УДК 62-752+62-755

БЕЗРОЗМІРНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЩО ОПИСУЮТЬ СТІЙКІСТЬ ОСНОВНИХ РУХІВ ОДНІЄЇ РОТОРНОЇ СИСТЕМИ

Приведено до безрозмірного вигляду диференціальні рівняння, що описують стійкість основних рухів системи, складеної з незрівноваженого ротора з нерухомою точкою, корпуса і автобалансира. Зроблена оцінка малості введених безрозмірних параметрів, визначені межі їх зміни

Ключові слова: ротор, дисбаланс, автобалансир, безрозмірні диференціальні рівняння

Приведены к безразмерному виду дифференциальные уравнения, которые описывают устойчивость основных движений системы, состоящей из неуравновешенного ротора с неподвижной точкой, корпуса и автобалансира. Сделана оценка малости введенных безразмерных параметров, определены границы их изменения

Ключевые слова: ротор, дисбаланс, автобалансир, безразмерные дифференциальные уравнения

The differential equations that describe the stability of the main motions of system consisting of unbalanced rotor with a fixed point, corps and autobalancer are reduced to dimensionless form. The estimation of smallness of introduced dimensionless parameters is made; the boundaries of their changes are defined

Key words: rotor, imbalance, autobalancer, dimensionless differential equations

Г.Б. Філімоніхін
Доктор технічних наук, професор
Кафедра деталей машин та прикладної механіки**
Контактний тел.: (0522) 39-05-47, 067-520-57-42
E-mail:filimonikhin@narod.ru, fgb@online.ua

В.В. Гончаров
Кандидат фізико-математичних наук, доцент*
Контактний тел.: (0522) 39-05-64, 050-341-00-11
E-mail: matkora@narod.ru

І.І. Філімоніхіна
Кандидат фізико-математичних наук, старший викладач*
Контактний тел.: (0522) 39-05-64, 067-520-57-42
E-mail:fii@online.ua

*Кафедра вищої математики та фізики**
**Кіровоградський національний технічний університет
пр. Університетський, 8, м. Кіровоград, 25006

Вступ

В роботі [2] за допомогою розробленої в роботі [1] методики складання спрощених диференціальних рівнянь руху роторних систем отримані диференціальні рівняння у розмірному вигляді, які описують стійкість основних рухів системи, складеної з незрівноваженого ротора з нерухомою точкою, корпуса і автобалансира (АБ) у випадку, коли коригувальні вантажі (КВ) однакові, рухаються по одній біговій доріжці і на них діють однакові сили в'язкого опору. В даній роботі ці рівняння приводяться до безрозмірного вигляду, робиться оцінка малості введених безрозмірних параметрів, визначаються межі їх зміни.

1. Опис моделі, диференціальні рівняння, які описують стійкість основного руху системи

У роботі [2] була розглянута така роторна система з АБ. Осесиметричний ротор встановлений у масивному корпусі, із можливістю повороту навколо власної подовжньої осі, яка є його головною центральною віссю інерції (рис. 1). Корпус утримують опори: шарнірна – у точці O, завдяки якій ротор має нерухому точку O на подовжній осі та в'язко-пружні.

Нерухомі осі Oxyz введені для положення статичної рівноваги системи: вісь Oz спрямована по подовжній осі ротора, осі Ox, Oy спрямовані паралельно напрямкам в'язко-пружних (попередньо недеформованих) опор так, що трійка осей Oxyz – права. Рухомі осі Ouvw жорстко зв'язані з корпусом, а $O\xi\eta\zeta$ – з ротором. У вихідному положенні роторної системи всі три системи осей співпадають (рис. 1, а).

