

УДК 629.113

СТРЕЛЬНИК Ю.Н., ст. преподаватель
Донецкая академия автомобильного транспорта

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ МОДЕЛИ АВТОМОБИЛЯ С УПРАВЛЯЕМОЙ ЗАДНЕЙ ОСЬЮ (АБСОЛЮТНО ЖЕСТКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ)

В статье проведен анализ устойчивости прямолинейного движения модели автомобиля с управляемой задней осью.

Ключевые слова: *устойчивость, модель автомобиля, прямолинейное движение, стационарное состояние.*

Введение

Для динамической системы (1)

$$\dot{x} = f(x), \quad x = x_1, \dots, x_n; \quad (1)$$

положение равновесия, или стационарное состояние x_{ss} , определяется решением системы уравнений $f(x_{ss}) = 0$.

Определение устойчивости стационарного состояния по Ляпунову:

Стационарное состояние x_{ss} системы (1) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого момента времени t_0 и произвольно малого ε существует такое $\delta_{t_0, \varepsilon} > 0$, что для всякого решения $x(t)$ той же системы, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$|x(t_0) - x_{ss}| < \delta_{t_0, \varepsilon}, \quad (2)$$

при всех $t > t_0$ выполняется неравенство

$$|x(t) - x_{ss}| < \varepsilon \quad (3)$$

Если имеется по крайней мере одна траектория, не удовлетворяющая этим условиям, то стационарное состояние x_{ss} неустойчиво: существует какая угодно малая окрестность ε , такая, что при любом δ найдутся $t^*, x(t_0)$:

$$|x(t_0) - x_{ss}| < \delta_{t_0, \varepsilon}, \text{ такие, как } |x(t^*) - x_{ss}| \geq \varepsilon. \quad (4)$$

В случае динамической системы удобно представлять процесс изменения фазовых переменных $(x_i(t), \dot{x}_i(t))$ – (координата, скорость изменения координаты) на фазовой плоскости, исключив параметр времени. Если точка остается неподвижной при изменении параметра t , то ей соответствует стационарный режим или особая точка системы. Так, устойчивому стационарному состоянию будут соответствовать фазовые траектории, выходящие из δ -окрестности стационарного состояния и в дальнейшем не покидающие его ε -окрестности (рис.1). На неустойчивость стационарного состояния будет указывать наличие хотя бы одной фазовой траектории, которая покидает ε -окрестность.

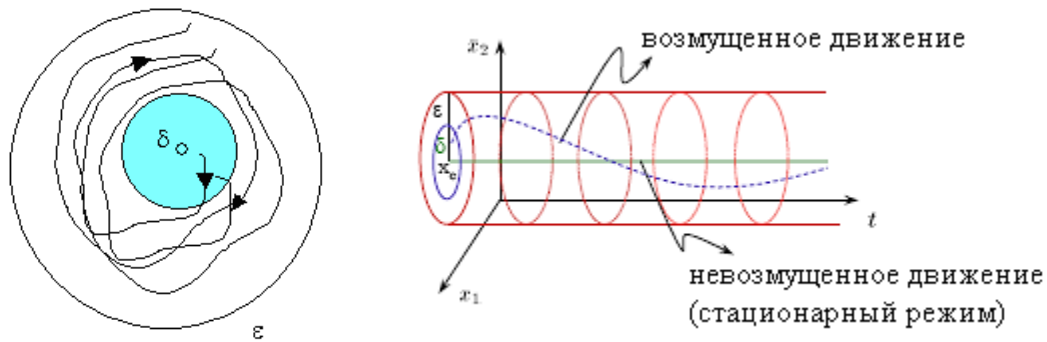


Рис.1. Качественный характер поведения фазовых траекторий в окрестности устойчивого стационарного режима.

Асимптотическая устойчивость. Стационарное состояние x_{ss} называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения $x(t)$, выходящие из δ -окрестности, неограниченно приближаются к x_{ss} при $t \rightarrow +\infty$.

