ПРОМЫШЛЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 539.3

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕТОНКИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК С ОТВЕРСТИЯМИ

Запропоновано розроблений і чисельно реалізований автором метод розв'язання крайових задач визначення напружено-деформованого стану статично навантажених нетонких ортотропних оболонок з отворами довільних розмірів і форм. Метод заснований на використанні загальних рівнянь тривимірних задач теорії пружності, варіаційного принципу Рейсснера, методу И.Н.Векуа, теорії R-функцій і алгоритму двосторонньої інтегральної оцінки точності наближених розв'язків змішаних варіаційних задач. Обговорено можливості ефективного застосування пропонованого методу.

В.А. Сало

Кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики, Национального технического университета "ХПИ", ул. Фрунзе, 21, Харьков, 61002, Украина
Тел.: раб. - +38(0572) 40-03-73
E-mail: salo@kpi.kharkov.ua

Постановка проблемы.

Оболочки с отверстиями в инженерной практике являются одними из наиболее распространенных и ответственных конструктивных элементов, от прочности которых нередко зависит работоспособность и надежность конструкции в целом. Анализ и оценка прочности и жесткости оболочек предполагает расчет их напряженно–деформированного состояния на основе решений соответствующих краевых задач теории упругости. Решения таких задач в пространственной поставке сопряжены со значительными математическими и вычислительными трудностями, обусловленными высоким порядком дифференциальных уравнений в частных производных, сложностью и разнообразием геометрических форм и приложенных воздействий, необходимостью удовлетворения различным видам граничных условий. Для преодоления указанных трудностей, как правило, используют различные прикладные теории оболочек, основанные на разного рода упрощающих предположениях и гипотезах при переходе от трехмерных задач к двумерным.

Согласно высказыванию академика В.В. Новожилова нет ничего практичнее хорошей теории. Несмотря на накопленный огромный материал расчетов различных оболочек, большинство из существующих методов исследований приводят к расчетным моделям, которые не всегда позволяют обосновать выбор конструктивных параметров нетонких оболочек, ослабленных отверстиями. Очевидно, существенный прогресс в достижении конкретных и достоверных результатов решения в пространственной постановке краевых задач теории оболочек невозможен без использования основных соотношений трехмерной теории упругости и привлечения современных быстродействующих ПЭВМ. В этой связи актуальна потребность в создании достаточно универсальных и алгоритмически простых для численной реализации методов расчета нетонких оболочек с отверстиями произвольных размеров и форм.

Анализ последних исследований и публикаций.

К настоящему времени построено большое количество разнообразных и нередко противоречащих друг другу вариантов уточненных теорий оболочек, однако их обилие создает определенные затруднения в выборе и практическом применении конкретной модели оболочки. Для расчета оболочек средней толщины и оболочек толстостенных, для полного анализа напряженно-деформированного состояния произвольно нагруженных оболочечных элементов, три измерения которых примерно одинаковы, а также в задачах по изучению пространственной концентрации напряжений в окрестностях отверстий и включений необходимо привлекать трехмерную теорию упругости или обобщенные теории оболочек, основанные на замене решения трехмерной задачи теории упругости регулярной последовательностью решений двумерных задач. В частности, в работе [1] автором даны классификация и обстоятельный анализ известных в научной литературе уточненных теорий оболочек, рассмотрено современное состояние проблемы определения концентрации напряжений в упругих оболочках с отверстиями.

Предлагаемый метод.

Решению сформулированной проблемы посвящена монография [1], в которой предложен разработанный, теоретически обоснованный и численно реализованный автором эффективный метод решения краевых задач определения напряженно–деформированного состояния статически нагруженных ортотропных оболочек (в частности, пластин) с отверстиями. Метод основан на использовании смешанного вариационного принципа Рейсснера, метода И.Н. Векуа [2], теории R–функций [3] и общих уравнений пространственных задач математической теории упругости, что позволяет определить полное напряженно–деформированное состояние в оболочках с отверстиями произвольных размеров. Изложенный в работе [1] метод можно использовать при выполнении расчетов оболочек с одним или несколькими, периодическими или двоякопериодическими системами отверстий, при этом с помощью теории R-функций автором созданы структуры решений, точно удовлетворяющие различным вариантам граничных условий исследуемых краевых задач.

