезда с управляемым полуприцепом.

### **Цель работы**

Исследование устойчивости прямолинейного и круговых стационарных режимов движения модели автопоезда с управляемым полуприцепом. Получение условий вписываемости автопоезда в кольцевой коридор европейского стандарта.

### **1. Математическая модель трехзвенного автопоезда с безпорным промежуточным звеном и жестким рулевым управлением тягача.**

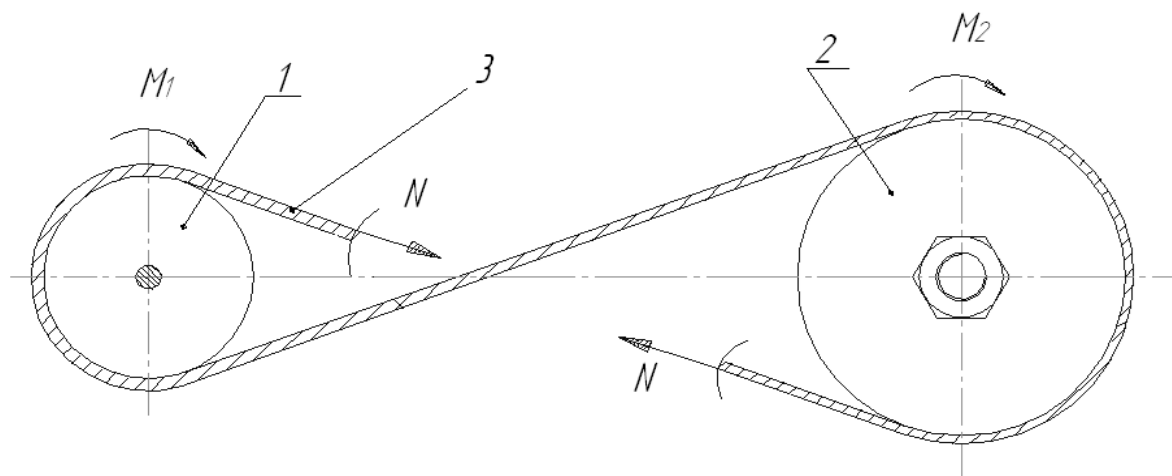
Передняя ось тягача может поворачиваться на угол  $\theta$ , рис.1. Связь между звеньями осуществляется цилиндрическими шарнирами, которые допускают относительное поворачивание звеньев в плоскости их движения. Ось полуприцепа поворачивается на угол  $\theta_1$  относительно продольной оси полуприцепа с помощью тросовой передачи, которая соединяет шкивы, неподвижно прикрепленные к тягачу и к поворотной оси полуприцепа соответственно (рис.2). Трехзвенный автопоезд, который состоит из тягача, полуприцепа и поворотной оси (см. рис.2), при отсутствии управления осью будет неустойчивым (вращение полуприцепа будет непредвиденным). При введении пассивного управления осью (вводится жесткая связь между углом складывания и углом поворота управляемой оси полуприцепа) может быть решена задача стабилизации и улучшения показателей маневренности. При этом возникает вопрос выбора синтеза такого управления.



**Рис.1. Принципиальная расчетная схема автопоезда**

Обеспечить заданную траекторию движения полуприцепа можно за счет управления поворотной осью полуприцепа (см. рис.1). Управление осью тележки предлагается осуществлять передачей с гибкой связью (тросовой передачей, обозначенной на рис. 2 заштрихованной полосой). Тросовая передача состоит из системы шкивов 1, 2 и троса 3 (рис.2)

При повороте автопоезда между продольными осями тягача и полуприцепа образуется угол складывания, за счет чего на поверхности соприкосновения шкива 1 и троса 3 возникают силы трения. Эти усилия передаются вдоль троса на шкив 2. Шкив 2 неподвижно связан с управляемой осью тележки, то есть момент сил трения будет вращать и ее.



**Рис.2. Схема тросовой передачи**

Вращающие моменты, которые возникают на шкивах, связанные соотношением:

$$M_1 = PCH \cdot M_2;$$

где РСН – передаточное соотношение тросовой передачи.