В определении устойчивости положения равновесия, или стационарного состояния, по А. М. Ляпунову, отражается локальный характер этого понятия, т.е. рассматриваемые начальные и последующие возмущения, вообще говоря, – бесконечно малые величины.

Уравнения в вариациях

Рассмотрим уравнения движения некоторой динамической системы (пусть в данном случае это будет система второго порядка):

$$t \rightarrow +\infty \quad (5)$$

Система конечных уравнений

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= 0, \\ F(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

определяет множество положений равновесия, или стационарных состояний системы (5). Пусть (x_1^*, x_2^*) – одно из решений системы (6). Рассмотрим поведение решений $x(t)$ системы (5) в малой окрестности указанного стационарного состояния. Скорости изменения координат \dot{x}_1, \dot{x}_2 определяются линейными членами разложения правых частей системы (5) в ряд Тейлора в окрестности точки (x_1^*, x_2^*)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left. \frac{\partial G}{\partial x_1} \right|_{(x_1^*, x_2^*)} x_1 + \left. \frac{\partial G}{\partial x_2} \right|_{(x_1^*, x_2^*)} x_2, \\ \dot{x}_2 &= \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{(x_1^*, x_2^*)} x_1 + \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_{(x_1^*, x_2^*)} x_2; \end{aligned} \quad (7)$$

Переходя в (7) к более простым обозначениям, получим линейную систему в вариациях

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2, \\ x_2' &= cx_1 + dx_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Поведение фазовых траекторий в окрестности положения равновесия (x_1^*, x_2^*) определяется корнями характеристического уравнения системы в вариациях (8):

характеристический определитель системы:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 ; \quad (9)$$

характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (10)$$

где $-p = a + d = [div(G, F)]_{(x_1^*, x_2^*)} = \lambda_1 + \lambda_2$;

$$q = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{D(G, F)}{D(x_1, x_2)} \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} = \lambda_1 \lambda_2.$$

Критерий устойчивости нулевого решения системы в вариациях. Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение асимптотически устойчиво. Если есть корень с положительной действительной частью, то нулевое решение неустойчиво.

В зависимости от вида корней характеристического уравнения могут реализовываться четыре типа особых точек – неподвижных точек фазовой плоскости: узел – корни λ_i действительные и одного знака; фокус – корни λ_i комплексно-сопряженные, причем $Re(\lambda_i) \neq 0$; центр – чисто мнимые корни; седло – действительные корни различных знаков.

Если особая точка является центром (пара чисто мнимых собственных значений), то факт устойчивости или неустойчивости не может быть установлен на основе системы линейного приближения (**критический случай пары чисто мнимых корней**).

Частное решение уравнения (8), отвечающее собственному значению λ , имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{\xi}_\lambda e^{\lambda t},$$

где $\bar{\xi}_\lambda$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ ,

$$e^{(\alpha+i\omega)t} = e^{\alpha t} (\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

Действительные собственные значения определяют аperiодический характер изменения решения системы (6), а комплексные собственные значения – колебательный характер изменения (рис. 2).

Положительному действительному собственному значению отвечает аperiодическое (монотонное) возрастание начальных возмущений системы (8) со временем (*дивергентная потеря устойчивости*), а паре мнимых корней с положительной действительной частью – колебательное (флаттерная потеря устойчивости) (рис. 3).