Для повышения точности решения задач целесообразно параметры напряженного и деформированного состояний определять независимо, что реализуемо с помощью вариационного принципа Рейсснера с функционалом I_R:

Функционал Рейсснера I_R обладает тем свойством, что компоненты U_i вектора перемещения U произвольной

$$\mathbf{I}_R = \int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-W(\sigma_{ij})-u_iF_i\right]d\Omega-\int_{\Gamma_u}(u_i-u_i^*)\sigma_{ij}n_jd\Gamma-\int_{\Gamma_\sigma}t_iu_id\Gamma. \quad (1)$$

точки исследуемой области Ω и компоненты σ_{ij} тензора напряжений σ можно задавать произвольно, не заботясь о выполнении граничных условий, уравнений равновесия и условий сплошности. При этом в силу независимой аппроксимации U и σ вариационное уравнение Рейсснера $\delta I_R=0$ приводит к системе дифференциальных уравнений первого порядка относительно искомых величин, тогда как уравнения классических вариационных формулировок имеют более высокий порядок, требуют выполнения трудоемких математических операций и существенно усложняют структуры решений, точно удовлетворяющих краевым условиям задачи.

Рассмотрим, например, ослабленный эллиптическим отверстием полый цилиндр (рис.1), в срединной поверхности Ω_s радиуса R которого введем ортогональную криволинейную систему координат $\{s_1,s_2,z\}$ с началом в центре эллиптического отверстия Γ_0. Координатные линии S_1 и S_2 направлены, как и упруго–эквивалентные направления ортотропии материала, вдоль линий главных кривизн оболочки, а координатная линия Z перпендикулярна Ω_s.

Одним из перспективных путей построения уточненной теории оболочек является предложенный И.Н. Векуа метод [2], позволяющий приблизиться к решению трехмерной теории в принципе с требуемой точностью. Представим независимо варьируемые в функционале Рейсснера I_R искомые компоненты перемещений U_i и напряжений σ_{ij} конечными рядами типа (при $i,j=\overline{1,3}$):

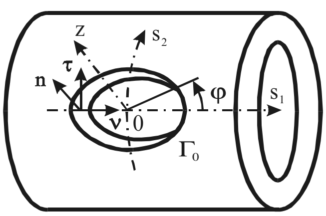

Рисунок 1. Цилиндр с отверстием.

Здесь a_i^k, a_{ij}^k – искомые постоянные; $u_i^k(s_1,s_2)$, $\sigma_{ij}^k(s_1,s_2)$– аппроксимирующие функции;

$$\left.\begin{aligned} u_i &= u_i^* + \sum_{k=0}^{l_i-1} a_i^k \varphi_i^k u_i^k(s_1,s_2)P_k(\zeta); \\ \chi_{ij}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^* + \sum_{k=0}^{l_{ij}-1} a_{ij}^k \varphi_{ij}^k \sigma_{ij}^k(s_1,s_2)P_k(\zeta), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} &\chi_{ii}=\chi_{i3}=1+\frac{h\zeta}{2R_{3-i}}; \quad \chi_{ij}=1+\frac{h\zeta}{2R_j} \quad (i\neq j=1,2); \quad \chi_{33}=1; \\ &\varphi_i^k=\prod_{g=0}^{n}\left[1+b_{ig}^k(\omega_g-1)\right]; \quad \varphi_{ij}^k=\prod_{g=0}^{n}\left[1+b_{ijg}^k(\omega_g-1)\right] \quad (i,j=1,2,3). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$P_k(\zeta)$ – полиномы Лежандра; R_i – главные радиусы кривизны Ω_s; ω_g определяют уравнения граничных элементов Γ_g ($\omega_g|_{\Gamma_g}=0$); u_i^*,σ_{ij}^* находятся по формуле "склейки" [3]; множители χ_{ij} учитывают изменение метрики оболочки по толщине; постоянные b_{ig}^k, b_{ijg}^k необходимы, чтобы в каждой математической записи краевых условий на Γ_g не встречались взаимно соответственные величины из искомых перемещений и напряжений.

Числа l_i, l_{ij} $(i,j=\overline{1,3})$ аппроксимаций U_i и σ_{ij} по толщине оболочки определяют ее сдвиговую модель, выбор которой соответствует (при i,j =1,2) заданию комбинации величин $(l_i, l_3, l_{ij}, l_{i3}, l_{33})$, где l_i – число удерживаемых членов в разложении по координате ζ касательных перемещений U_i; l_3 – нормального перемещения U_3; l_{ij} – тангенциальных напряжений σ_{ij}; l_{i3} – поперечных касательных напряжений σ_{i3} и l_{33} – нормального напряжения σ_{33}.