Припускається, що центр ваги ротора і корпуса знаходяться на його подовжній осі. Відносно осей Ouvw ротор і корпус мають такі тензори інерції

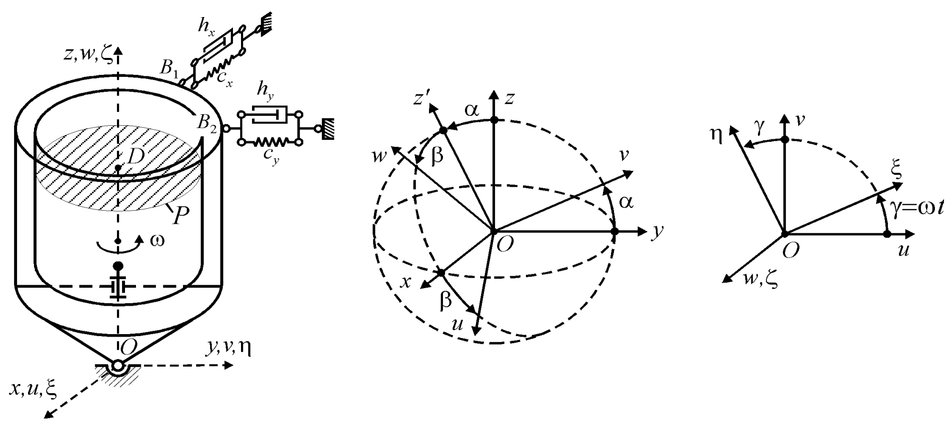
$$\mathbf{J}_р = \mathrm{Diag}(A_р, A_р, C_р),\ \mathbf{J}_р = \mathrm{Diag}(A_к, A_к, C_к)\ . \qquad (1)$$

Корпус утримують дві в'язко-пружні недеформовані опори з коефіцієнтами в'язкості h_x, h_y та жорсткості c_x, c_y, радіус-вектори точок прикладання яких (рис. 1, а) $\mathbf{r}_{B_1}=(-x_B,0,z_B)^T$, $\mathbf{r}_{B_2}=(0,y_B,z_B)^T$.

У площині P ($\zeta=d$) ротора на відстані r_0 від його подовжньої осі знаходиться точкова маса m_0, яка утворює статичний дисбаланс **s** (в початковий момент вектор **s** направлений по осі x).

У цій площині ротор зрівноважує АБ, складений з n однакових куль чи циліндричних роликів. Маса i-го КВ m.

Модель руху ротора і корпуса наведена на рис. 1.



а) б) в)

Рис. 1. Кінематика руху ротора і корпуса: а — вихідне положення системи; б — поворот ротора разом з корпусом на кути α, β; в — поворот ротора відносно корпуса на кут γ

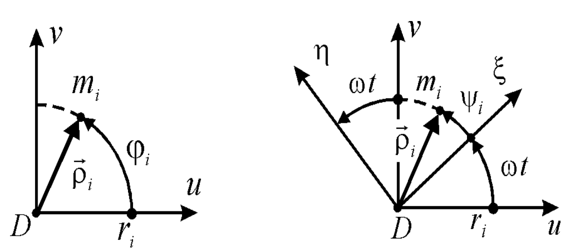
Припускається, що ротор обертається відносно корпуса із сталою кутовою швидкістю ω.

Положення маси дисбалансу чи КВ (які розглядаються як точки) у площині P визначається відносними кутами ψ_i, які відраховуються між віссю ξ і відносними радіус-векторами $\vec{\rho}_i$ (рис. 2, б).

Відносному рухові КВ перешкоджають сили в'язкого опору

$$F_i^{(оп)}=hu_i\,,\ /i=\overline{1,n}\,/\,, \tag{2}$$

де h – коефіцієнт сил в'язкого опору, u_i – модуль відносної швидкості КВ.



