

М.М. Федоров, А.А. Ткаченко, И.П. Кутковой

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СИММЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПРИ ПОСТРОЕНИИ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ АКТИВНЫХ ТРЁХПОЛЮСНИКОВ

*Методика составления эквивалентных схем замещения активных трёхполюсников с использованием метода симметричных составляющих.*

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* активный трёхполюсник, схема замещения, метод симметричных составляющих, комплексное входное сопротивление, холостой ход, короткое замыкание.

*Методика складання еквівалентних схем заміщення активних триполюсників з використанням методу симетричних складових.*

*К л ю ч о в і с л о в а:* активний триполюсник, схема заміщення, метод симетричних складових, комплексний вхідний опір, холостий хід, коротке замикання.

**Постановка проблемы.** Известно, что использование эквивалентных схем замещения активных трёхполюсников существенно упрощает расчёт и анализ процессов в разветвлённых электрических цепях. В задачах расчёта трехфазных электрических цепей целесообразно иметь систему с трехфазным источником питания. В общем случае, вследствие различных несимметричных режимов в сложных трехфазных системах активный трёхполюсник несимметричен. Поэтому для анализа и расчетов несимметричных режимов в трехфазных цепях с использованием схем замещения активных трёхполюсников желательно иметь три источника с напряжением прямой и обратной последовательности.

**Анализ публикаций.** В работе [1] на примере цепей постоянного тока рассмотрена схема замещения активного трёхполюсника в виде эквивалентной «звезды» с двумя источниками питания и тремя внутренними сопротивлениями. Предусматривался переход от системы двух источников к системе трех источников путем введения в его ветви источника напряжения с электродвижущей силой (ЭДС) произвольного значения.

Определение параметров эквивалентной схемы замещения активного трёхполюсника синусоидального тока вызывает затруднения, так как необходимо определять не только значение ЭДС, но и сдвиг по фазе между ЭДС источников с последующим их разложением на симметричные составляющие. Для активных трёхполюсников синусоидального тока характерно отсутствие напряжения нулевой последовательности, т.е. при разложении присутствуют составляющие напряжения только прямой и обратной

последовательности. Кроме того, в схемах замещения несимметричных трехполюсников необходимо также определять внутреннее сопротивление каждой из фаз с учетом активной и реактивной составляющей.

**Цель статьи.** Определение параметров эквивалентной схемы замещения активного трёхполюсника ( $\underline{E}_A, \underline{E}_B, \underline{E}_C, \underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$ ) с трехфазным источником питания и разложением напряжения на составляющие прямой и обратной последовательности.

**Результаты исследований.** Эквивалентная схема замещения активного трёхполюсника (рисунок 1) может быть представлена трёхлучевой «звездой» и имеет вид, приведенный на рисунке 2. Она содержит шесть элементов: три несимметричных источника синусоидальных ЭДС ( $\underline{E}_A, \underline{E}_B$  и  $\underline{E}_C$ ) и три комплексных сопротивления ( $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$ ), параметры которых необходимо определить. Эта задача может быть решена как расчётным путём, так и экспериментально.

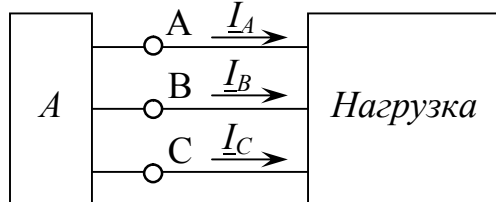


Рисунок 1 – Произвольная цепь с активным трёхполюсником

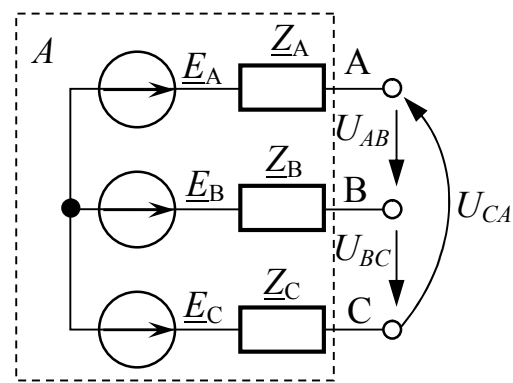


Рисунок 2 – Эквивалентная схема активного трёхполюсника с трехфазным источником питания