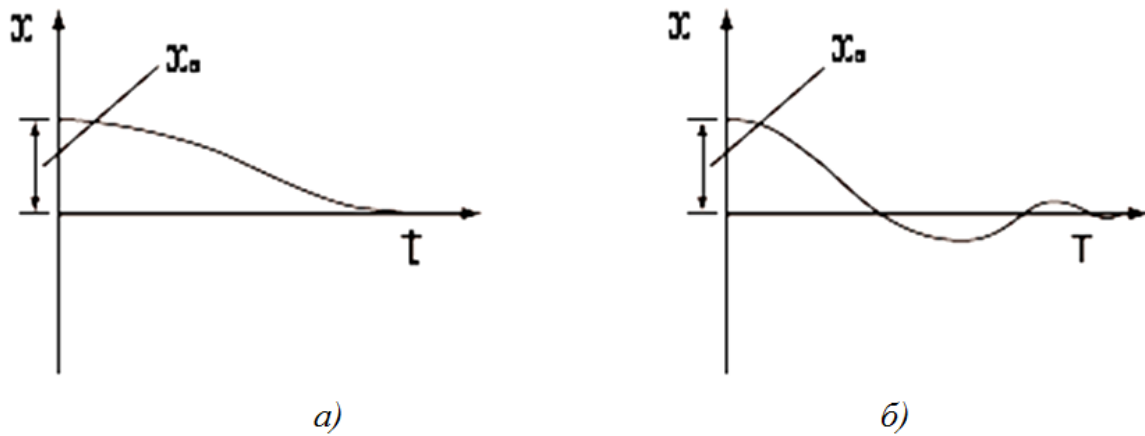


Рис.2. Иллюстрация устойчивости нулевого решения (эволюция фазовой координаты со временем): а) аperiodический характер затухания начальных возмущений; б) колебательный характер затухания начальных возмущений.