Положение каждого звена автопоезда задается координатами  $x_i$ ,  $y_i$  его центра масс  $C_i$  и курсовым углом  $\psi_i$  (который образовывается между продольной осью соответствующего звена и осью абсцисс (x) неподвижной системы координат).

Параметры системы:  $v$  – продольная составляющая скорости центра масс тягача;  $a$ ,  $b$  – расстояние от центра масс тягача к точкам крепления передней и задней осей тягача;  $c$  – расстояние от центра масс тягача до точки сцепки с задним звеном;  $d_1$ ,  $d_2$  – расстояние от центра масс полуприцепа и оси до точки сцепки соответственно; коэффициент трения  $k_f$ ; коэффициенты увода на осях ( $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ); коэффициенты сцепления при определении боковых сил увода ( $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_3$ ); установленный угол поворота колес управляемого модуля  $\theta$ ; приведенная боковая реакция полотна дороги на опорных осях тягача и полуприцепа ( $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$ ).

Обозначим через  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  – центры масс,  $m$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  – массы,  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  – центральные моменты инерции относительно соответствующих вертикальных осей звеньев автопоезда,  $\phi$  – угол складывания (образуется между продольными осями тягача и полуприцепа).

$\omega = \dot{\psi}$ ,  $\omega_1 = \dot{\psi}_1$ ,  $\omega_2 = \dot{\psi}_2$  – абсолютные угловые скорости звеньев,

тогда

$$\omega_1 = \omega - \dot{\phi}, \quad \omega_2 = \omega_1 - \dot{\theta}_1$$

Зададим абсолютные скорости точек  $C$ ,  $C_1$  разложениями по ортам соответствующих базисов:

$$\begin{aligned} v_c &= i_0 v + j_0 u, \quad v_{c1} = i_1 v_1 + j_1 u_1, \\ v &= \dot{x} \cdot \cos \psi + \dot{y} \cdot \sin \psi, \quad u = -\dot{x} \cdot \sin \psi + \dot{y} \cdot \cos \psi, \\ v_1 &= v \cdot \cos \phi - (u - \omega \cdot c) \cdot \sin \phi, \quad u_1 = v \cdot \sin \phi + (u - \omega \cdot c) \cdot \cos \phi - \omega_1 \cdot d_1, \\ v_2 &= v_1 \cdot \cos \phi_1 - (u_1 - \omega_1 \cdot b_1) \cdot \sin \phi_1, \quad u_2 = v_1 \cdot \sin \phi_1 + (u_1 - \omega_1 \cdot b_1) \cdot \cos \phi_1 - \omega_2 \cdot d_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Система дифференциальных уравнений движения автопоезда описывает изменение фазовых переменных ( $u$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $\Phi$ ):  $u$  – поперечная составляющая скорости центра масс тягача;  $U$  – ее производная в подвижной системе координат;  $\Omega$  – угловое ускорение относительно вертикальной оси;  $\Phi$  – скорость складывания угла  $\phi$ ;  $\theta$  – угловое ускорение полуприцепа.

Среди разных теорий качения упругодеформируемых колес самое большое распространение получила аксиоматика И. Рокара, согласно которой боковая реакция  $Y_i$  полотна дороги, приложенная в центре пятна контакта упругого катящегося колеса, является функцией лишь так называемого угла увода  $\delta_i$ .

Приведенные углы бокового увода колесных осей определяются выражениями:

$$\delta_1 = \theta - \arctg \frac{(u + a\omega)}{v}; \quad \delta_2 = \arctg \frac{-u + b\omega}{v}; \quad \delta_3 = -\theta_1 + \arctg \frac{-u_1 + b_1\omega_1}{v_1}. \quad (2)$$

Зависимости сил бокового увода, которые имеют эмпирическое происхождение [3], можно аппроксимировать зависимостью (монотонно возрастающая функция, которая имеет характер кривой насыщения)

$$Y_i = k_i \delta_i / \sqrt{1 + (k_i \delta_i / \chi_i Z_i)^2}, \quad (3)$$

где  $Z_i$  – вертикальные реакции опорной поверхности на осях.