Задание в программном комплексе соответствующей комбинации параметров $(l_i, l_3, l_{ij}, l_{i3}, l_{33})$ позволяет автоматически переходить к различным двумерным теориям, оценивающим напряженно–деформированное состояние оболочек с заданной точностью. Например, вариант (2,1,2,1,0) соответствует теории оболочек типа Тимошенко, вариант (4,3,4,3,2) – прикладной теории [4]. В случае $l_i=l_{ij}=l$ величину l можно рассматривать как параметр, характеризующий (при N=l-l) порядок N–го приближения (по терминологии И.Н. Векуа [2]) рассматриваемой теории оболочек. В предлагаемом подходе [1] использован метод редукции трехмерных задач теории оболочек с алгоритмом регулярного уточнения сдвиговой модели оболочки, а в качестве первого приближения используется теория оболочек Рейсснера.

После подстановки структуры решений (2) в вариационное уравнение Рейсснера и численного интегрирования соответствующих интегралов краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений ленточной структуры относительно искомых постоянных a_i^k, a_{ij}^k, по найденным значениям которых определяются все характеристики напряженно–деформированного состояния исследуемой области.

Эффективность численных методов определяется, прежде всего, возможностью получения научно обоснованных и достоверных результатов, для оценки которых определяющее значение приобретают вопросы о сходимости получаемых приближенных решений, а также анализ их погрешности. В работе [5] с помощью методов и вариационных неравенств теории операторов в гильбертовом пространстве сформулирован и математически доказан достаточный признак сходимости метода Ритца при отыскании точки стационарности неэкстремального функционала Рейсснера. Из доказанного признака следует, что для улучшения сходимости процесса Ритца искомые функции целесообразно представить структурами, точно удовлетворяющими всем заданным граничным условиям. В изложенном методе с помощью R–функций [3] на аналитическом уровне учитывается геометрическая информация краевых задач для областей с отверстиями произвольной формы и строятся структуры решений, точно удовлетворяющие различным вариантам граничных условий.

Как известно, к эффективным способам оценки точности численных решений краевых задач относятся апостериорные оценки, основанные на применении встречных вариационных методов. В работе [1] на основе теории двойственности выпуклого анализа показано, что задача минимизации функционала Лагранжа $I_L(U)$ и двойственная ей задача максимизации функционала Кастильяно $\mathbf{I}_K(\sigma)$ эквивалентны задаче определения седловой точки $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\sigma})$ функционала Рейсснера $\mathbf{I}_R(\mathbf{u}, \sigma)$. При этом для функционалов Лагранжа и Кастильяно их нижняя и соответственно верхняя границы совпадают и равны значению функционала Рейсснера в его точке стационарности:

$$\inf_{\mathbf{u}\in V} \mathbf{I}_L(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_R(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\sigma}) = \sup_{\sigma\in Y^*} \mathbf{I}_C(\sigma). \qquad (4)$$

При выполнении равенства (4) найденные решения энергетически эквивалентны точному решению $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\sigma}$. Это обстоятельство положено в основу метода апостериорной двусторонней оценки полученных с помощью функционала Рейсснера приближенных решений [1]. Автором выполнен немалый объем численных исследований сходимости результатов, удовлетворительное соответствие которых с известными аналитическими, численными и экспериментальными данными подтверждают обоснованность применения предложенного метода. При этом используемый при расчетах программно осуществляемый алгоритм интегральной оценки численных решений позволяет автоматизировать поиск такого количества аппроксимаций, при котором процесс сходимости приближенных решений приобретает устойчивый характер

Выводы.

Успех в расчетах напряженно–деформированного состояния оболочек определяется не только обоснованностью расчетных схем и возможностями принятой уточненной модели оболочки, но и уровнем реализации используемого метода при решении конкретных и значимых в прикладном отношении классов задач. Эффективность и возможности предложенного метода [1] подтверждены решением ряда сложных задач для конструктивных элементов, использующихся в различных отраслях техники. В частности, выполнены расчеты таких многосвязных оболочечных элементов, как ленточные бандажи рабочих лопаток паровых турбин, корпус гидромотора, роторы машин для свивки прядей металлокорда (в монографии [1] указаны ссылки на 33 научные работы автора). Впервые полученные в рамках уточненной теории результаты решения периодических задач для анизотропных цилиндрических оболочек отражены в первом томе издания «Методы расчета оболочек» [6].

Литература

1. Сало В.А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с.

2. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 285 с.

3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 566 с.

4. Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. – СПб.: С.–Петербург. ун–т, 1996. – 278 с.

5. Сало В.А. Доказательство достаточного признака сходимости метода Ритца для смешанного вариационного принципа Рейсснера // Вестник ХГПУ. – Харьков, 2000. – Вып. 95. – С. 70–75.

6. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. Методы расчета оболочек. Т.1. –К.: Наук. думка, 1980.–636 с.