а) б)

Рис. 2. Кінематика руху КВ, маси дисбалансу: а — абсолютні, б — відносні кути

В роботі [2] отримано замкнуту відносно невідомих функцій $\delta=\delta(t)$, $\theta=\theta(t)$, $s_\xi=s_\xi(t)$, $s_\eta=s_\eta(t)$ систему диференціальних рівнянь, які описують стійкість основних рухів роторної системи

$$A(\ddot{\delta}-2\omega\dot{\theta}-\omega^2\delta)+h_\alpha(\dot{\delta}-\omega\theta)+c_\alpha\delta+\\+\omega C_p(\dot{\theta}+\omega\delta)-(\ddot{s}_\eta+2\omega\dot{s}_\xi-\omega^2 s_\eta)d=0\,,$$

$$A(\ddot{\theta}+2\omega\dot{\delta}-\omega^2\theta)+h_\alpha(\dot{\theta}+\omega\delta)+\\+c_\alpha\theta-\omega C_p(\dot{\delta}-\omega\theta)+(\ddot{s}_\xi-2\omega\dot{s}_\eta-\omega^2 s_\xi)d=0\,,$$

$$k\ddot{s}_\xi+\frac{h}{m}\dot{s}_\xi=\frac{mn}{2}[-a_{D\xi}(1-b_1)+a_{D\eta}b_2]\,,$$

$$k\ddot{s}_\eta+\frac{h}{m}\dot{s}_\eta=\frac{mn}{2}[a_{D\xi}b_2-a_{D\eta}(1+b_1)]\,, \tag{3}$$

де: $a_{D\xi}=(\ddot{\theta}+2\omega\dot{\delta}-\omega^2\theta)d$,

$$a_{D\eta}=-(\ddot{\delta}-2\omega\dot{\theta}-\omega^2\delta)d\,; \tag{4}$$

$$\delta=\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t\,,\\ \theta=-\alpha\sin\omega t+\beta\cos\omega t\,; \tag{5}$$

$$s_\xi=\sum_{i=1}^{n}m_i r_i\cos\psi_i+m_0r_0=\\=mr\sum_{i=1}^{n}\cos\psi_i+m_0r_0\,,$$

$$s_\eta=\sum_{i=1}^{n}m_i r_i\sin\psi_i=\\=mr\sum_{i=1}^{n}\sin\psi_i\,; \tag{6}$$

$$A=A_к+A_р\,,$$

$$h_\alpha=z_B^2h_x,c_\alpha=z_B^2c_x\,;$$

$$k=\begin{cases}7/5, & \text{для куль,}\\ 3/2, & \text{для циліндричних роликів,}\\ 1, & \text{для дисбалансу;}\end{cases} \tag{7}$$

$$b_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos 2\tilde{\psi}_i\,,\ b_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin 2\tilde{\psi}_i\,. \tag{8}$$

В систему (3) входить дванадцять параметрів $A,\omega,h_\alpha,c_\alpha,C_p,d$, k,h,m,n, b_1,b_2.

2. Приведення рівнянь до безрозмірного вигляду

2.1. Попереднє перетворення системи. Додамо попарно перші та останні два рівняння системи (3) помноживши їх спочатку відповідно на $\cos\vartheta_1$ і $\sin\vartheta_1$, а потім на $-\sin\vartheta_1$ і $\cos\vartheta_1$. У нових змінних

$$\delta_1=\delta\cos\vartheta_1+\theta\sin\vartheta_1\,,\ \theta_1=-\delta\sin\vartheta_1+\theta\cos\vartheta_1\,,$$

$$s_{\xi_1}=s_\xi\cos\vartheta_1+s_\eta\sin\vartheta_1\,,\ s_{\eta_1}=-s_\xi\sin\vartheta_1+s_\eta\cos\vartheta_1\,, \tag{9}$$