Пренебрегая перераспределением нормальных реакций между бортами, будем рассматривать одно сведенное колесо с центром в середине каждой оси. Тогда

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{l} [mgb + m_1 g \frac{c_1}{L_1} (b - c)]; \quad Z_2 = \frac{1}{l} [mga + m_1 g \frac{c_1}{L_1} (c + a)]; \\ Z_3 &= m_2 \cdot g + \frac{m_1 \cdot g \cdot d_1}{L_1}; \quad l = a + b; \quad L_1 = d_1 + c_1; \quad L_2 = d_2 + b_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Примечание: дальше будем считать  $L_2 \approx 0$  (соответствующие размеры опорной оси сравнительно малые).

На основе общих теорем динамики получены следующие уравнения движения.

### 1. Уравнение движения тягача

$$\begin{aligned} m(V - u\omega) - X_{01} + Y_1 \sin(\theta) &= 0, \\ m(U + v\omega) - Y_{01} - Y_1 \cos(\theta) - Y_2 &= 0, \\ J\Omega + Y_{01}c - Y_1a \cos(\theta) + Y_2b + M_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

### 2. Уравнение движения полуприцепа

$$\begin{aligned} m_1(V_1 - u_1\omega_1) + X_{01} \cos(\phi) - Y_{01} \sin(\phi) - X_{12} &= 0, \\ m_1(U_1 + v_1\omega_1) + X_{01} \sin(\phi) + Y_{01} \cos(\phi) - Y_{12} &= 0, \\ J_1\Omega_1 + X_{01}d_1 \sin(\phi) + Y_{01}d_1 \cos(\phi) + Y_{12}c_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

### 3. Уравнение движения тележки

$$\begin{aligned} m_2(V_2 - u_2\omega_2) + X_{12} \cos(\theta_1) - Y_{12} \sin(\theta_1) &= 0, \\ m_2(U_2 + v_2\omega_2) + X_{12} \sin(\theta_1) + Y_{12} \cos(\theta_1) - Y_3 \cos(\theta_1) &= 0, \\ J_2\Omega_2 + X_{12}d_2 \sin(\theta_1) + Y_{12}d_2 \cos(\theta_1) + Y_3 \cos(\theta_1)b_2 + M_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

## **2. Анализ устойчивости прямолинейного режима движения.**

На основе условий устойчивости Рауса – Гурвица построены области устойчивости в плоскости характерных конструктивных и управляемых параметров модели автопоезда (например, передаточного отношения механизма управления осью полуприцепа и продольной скорости движения центра масс тягача, но выбор этих параметров может варьироваться в зависимости от поставленной задачи).

Необходимым условием устойчивости являются положительность всех коэффициентов характеристического уравнения (условия А. Стодолы). Необходимыми и достаточными условиями устойчивости стационарного режима являются положительность всех определителей Гурвица и положительность коэффициента при старшем члене характеристического уравнения [8].

При выбранных числовых значениях конструктивных параметров системы (параметры автопоезда соответствуют работе [7]):

$$m = 6500 \text{ кг}, m_2 = 36500 \text{ кг}, a = 0,4 \text{ м}, b = 3,2 \text{ м}, c = 2,7 \text{ м}, c_1 = 2,6 \text{ м}, d_1 = 5,6 \text{ м}, m_3 = 800 \text{ кг}$$

$$d_2 = 0,8 \text{ м}, b_2 = 0,2 \text{ м}, k_1 = 160000 \text{ Н}, k_2 = 226000 \text{ Н}, k_3 = 270000 \text{ Н}, J = 25410 \text{ кг м}^2,$$

$$J_1 = 3920000 \text{ кг м}^2, J_2 = 775 \text{ кг м}^2, \chi_i = 0,8$$

в плоскости параметров «передаточное отношение механизма управления осью полуприцепа» и «продольная скорость движения центра масс тягача» получены границы устойчивости (рис.3)