Для определения комплексных сопротивлений  $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$  расчетным путем используется схема соответствующего пассивного трёхполюсника, получаемого из активного путём замены источников питания их внутренними сопротивлениями. Далее известными методами определяют комплексное входное сопротивление пассивного трёхполюсника  $\underline{Z}_{вхAB}, \underline{Z}_{вхBC}, \underline{Z}_{вхCA}$  относительно зажимов A-B, B-C и C-A соответственно. Искомое сопротивление вычисляют по формулам [1], которые для цепей синусоидального тока имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_A &= \frac{1}{2}(\underline{Z}_{вхAB} + \underline{Z}_{вхCA} - \underline{Z}_{вхBC}); \\ \underline{Z}_B &= \frac{1}{2}(\underline{Z}_{вхAB} + \underline{Z}_{вхBC} - \underline{Z}_{вхCA}); \\ \underline{Z}_C &= \frac{1}{2}(\underline{Z}_{вхCA} + \underline{Z}_{вхBC} - \underline{Z}_{вхAB}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Определение комплексных сопротивлений эквивалентных схем по результатам экспериментов рационально применять в случае сложных схем трёхполюсников, когда аналитические методы затруднены, а также в случае, если схема трёхполюсника неизвестна. Алгоритм определения комплексного входного сопротивления, например  $\underline{Z}_{вхAB} = r_{вхAB} \pm jx_{вхAB}$ , по результатам экспериментальных данных предполагает проведение следующих опытов относительно зажимов  $A-B$ :

- а) холостого хода (ХХ) с измерением напряжения  $U_{AB}$ ;
- б) короткого замыкания (КЗ) с измерением силы тока  $I_{кAB}$ .

По данным этих опытов определяют модуль сопротивления

$$Z_{вхAB} = \frac{U_{AB}}{I_{кAB}} = \sqrt{r_{вхAB}^2 + x_{вхAB}^2};$$

в) подключения известного ёмкостного сопротивления  $x_c$  с последующим измерением силы тока  $I'_{AB}$ .

Затем определяют некоторое входное сопротивление

$$Z'_{вхAB} = \frac{U_{AB}}{I'_{AB}} = \sqrt{r_{вхAB}^2 + (x_{вхAB} - x_c)^2},$$

и в результате возникает система уравнений

$$\begin{cases} (Z_{вхAB})^2 = r_{вхAB}^2 + x_{вхAB}^2; \\ (Z'_{вхAB})^2 = r_{вхAB}^2 + (x_{вхAB} - x_c)^2, \end{cases}$$

решая которую, находят сопротивление  $r_{вхAB}$  и  $x_{вхAB}$ :

$$x_{вхAB} = \frac{(Z_{вхAB})^2 - (Z'_{вхAB})^2 - x_c^2}{2x_c}; \quad (2)$$

$$r_{вхAB} = \sqrt{(Z_{вхAB})^2 - x_{вхAB}^2}. \quad (3)$$

Если знак сопротивления  $x_{вхAB}$  положителен, то это означает индуктивный характер сопротивления; соответственно, в случае отрицательного знака получаем ёмкостное сопротивление.

Аналогично определяются входные сопротивления  $\underline{Z}_{вхBC}$  и  $\underline{Z}_{вхCA}$ . Далее по формулам (1)-(3) находят эквивалентное сопротивление  $\underline{Z}_A$ ,  $\underline{Z}_B$ ,  $\underline{Z}_C$ .

Если опыт КЗ невозможен из-за слишком большой силы тока, то производится опыт нагрузки на известное резистивное сопротивление  $R$  с по-

следующим измерением силы тока нагрузки  $I_{нAB}$  и вычислением модуля входного сопротивления

$$Z_{вхAB} = \frac{U_{AB}}{I_{нAB}} = \sqrt{(r_{вхAB} + R)^2 + x_{вхAB}^2} . \quad (4)$$