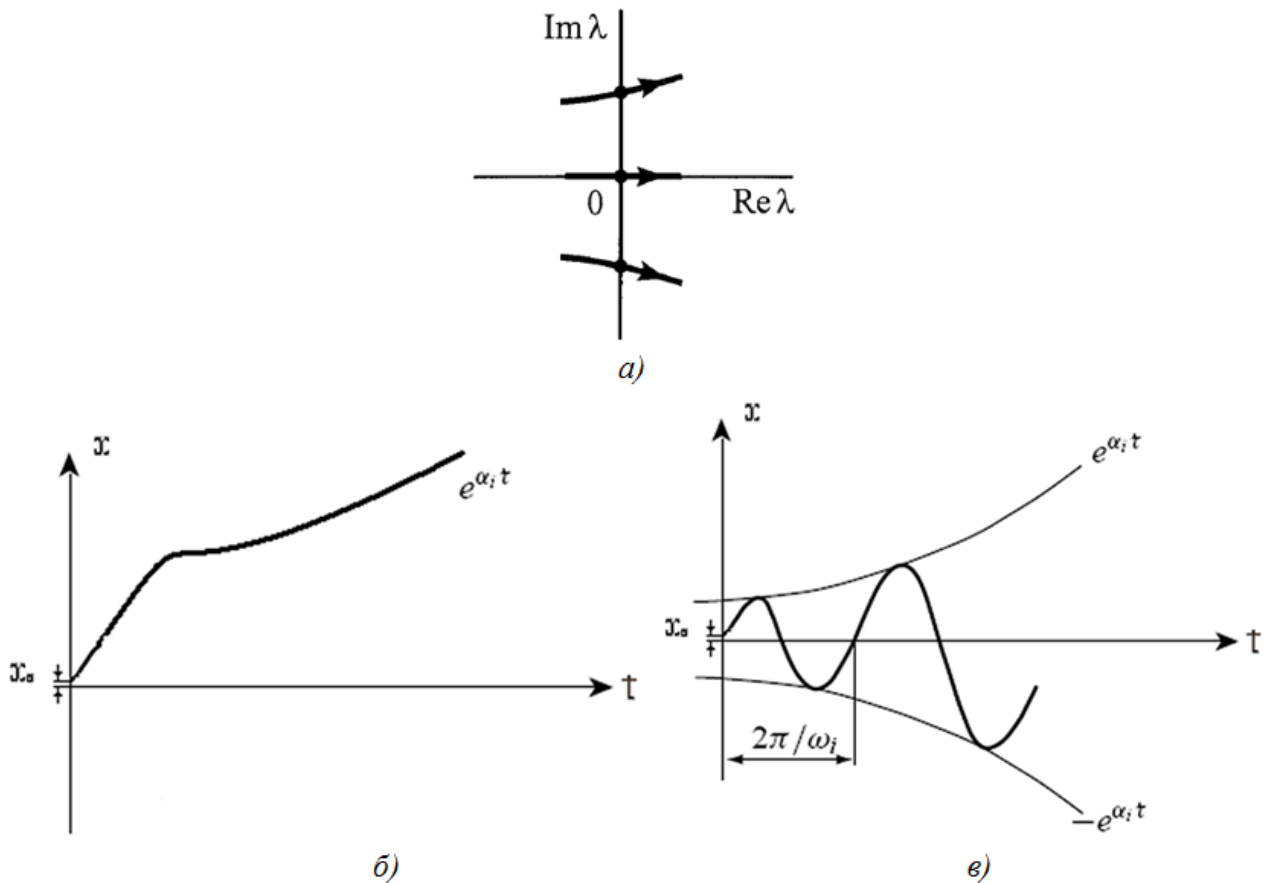


Рис.3. Потеря устойчивости нулевого решения:

- а) – пересечение собственными значениями мнимой оси комплексной плоскости (появляются или один действительный корень $\lambda_i = \alpha_i > 0$, или пара мнимых $\lambda_i = \alpha_i \pm \omega_i, \alpha_i > 0$);
- б) – аperiodическое (монотонное) возрастание начальных возмущений со временем $\lambda_i = \alpha_i > 0$;
- в) – флаттерная потеря устойчивости $\lambda_i = \alpha_i \pm \omega_i, \alpha_i > 0$.

Критерий устойчивости Рауса-Гурвица. Характеристическое уравнение системы n линейных дифференциальных уравнений в общем случае представляется полиномом n -й степени

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 > 0 \quad (11)$$

Действительные части корней уравнения (6) отрицательны тогда и только тогда, когда положительны все диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \\ (n = 2): & \quad a_0 > 0; \quad \Delta_1 = a_1 > 0; \\ & \quad \Delta_2 = a_1 a_2 > 0, \quad (a_i = 0, i \geq 3). \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \\ & \quad a_0 > 0; \quad \Delta_1 = a_1 > 0; \\ (n = 3): & \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \\ & \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0, \quad (a_i = 0, i \geq 4). \end{aligned} \quad (14)$$

Необходимым условием устойчивости является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения (условие Стодолы).

Основная часть

Геометрические и инерционные параметры жесткой модели автомобиля: a, b – расстояние от центра масс автомобиля до передней (управляемой) оси и задней оси; m, J – масса и момент инерции автомобиля относительно центральной вертикальной оси; v – продольная составляющая проекции скорости центра масс; u – поперечная составляющая проекции скорости центра масс; ω – угловая скорость автомобиля относительно вертикальной оси; система дифференциальных уравнений движения в плоскости дороги (u, ω) : V – производная продольной составляющей центра масс (v); U – производная боковой составляющей центра масс (u); Ω – производная угловой скорости ω по времени.

Математическая модель двухосного автомобиля с управляемой задней осью задается системой (15):

$$\begin{aligned} & -m(v - \omega u) + X1 \cos(\theta1) + X2 \cos(\theta2) - Y1 \sin(\theta1) - Y2 \sin(\theta2) = 0 \\ & -m(U + \omega v) + X1 \sin(\theta1) + X2 \sin(\theta2) + Y1 \cos(\theta1) + Y2 \cos(\theta2) = 0 \\ & -J\Omega + a(X1 \sin(\theta1) + Y1 \cos(\theta1)) - b(X2 \sin(\theta2) + Y2 \cos(\theta2)) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Углы увода:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \theta_1 - \arctan\left(\frac{u + a\omega}{v}\right) \\ \delta_2 &= \theta_2 + \arctan\left(\frac{-u + b\omega}{v}\right)\end{aligned}\quad (16)$$

Силы увода:

$$\begin{aligned}Y_1 &= \frac{(-0,0012Z_1^2 + 19Z_1)\delta_1}{\sqrt{1 + \frac{(-0,0012Z_1^2 + 19Z_1)^2 \delta_1^2}{\phi_1^2 Z_1^2}}} \\ Y_2 &= \frac{(-0,0012Z_2^2 + 19Z_2)\delta_2}{\sqrt{1 + \frac{(-0,0012Z_2^2 + 19Z_2)^2 \delta_2^2}{\phi_2^2 Z_2^2}}}\end{aligned}\quad (17)$$

являются нелинейными функциями углов увода, вертикальных реакций Z_i и коэффициентов сцепления в поперечном направлении ϕ_i .