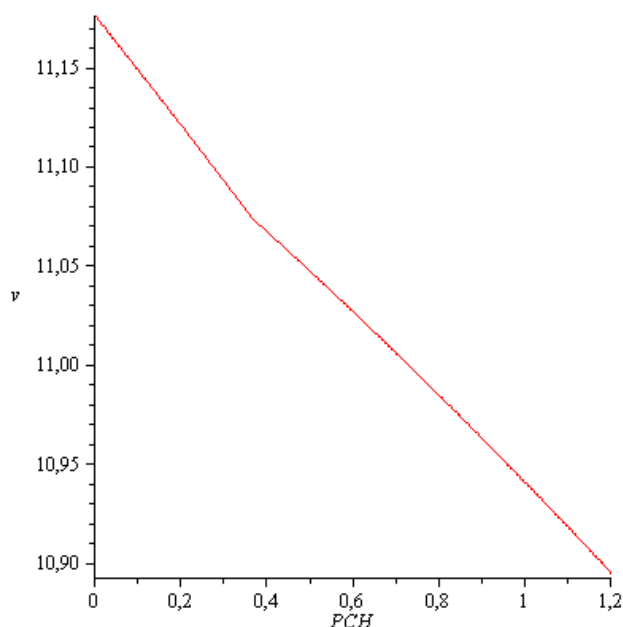


Рис.3. Область устойчивости в плоскости параметров  $РСН, v$

Область устойчивости, представленная на рисунке, определяется условием положительности старшего определителя Гурвица (область устойчивости находится на графике ниже линии  $DG[4]=0$ ).

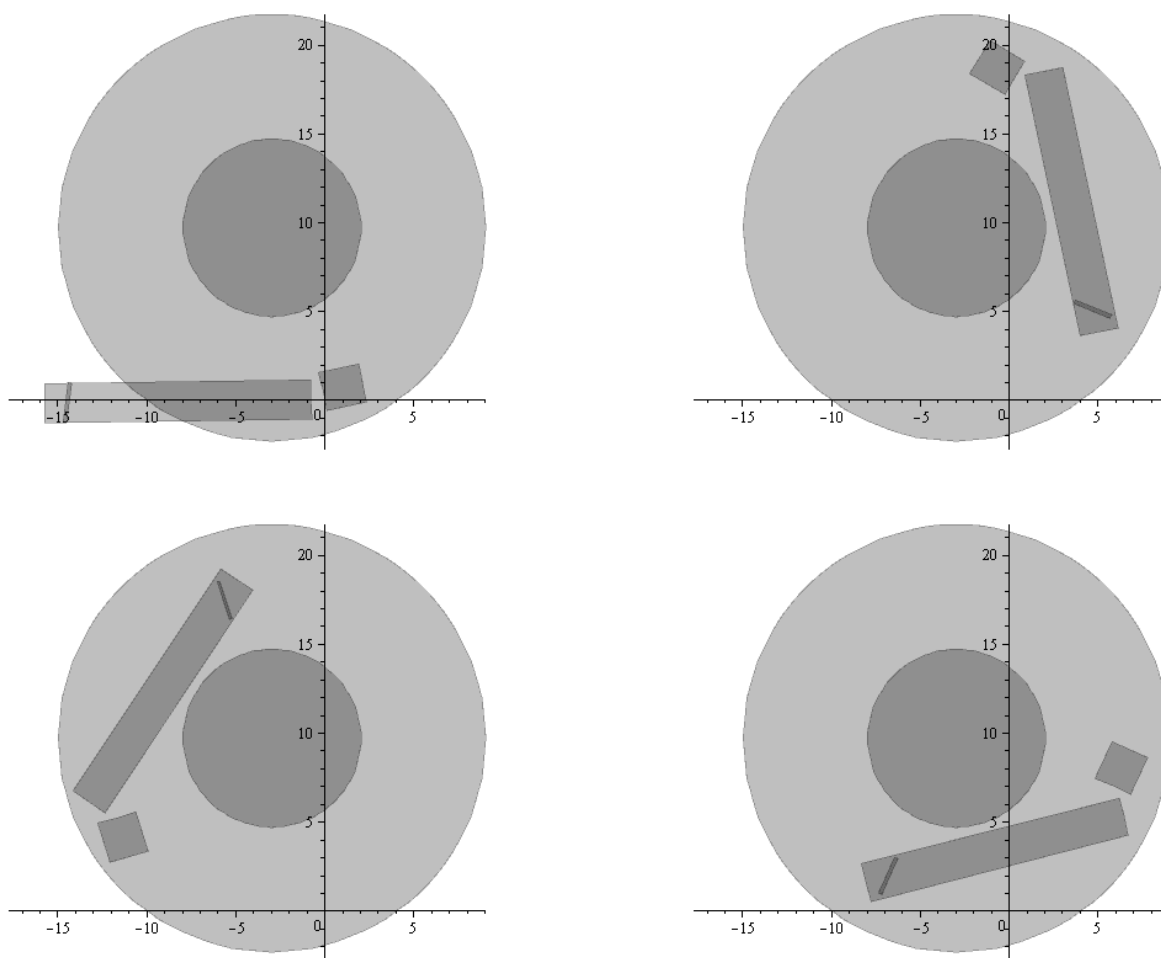
### 3. Анализ устойчивости круговых режимов движения.