Реактивное сопротивление  $x_{вхAB}$  вычисляется по формуле (4), а искомое резистивное равно

$$r_{вхAB} = \sqrt{(Z_{вхAB})^2 - x_{вхAB}^2} - R . \quad (5)$$

Комплексы ЭДС ( $\underline{E}_A$ ,  $\underline{E}_B$  и  $\underline{E}_C$ ) эквивалентной схемы замещения активного трехполюсника (рисунок 2) также можно определить расчетным и экспериментальным путем с последующим применением метода симметричных составляющих, согласно которому будем иметь три источника с напряжением прямой ( $\underline{E}_{A1}$ ,  $\underline{E}_{B1}$  и  $\underline{E}_{C1}$ ) и обратной ( $\underline{E}_{A2}$ ,  $\underline{E}_{B2}$  и  $\underline{E}_{C2}$ ) последовательности (рисунок 3).

В результате комплексы ЭДС источников питания (рисунок 2) соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_A &= \underline{E}_{A1} + \underline{E}_{A2}, \\ \underline{E}_B &= \underline{E}_{B1} + \underline{E}_{B2}, \\ \underline{E}_C &= \underline{E}_{C1} + \underline{E}_{C2}. \end{aligned} \right\}$$

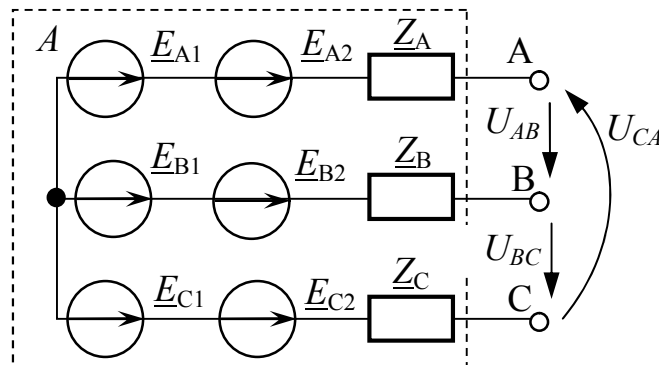


Рисунок 3 – Эквивалентная схема активного трёхполюсника с использованием метода симметричных составляющих

Значения комплексов ЭДС определяют по значениям линейного напряжения  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{CA}$ . Комплексы линейного напряжения активного трехполюсника определяются с помощью опытов ХХ (рисунок 2). При их формировании экспериментальным путем необходимо использовать их значение и векторную диаграмму напряжений. Согласно второму закону

Кирхгофа в комплексной форме для режима ХХ активного трёхполюсника имеем:

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0.$$

Векторная диаграмма напряжений представлена на рисунке 4, на котором порядок следования фаз определяется известными методами [2].

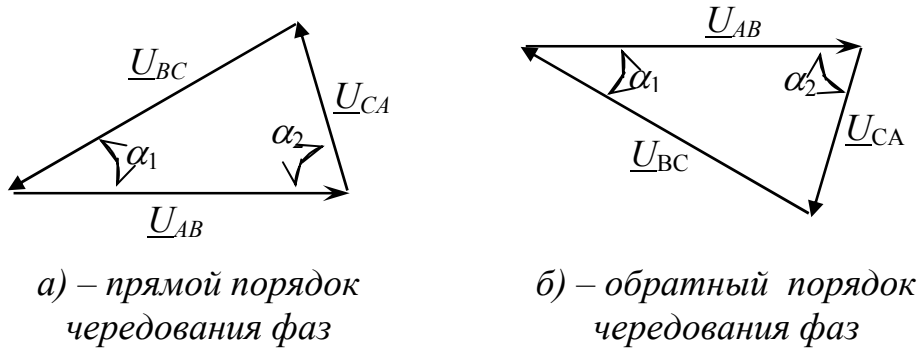


Рисунок 4 – Векторная диаграмма напряжений холостого хода активного трёхполюсника

Она позволяет сформировать комплексы линейных напряжений. Комплексный вектор одного из них, например,  $\underline{U}_{AB}$ , направленный по действительной оси, принимаем равным нулю ( $\psi_{AB} = 0$ ). Определив углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , формируем комплексы линейных напряжений:

<p>для рисунка 4 а</p> $\underline{U}_{AB} = U_{AB},$ $\underline{U}_{BC} = U_{BC} e^{j(\alpha_1 - 180^\circ)} = U_{BC} e^{j\psi_{BC}}$ $\underline{U}_{CA} = U_{CA} e^{j(180^\circ - \alpha_2)} = U_{CA} e^{j\psi_{CA}}$	<p>для рисунка 4 б</p> $\underline{U}_{AB} = U_{AB},$ $\underline{U}_{BC} = U_{BC} e^{j(180^\circ - \alpha_1)} = U_{BC} e^{j\psi_{BC}}$ $\underline{U}_{CA} = U_{CA} e^{j(\alpha_2 - 180^\circ)} = U_{CA} e^{j\psi_{CA}}$	}	(6)
---	---	---	-----

Используя комплексы линейных напряжений, определяем составляющие их прямой ( $\underline{U}_{AB1}, \underline{U}_{BC1}, \underline{U}_{CA1}$ ) и обратной ( $\underline{U}_{AB2}, \underline{U}_{BC2}, \underline{U}_{CA2}$ ) последовательности. Они соответственно равны

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{U}_{AB1} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_{AB} + a\underline{U}_{BC} + a^2\underline{U}_{CA}) = U_{AB1} e^{j\psi_1}; \\
 \underline{U}_{BC1} &= a^2\underline{U}_{AB1} = U_{BC1} e^{j(\psi_1 - 120^\circ)}; \\
 \underline{U}_{CA1} &= a\underline{U}_{AB1} = U_{CA1} e^{j(\psi_1 + 120^\circ)}; \\
 \underline{U}_{AB2} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_{AB} + a^2\underline{U}_{BC} + a\underline{U}_{CA}) = U_{AB2} e^{j\psi_2}; \\
 \underline{U}_{BC2} &= a\underline{U}_{AB2} = U_{BC2} e^{j(\psi_2 - 120^\circ)}; \\
 \underline{U}_{CA2} &= a^2\underline{U}_{AB2} = U_{CA2} e^{j(\psi_2 + 120^\circ)},
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $a$  – оператор поворота ( $a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ).

Комплексы ЭДС прямой ( $\underline{E}_{A1}$ ,  $\underline{E}_{B1}$  и  $\underline{E}_{C1}$ ) и обратной последовательности ( $\underline{E}_{A2}$ ,  $\underline{E}_{B2}$  и  $\underline{E}_{C2}$ ) соответственно равны

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{E}_{A1} &= \frac{U_{AB1}}{\sqrt{3}} e^{j(\psi_1 - 30^\circ)}; \\
 \underline{E}_{B1} &= \frac{U_{BC1}}{\sqrt{3}} e^{j(\psi_1 - 150^\circ)}; \\
 \underline{E}_{C1} &= \frac{U_{CA1}}{\sqrt{3}} e^{j(\psi_1 + 90^\circ)}; \\
 \underline{E}_{A2} &= \frac{U_{AB2}}{\sqrt{3}} e^{j(\psi_2 + 30^\circ)}; \\
 \underline{E}_{B2} &= \frac{U_{BC2}}{\sqrt{3}} e^{j(\psi_2 + 150^\circ)}; \\
 \underline{E}_{C2} &= \frac{U_{CA2}}{\sqrt{3}} e^{j(\psi_2 - 90^\circ)}.
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Проверка справедливости предложенного алгоритма определения параметров эквивалентной схемы замещения активного трёхполюсника проведена на конкретном примере. Схема активного трехполюсника, представленная на рисунке 5, в которой  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  – сопротивления нагрузки активного трехполюсника, рассчитана и исследована (собрана на стенде УИЛС). Параметры элементов этой схемы приведены в таблице 1.