После определения из первого уравнения системы (15) величины силы тяги X_1 , необходимой для реализации движения с постоянной продольной составляющей скорости v , приходим к системе относительно двух фазовых переменных (u, ω).

Закон управления задней осью выберем в виде линейной функции по фазовым переменным (u, ω):

$$\theta_2 = Ku u + K\omega \omega. \quad (18)$$

Уравнения линейного приближения имеют вид:

$$\begin{aligned}U &= \frac{-mv\omega - \frac{k_1(u + a\omega)}{v} + k_2\left(\theta_2 + \frac{-u + b\omega}{v}\right)}{m} \\ \Omega &= \frac{-\frac{ak_1(u + a\omega)}{v} - bk_2\left(\theta_2 + \frac{-u + b\omega}{v}\right)}{J_z}\end{aligned}\quad (19)$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}\lambda^2 mv^2 J_z + (k_2 v J_z + mvb^2 k_2 - k_2 Ku v^2 J_z + mva^2 k_1 + mv^2 bk_2 K\omega + k_1 v J_z)\lambda - \\ - mv^3 bk_2 Ku - k_1 a b k_2 Ku v + k_1 b^2 k_2 + k_2 a^2 k_1 - k_2 Ku v a^2 k_1 - mv^2 k_1 a + mv^2 b k_2 + \\ + 2k_1 a b k_2 + k_1 b k_2 K\omega v + k_2 K\omega v k_1 a = 0\end{aligned}\quad (20)$$

Свободный член характеристического уравнения ($A_2 < 0$ – условие дивергентной потери устойчивости прямолинейного движения)

$$\begin{aligned}
 & -mv^3bk_2Ku + (mbk_2 - mk_1a)v^2 + \\
 & + (-k_2Ku a^2k_1 - k_1abk_2Ku + k_1bk_2K\omega + k_2K\omega k_1a)v + \\
 & + k_1b^2k_2 + k_2a^2k_1 + 2k_1abk_2
 \end{aligned} \tag{21}$$

$K\omega > 0$, $Ku < 0$ имеет увеличение критической скорости прямолинейного движения, либо ее отсутствие.

Результаты численного анализа системы. Для представленных ниже числовых значениях параметров системы:

$$\begin{aligned}
 A &= a + 0,465; \\
 B &= b + 0,615; \\
 KOL &:= 1,6; \\
 m &= 1675; \quad l = 2,675; \\
 b &= 1; \quad a = 1,675; \\
 J &= 2617; \\
 K\omega &= 0,2; \quad Ku = -0,1
 \end{aligned}$$

На основе численного интегрирования системы получены характеристики динамического поведения системы с учетом управления задней осью и без нее (рис.4, $v=15$ м/с).