На основании результатов анализа рациональных значений передаточных отношений [2], обеспечивающих приближенное совпадение траекторий качения колес второго и третьего ряда, выбираем значение передаточного отношения  $РСН=0,75$ , которое обеспечивает условие устойчивости прямолинейного движения. Далее определим условия устойчивости круговых стационарных режимов при выбранном значении передаточного отношения (режим устойчивый, если действительные части корней характеристического уравнения отрицательны).

Выбранные на основе численного интегрирования, параметры управления  $v = 2,5 \text{ м/с}$  и  $\theta = 0,5 \text{ рад}$  обеспечивают вписываемость автопоезда в кольцевой коридор, габариты которого соответствуют стандартам ЕС (рис. 4).

Графическое представление конфигурации автопоезда получено в программном пакете «Maple», выполнялось на основе численного интегрирования, указывает на устойчивость реализуемого режима движения.

Итерационный метод нахождения стационарного режима движения автопоезда  $\{u=0,7733 \text{ м/с} ; \omega=0,2756 \text{ рад/с} ; \varphi_1=-0,9001 \text{ рад}\}$  подтверждает результаты численного интегрирования.



**Рис.4. Прохождение автопоездом стандартного кольцевого коридора**

Отобразим фазовые переменные, соответствующие этому стационарному режиму, в виде интегральных кривых, полученных в результате численного моделирования матмодели.

Графики, изображенные на рис. 5, подтверждают, что с течением времени все фазовые переменные стремятся к постоянным величинам, отвечающим стационарному режиму.