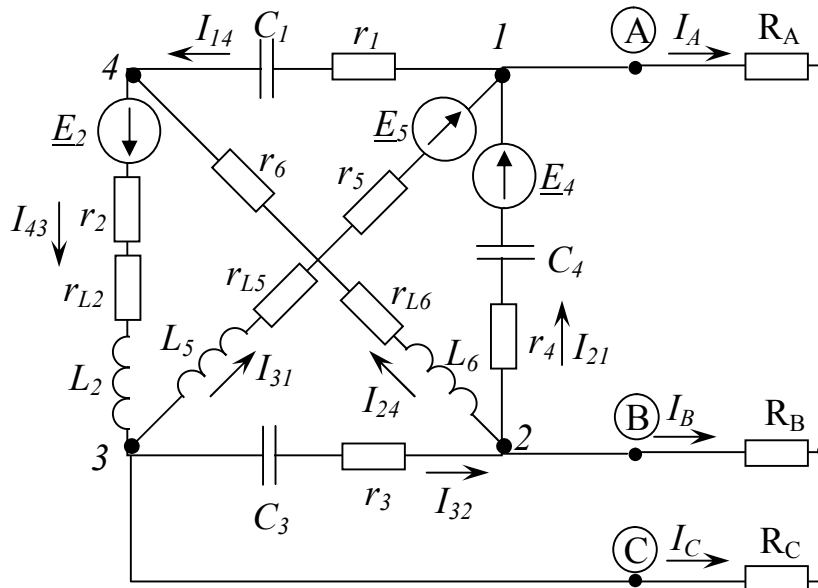


Рисунок 5 – Активный трёхполюсник переменного тока

Таблица 1

Величина	Размерность	Значение	Величина	Размерность	Значение	Величина	Размерность	Значение
$r_1$	Ом	20	$L_2$	мГн	70	$C_4$	мкФ	150
$r_2$	Ом	25	$r_{L2}$	Ом	2,5	$E_2$	В	$35 \cdot e^{j10^\circ}$
$r_3$	Ом	30	$L_5$	мГн	100	$E_4$	В	$30 \cdot e^{-j120^\circ}$
$r_4$	Ом	30	$r_{L5}$	Ом	4	$E_5$	В	$25 \cdot e^{j120^\circ}$
$r_5$	Ом	40	$L_6$	мГн	70	$R_A$	Ом	75
$r_6$	Ом	25	$r_{L6}$	Ом	2,5	$R_B$	Ом	60
$C_1$	мкФ	140	$C_3$	мкФ	90	$R_C$	Ом	80

В таблице 2 приведены значения силы тока рассматриваемой схемы, определенные расчетным путем, а в таблице 3 – комплексы линейных напряжений активного трехполюсника ( $\underline{U}_{AB}$ ,  $\underline{U}_{BC}$ ,  $\underline{U}_{CA}$ ) и силы тока КЗ ( $\underline{I}_{KAB}$ ,  $\underline{I}_{KBC}$ ,  $\underline{I}_{KCA}$ ).

Таблица 2

Ток активного трехполюсника	$\underline{I}_{21}$	$\underline{I}_{32}$	$\underline{I}_{31}$	$\underline{I}_{24}$	$\underline{I}_{43}$	$\underline{I}_{14}$	$\underline{I}_A$	$\underline{I}_B$	$\underline{I}_C$
Модуль силы тока, мА	366	449	304	388	645	259	103	178	139
Аргумент – $\psi_I$ , град	-90	-27	56	-2	-6	-13	-146	86	121

Таблица 3

Величина	$\underline{U}_{AB}$	$\underline{U}_{BC}$	$\underline{U}_{CA}$	$\underline{I}_{kAB}$	$\underline{I}_{kBC}$	$\underline{I}_{kCA}$
Модуль напряжения, В и силы тока, мА	19,38	24,27	15,69	101	901	637
Аргумент – $\psi_U$ и $\psi_I$ , град	-119	102	-25	-94	112	-28

По (1-3) рассчитано (таблица 4) входное сопротивление трёхполюсника ( $\underline{Z}_{exAB}$ ,  $\underline{Z}_{exBC}$ ,  $\underline{Z}_{exCA}$ ) и эквивалентное ( $\underline{Z}_A$ ,  $\underline{Z}_B$ ,  $\underline{Z}_C$ ).

Таблица 4

$\underline{Z}_{exAB}$ , Ом	$\underline{Z}_{exBC}$ , Ом	$\underline{Z}_{exCA}$ , Ом	$\underline{Z}_A$ , Ом	$\underline{Z}_B$ , Ом	$\underline{Z}_C$ , Ом
17,59-j7,93	26,49-j4,98	24,61+j0,95	7,85-j0,99	9,73-j6,93	16,75+j1,95

По рассчитанным значениям комплексов линейных напряжений и формулам (7), (8) определены (таблица 5) составляющие прямой ( $\underline{E}_{A1}$ ,  $\underline{E}_{B1}$  и  $\underline{E}_{C1}$ ) и обратной ( $\underline{E}_{A2}$ ,  $\underline{E}_{B2}$  и  $\underline{E}_{C2}$ ) последовательности фазного напряжения, а также параметры эквивалентной схемы замещения активного трёхполюсника ( $\underline{E}_A$ ,  $\underline{E}_B$ ,  $\underline{E}_C$ ).