отримаємо

$$A(\ddot{\delta}_1-2\omega\dot{\theta}_1-\omega^2\delta_1)+h_\alpha(\dot{\delta}_1-\omega\theta_1)+\\+c_\alpha\delta_1+\omega C_p(\dot{\theta}_1+\omega\delta_1)-(\ddot{s}_{\eta_1}+2\omega\dot{s}_{\xi_1}-\omega^2 s_{\eta_1})d=0\,,$$

$$A(\ddot{\theta}_1+2\omega\dot{\delta}_1-\omega^2\theta_1)+h_\alpha(\dot{\theta}_1+\omega\delta_1)+\\+c_\alpha\theta_1-\omega C_p(\dot{\delta}_1-\omega\theta_1)+(\ddot{s}_{\xi_1}-2\omega\dot{s}_{\eta_1}-\omega^2 s_{\xi_1})d=0\,, \tag{10}$$

$$k\ddot{s}_{\xi_1}+\frac{h}{m}\dot{s}_{\xi_1}=\frac{mn}{2}[a_{D\xi}(b_1\cos\vartheta_1+b_2\sin\vartheta_1)+$$
$$+a_{D\eta}(b_2\cos\vartheta_1-b_1\sin\vartheta_1)-a_{D\xi}\cos\vartheta_1-a_{D\eta}\sin\vartheta_1],$$

$$k\ddot{s}_{\eta_1}+\frac{h}{m}\dot{s}_{\eta_1}=-\frac{mn}{2}[a_{D\xi}(b_1\sin\vartheta_1-b_2\cos\vartheta_1)+$$
$$+a_{D\eta}(b_2\sin\vartheta_1+b_1\cos\vartheta_1)-a_{D\xi}\sin\vartheta_1+a_{D\eta}\cos\vartheta_1]. \qquad (11)$$

Введемо кут ϑ такий, що

$$\cos\vartheta=b_1/b,\ \sin\vartheta=b_2/b,\ b=\sqrt{b_1^2+b_2^2}\,. \qquad (12)$$

Підставивши b_1, b_2 з (12) в рівняння (11) отримаємо

$$k\ddot{s}_{\xi_1}+\frac{h}{m}\dot{s}_{\xi_1}= =\frac{mn}{2}\{b[a_{D\xi}\cos(\vartheta-\vartheta_1)+a_{D\eta}\sin(\vartheta-\vartheta_1)]-a_{D\xi_1}\},$$

$$k\ddot{s}_{\eta_1}+\frac{h}{m}\dot{s}_{\eta_1}= =\frac{mn}{2}\{b[a_{D\xi}\sin(\vartheta-\vartheta_1)-a_{D\eta}\cos(\vartheta-\vartheta_1)]-a_{D\eta_1}\},$$

де $a_{D\xi_1}=(\ddot{\theta}_1+2\omega\dot{\delta}_1-\omega^2\theta_1)d$, $a_{D\eta_1}=-(\ddot{\delta}_1-2\omega\dot{\theta}_1-\omega^2\delta_1)d$.

Нехай $\vartheta_1=\vartheta/2$, тоді з врахуванням (9) останні рівняння приймуть вигляд

$$k\ddot{s}_{\xi_1}+\frac{h}{m}\dot{s}_{\xi_1}=-\frac{mn}{2}(1-b)a_{D\xi_1},$$
$$k\ddot{s}_{\eta_1}+\frac{h}{m}\dot{s}_{\eta_1}=-\frac{mn}{2}(1+b)a_{D\eta_1}. \qquad (13)$$

Отже, отримана замкнута відносно невідомих функцій δ_1, θ_1, s_{ξ_1}, s_{η_1} систему диференціальних рівнянь (10), (13), яка описує стійкість основних рухів роторної системи із меншим числом параметрів.

2.2. Приведення рівнянь до безрозмірного вигляду. Вводимо безрозмірний час τ:

$$\tau=\omega_0 t,\ \dot{f}=\frac{df}{dt}=\omega_0\frac{df}{d\tau}=\omega_0 f',$$
$$\ddot{f}=\frac{d\dot{f}}{dt}=\omega_0\frac{d(\omega_0 f')}{d\tau}=\omega_0^2\frac{df'}{d\tau}=\omega_0^2 f'', \qquad (14)$$

і безрозмірні параметри

$$\tilde{\delta}_1=\delta_1/l_\alpha,\ \tilde{\theta}_1=\theta_1/l_\alpha,\ \tilde{s}_{\xi_1}=s_{\xi_1}/l_u,\ \tilde{s}_{\eta_1}=s_{\eta_1}/l_u, \qquad (15)$$