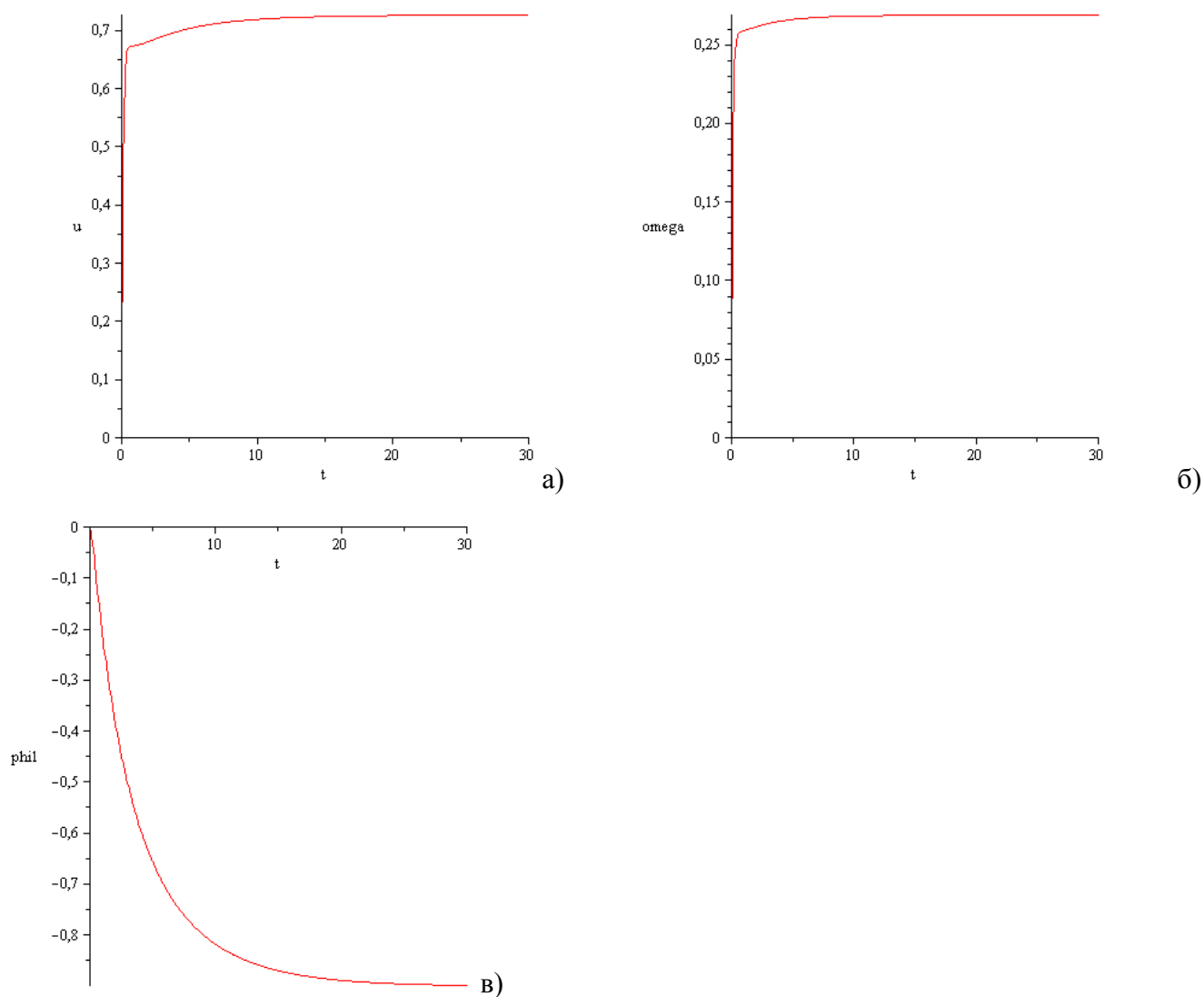
Для подтверждения устойчивости кругового стационарного режима определим спектр собственных значений соответствующего характеристического уравнения:

На рисунке 6 видно, что все действительные части корней характеристического уравнения отрицательные, что подтверждает устойчивость полученного стационарного режима.

Сопоставим радиусы движения центров второй и третьей осей автопоезда, полученные при помощи матмоделей линейной и нелинейной постановок при движении по стандартному кольцевому коридору. При выбранных параметрах системы ( $v = 2,5$  м/с,  $\theta = 0,5$  и  $PCN = 0,75$ ) получаем следующие значения радиусов:

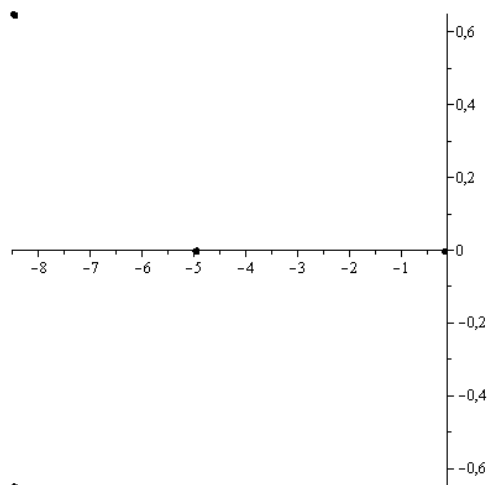
- $R_2 = 10,3$  м;  $R_3 = 11,2$  м – линейная модель;
- $R_2 = 10,3$  м;  $R_3 = 9,3$  м – нелинейная модель.

Очевидно, что при малых скоростях и  $PCN < 1$ , радиусы  $R_2$  и  $R_3$  должны быть близки для линейной и нелинейной моделей. Из-за простоты расчетов линейную модель можно применять в качестве «оценочной», а нелинейную – для окончательных уточнений. Так при помощи нелинейной модели было определено, что при  $\theta = 0,5$  и  $PCN = 0,75$  потеря устойчивости произойдет, когда скорость автопоезда достигнет  $v_{кр} = 6,25$  м/с. При данной скорости пара комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения будут иметь нулевую действительную часть, что говорит о флатерной потере устойчивости.