Таблица 5

ЭДС	$\underline{E}_{A1}$	$\underline{E}_{B1}$	$\underline{E}_{C1}$	$\underline{E}_{A2}$	$\underline{E}_{B2}$	$\underline{E}_{C2}$	$\underline{E}_A$	$\underline{E}_B$	$\underline{E}_C$
Модуль, В	11,2	11,2	11,2	3,0	3,0	3,0	8,5	13,7	11,9
Аргумент – $\psi_E$ , град	-164	76	-44	-6	114	-126	-156	84	-58

Для определения параметров схемы замещения активного трехполюсника экспериментальным методом схема, представленная на рисунке 5, была собрана на стенде УИЛС. В таблице 6 приведена сила тока рассматриваемой схемы по результатам эксперимента.

Таблица 6

Сила тока	$\underline{I}_{21}$	$\underline{I}_{32}$	$\underline{I}_{31}$	$\underline{I}_{24}$	$\underline{I}_{43}$	$\underline{I}_{14}$	$\underline{I}_A$	$\underline{I}_B$	$\underline{I}_C$
Модуль, мА	376	465	314	401	669	269	103	184	142



По результатам опыта XX на этом стенде измерены линейные напряжения ( $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{CA}$ ). Далее проведены два опыта КЗ относительно зажимов  $A$ - $B$ ,  $B$ - $C$ ,  $C$ - $A$  (рисунок 6):

а) на известное резистивное сопротивление  $R$  с измерением силы тока нагрузки  $I_H$ ;

б) на известные последовательно соединенные резистивное  $R$  и емкостное  $x_c$  сопротивления с измерением силы тока нагрузки  $I_H'$ .

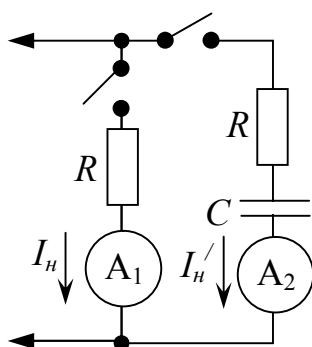


Рисунок 6 – Схема проведения опыта короткого замыкания

В таблице 7 приведены значения линейных напряжений при опыте XX и силы тока при опыте КЗ с использованием резистивного сопротивления  $R = 50$  Ом и емкости  $C = 50$  мкФ.

Таблица 7

Величина	$U_{AB}$	$U_{BC}$	$U_{CA}$	$I_{HAB}$	$I_{HBC}$	$I_{HCA}$	$I_{HAB}'$	$I_{HBC}'$	$I_{HCA}'$
Модуль напряжения, В, и силы тока, мА	19,8	24,8	15,6	292	327	210	203	245	162

По формуле (6) сформированы комплексы линейных напряжений активного трехполюсника:

$$\underline{U}_{AB} = 19,8e^{j0^\circ}; \quad \underline{U}_{BC} = 24,8e^{-j141^\circ}; \quad \underline{U}_{CA} = 15,6e^{j92^\circ}.$$

Из сравнения результатов расчета и эксперимента следует практическая сходимость действующих значений линейного напряжения XX, а его комплексы отличаются на один и тот же угол.

По сформированным линейным напряжениям XX рассчитаны (таблица 8) составляющие прямой ( $\underline{E}_{A1}$ ,  $\underline{E}_{B1}$  и  $\underline{E}_{C1}$ ) и обратной ( $\underline{E}_{A2}$ ,  $\underline{E}_{B2}$  и  $\underline{E}_{C2}$ ) последовательности фазного напряжения, а также определены параметры эквивалентной схемы замещения активного трёхполюсника ( $\underline{E}_A$ ,  $\underline{E}_B$ ,  $\underline{E}_C$ ).