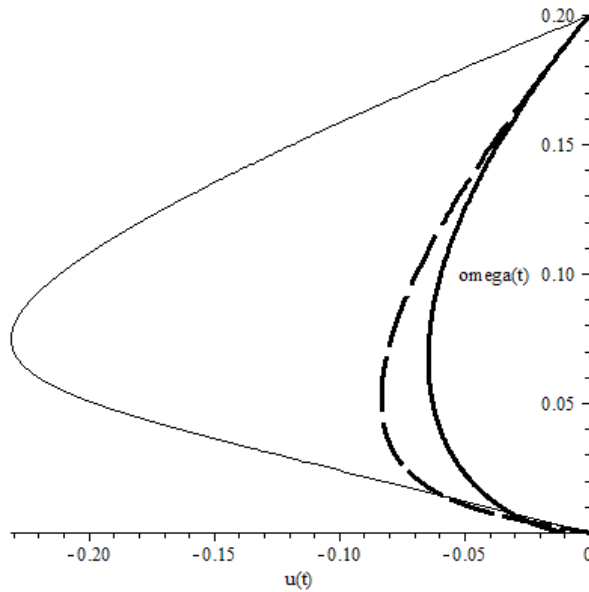


Рис.4. Затухание начальных возмущений фазовых переменных при ($K\omega=0,2$; $Ku=-0,1$ – сплошная толстая линия); ($K\omega=0$; $Ku=0$ – сплошная тонкая линия); ($K\omega=0,2$; $Ku=0$ – пунктирная линия).

Критическая скорость прямолинейного движения:

$$\begin{aligned}
 K\omega=0; \quad Ku=0 & - V_{кр}=22,054\text{м/с}; \\
 K\omega=0,2; \quad Ku=0 & - V_{кр}=46,766 \text{ м/с}; \\
 K\omega=0,2; \quad Ku= -0,1 & - V_{кр} \text{ отсутствует.}
 \end{aligned}$$

Сравнительный анализ круговых стационарных режимов (рис.5, $v=5$ м/с)

$u=0,2138899969$; $\omega=0,3515201061$ стационарный режим без управления;
 $u=0,4052710959$; $\omega=0,2513415125$ стационарный режим при $K\omega=0,2$; $Ki=0$;
 $u=0,3186531120$; $\omega=0,2967181576$ стационарный режим при $K\omega=0,2$; $Ki=-0,1$

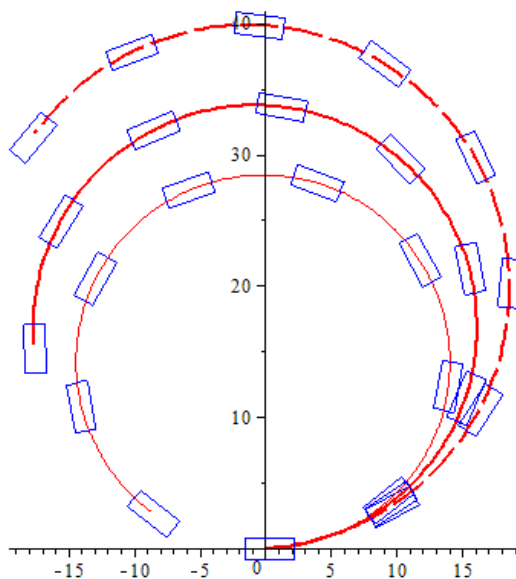


Рис.5. Траектории Ц.М. автомобиля при различных законах управления задней осью

Выводы

Основная составляющая управляющего воздействия с точки зрения стабилизации прямолинейного движения задается членом $K\omega^*\omega$, однако такой закон управления задней осью затрудняет управление автомобилем в круговых режимах движения. Отрицательный эффект можно несколько нивелировать введением второго слагаемого Ki^*i .

Список литературы

1. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин / Л.Г. Лобас, В.Г. Вербицкий. – К.: Наукова думка, 1990. – 232 с.
2. Управляемость автомобиля / Д. Р. Эллис. – М.: Машиностроение, 1975. – 216 с.

Стрільник Ю.М. Аналіз стійкості прямолінійного руху моделі автомобіля з керованою задньою віссю (цілком жорстка модель керування).

Анотація. В статті проведено аналіз стійкості прямолінійного руху моделі автомобіля з керованою задньою віссю.

Ключові слова: стійкість, модель автомобіля, прямолінійний рух, стаціонарний стан.

Strelnik Y.N. Analysis of stability of rectilinear motion of the model vehicle with driven rear axle (absolutely rigid management model).

Abstract. In the article the analysis of stability of rectilinear motion of the model vehicle with driven rear axle.

Keywords: sustainability, model car, straight, steady state.

Стаття надійшла до редакції 02.11.2015 р.