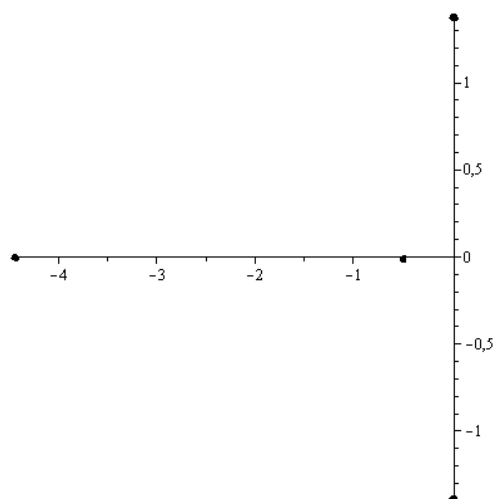


а) – поперечная скорость; б) угловая скорость; в) угол складывания

**Рис.5. Графики изменения фазовых переменных при вхождении автопоезда в круговой стационарный режим**



**Рис.6. Спектр собственных значений характеристического уравнения, отвечающего круговому режиму движения**



**Рис.7. Спектр собственных значений характеристического уравнения, отвечающего флатерной потере устойчивости кругового режима движения**

### Выводы

Разработана программно-вычислительная база, позволяющая строго обосновать выбор значения передаточного отношения механизма управления осью полуприцепа (РСН), обеспечивающего вписываемость в стандартный кольцевой коридор и устойчивость прямолинейного движения в заданном диапазоне скоростей.

### Список литературы

1. Мойся Д.Л. Експериментальне визначення маневреності автопоїзда з керованим напівприцепом. // Вісник національного транспортного університету. – 2011р. – № 24.
2. Мойся Д.Л. Анализ поворачиваемости двухзвенного автопоезда с управляемой осью полуприцепа. // Наука и инновации в области сервиса автотранспортных средств и обеспечения безопасности дорожного движения: Материалы Междунар. науч.-практ. конф. / под ред. Б.Ю. Калмыкова [и др.]; Южно-Рос. гос. ун-т экономики и сервиса. – Шахты: ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС», 2012. – 202 с. : ил.
3. Рокар И. Неустойчивость в механике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 288 с.
4. Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. – Киев: Наук. думка, 1990. – 232 с.
5. Эллис Д.Р. Управляемость автомобиля. – М.: Машиностроение, 1975. – 216 с.
6. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Бифуркации и устойчивость стационарных состояний связки катящихся упругодеформированных тел // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 8. – С. 101–106.
7. Nonlinear Dynamics of a Wheeled Vehicle - R. Andrejceloski, J. Awrejcewicz (Springer, 2005) WW – 326p
8. Постников М.М. Устойчивые многочлены. – М.: Наука, 1981. – 176 с.

**Мойся Д.Л. Аналіз стійкості автопоїзда з керованим напівприцепом в кругових стаціонарних режимах**

***Анотація.** Виконаний аналіз стійкості стаціонарних режимів автопоїзда з керованим напівприцепом. Стійкість прямолінійного режиму оцінена на основі критерію Рауса-Гурвиця. Пошук області стійкості вироблений в просторі параметрів: подовжжня швидкість – передатне відношення механізму управління віссю напівприцепа. Стійкість кругових режимів проаналізована на основі аналізу власних значень системи лінійного наближення.*

***Ключові слова:** стійкість, модель автопоїзда, подовжжня швидкість, вісь напівприцепа, кільцевий коридор, діапазон швидкостей*



**Moisia D.L. Analysis of stability of lorry convoy with the guided semitrailer in the circular stationary modes**

**Abstract.** *The analysis of stability of the stationary modes of the road train with the managed semi-trailer is made. Stability of the rectilinear mode is evaluated on the basis of Raus's criterion – Gurvitsa. Search of area of stability is run in space of parameters: longitudinal speed – a gear ratio of the controlling mechanism a semi-trailer axis. Stability of the circular modes is analyzed on the basis of the analysis of own values of system of linear approach.*

**Keywords:** *stability, road train model, longitudinal speed, semi-trailer axis, ring corridor, speed range*

*Стаття надійшла до редакції 02.10.2015 р.*