Таблица 8

ЭДС	$\underline{E}_{A1}$	$\underline{E}_{B1}$	$\underline{E}_{C1}$	$\underline{E}_{A2}$	$\underline{E}_{B2}$	$\underline{E}_{C2}$	$\underline{E}_A$	$\underline{E}_B$	$\underline{E}_C$
Модуль, В	11,4	11,4	11,4	3,2	3,2	3,2	8,5	14	12,1
Аргумент – $\psi_E$ , град	-46	-166	74	111	-129	-9	-37	-158	59

Из сравнения результатов расчета и эксперимента следует практическая сходимость составляющих прямой и обратной последовательности, а также комплексов ЭДС эквивалентной схемы замещения. Относительная погрешность экспериментальных и расчетных данных не превышает 10 %.

По формулам (1),(2),(5) сформированы (таблица 9) значения входных сопротивлений ( $\underline{Z}_{exAB}$ ,  $\underline{Z}_{exBC}$ ,  $\underline{Z}_{exCA}$ ) и параметров схемы замещения ( $\underline{Z}_A$ ,  $\underline{Z}_B$ ,  $\underline{Z}_C$ ).

Таблица 9

$\underline{Z}_{exAB}$ , Ом	$\underline{Z}_{exBC}$ , Ом	$\underline{Z}_{exCA}$ , Ом	$\underline{Z}_A$ , Ом	$\underline{Z}_B$ , Ом	$\underline{Z}_C$ , Ом
16,45-j6,76	25,44-j2,96	24,38+j0,46	7,69-j1,67	8,76-j5,09	16,69+j2,14

Параметры схемы замещения активного трехполюсника с трехфазным источником питания (рисунок 7), позволяют проверить рассчитанную ранее силу тока нагрузки  $I_A$ ,  $I_B$  и  $I_C$ , например, методом двух узлов. Схема проверена расчетным и экспериментальным (собрана в Electronic Workbench) путем.

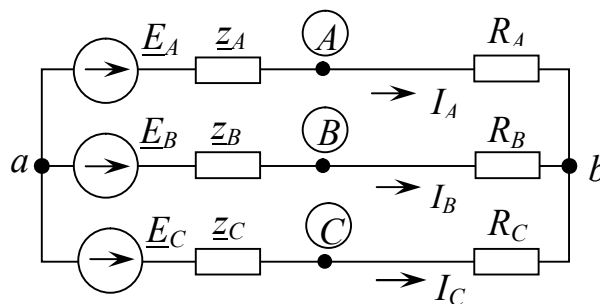


Рисунок 7 – Схема замещения активного трехполюсника с трехфазным источником питания

В таблице 10 приведены значения силы тока нагрузки исходной (рисунок 5) и эквивалентной (рисунок 7) схем, определенные расчетным и

экспериментальным путем, из которой следует практическая сходимость действующих значений силы тока нагрузки активного трехполюсника.

Таблица 10

	Способ определения	Вид схемы	$I_A$	$I_B$	$I_C$
Модуль силы тока, мА	Расчетный	Исходная	103	178	139
		Эквивалентная	103	177	140
	Экспериментальный	Исходная	103	184	142
		Эквивалентная	108	185	138

**Выводы:**

1. Предложенная методика с использованием метода симметричных составляющих позволяет определять параметры ЭДС эквивалентной схемы замещения ( $\underline{E}_A$ ,  $\underline{E}_B$  и  $\underline{E}_C$ ) активного трехполюсника, что существенно расширяет возможности расчёта и анализа трёхфазных цепей.

2. Экспериментально определены параметры одной из эквивалентных схем замещения активного трехполюсника.

Список литературы

1. Фёдоров М.М. Эквивалентные схемы замещения активных трёхполюсников/ М.М.Фёдоров, А.В.Корощенко, В.Е.Михайлов // Взрывозащищённое электрооборудование: сб. науч.тр. УкрНИИВЭ. – Донецк: ООО «АИР», 2011. – С. 55-62.

2. Рибалко М.П. Теоретичні основи електротехніки: лінійні електричні кола: підруч./ М.П. Рибалко, В.О.Есауленко, В.І.Костенко. – Донецьк: Новий світ, 2003. – 513 с.