де ω_0, l_α, l_u – масштабні коефіцієнти, які будуть вибрані нижче. Тоді рівняння (10), (13) перетворяться до вигляду

$$Al_\alpha(\omega_0^2\tilde{\delta}_1''-2\omega\omega_0\tilde{\theta}_1'-\omega^2\tilde{\delta}_1)+h_\alpha l_\alpha(\omega_0\tilde{\delta}_1'-\omega\tilde{\theta}_1)+c_\alpha l_\alpha\tilde{\delta}_1+$$
$$\omega C_p l_\alpha(\omega_0\tilde{\theta}_1'+\omega\tilde{\delta}_1)-(\omega_0^2\tilde{s}_{\eta_1}''+2\omega\omega_0\tilde{s}_{\xi_1}'-\omega^2\tilde{s}_{\eta_1})l_u d=0,$$
$$Al_\alpha(\omega_0^2\tilde{\theta}_1''+2\omega\omega_0\tilde{\delta}_1'-\omega^2\tilde{\theta}_1)+h_\alpha l_\alpha(\omega_0\tilde{\theta}_1'+\omega\tilde{\delta}_1)+c_\alpha l_\alpha\tilde{\theta}_1-$$
$$\omega C_p l_\alpha(\omega_0\tilde{\delta}_1'-\omega\tilde{\theta}_1)+(\omega_0^2\tilde{s}_{\xi_1}''-2\omega\omega_0\tilde{s}_{\eta_1}'-\omega^2\tilde{s}_{\xi_1})l_u d=0,$$

$$\left(\omega_0^2 k\tilde{s}_{\xi_1}''+\frac{h}{m}\omega_0\tilde{s}_{\xi_1}'\right)l_u= =-\frac{mnl_\alpha d}{2}(1-b)(\omega_0^2\tilde{\theta}_1''+2\omega\omega_0\tilde{\delta}_1'-\omega^2\tilde{\theta}_1),$$

$$\left(k\omega_0^2\tilde{s}_{\eta_1}''+\frac{h}{m}\omega_0\tilde{s}_{\eta_1}'\right)l_u= =\frac{mnl_\alpha d}{2}(1+b)(\omega_0^2\tilde{\delta}_1''-2\omega\omega_0\tilde{\theta}_1'-\omega^2\tilde{\delta}_1). \qquad (16)$$

Поділивши перші два рівняння в (16) на $A\omega_0^2 l_\alpha$, а останні два – на $k\omega_0^2 l_u$, отримаємо

$$\tilde{\delta}_1''-2\frac{\omega}{\omega_0}\tilde{\theta}_1'-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\tilde{\delta}_1+\frac{h_\alpha}{A\omega_0}\left(\tilde{\delta}_1'-\frac{\omega}{\omega_0}\tilde{\theta}_1\right)+$$
$$+\frac{c_\alpha}{A\omega_0^2}\tilde{\delta}_1+\frac{C_p}{A}\frac{\omega}{\omega_0}\left(\tilde{\theta}_1'+\frac{\omega}{\omega_0}\tilde{\delta}_1\right)-$$
$$-\left(\tilde{s}_{\eta_1}''+2\frac{\omega}{\omega_0}\tilde{s}_{\xi_1}'-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\tilde{s}_{\eta_1}\right)\frac{l_u d}{l_\alpha A}=0,$$
$$\tilde{\theta}_1''+2\frac{\omega}{\omega_0}\tilde{\delta}_1'-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\tilde{\theta}_1+\frac{h_\alpha}{A\omega_0}\left(\tilde{\theta}_1'+\frac{\omega}{\omega_0}\tilde{\delta}_1\right)+$$
$$+\frac{c_\alpha}{A\omega_0^2}\tilde{\theta}_1-\frac{C_p}{A}\frac{\omega}{\omega_0}\left(\tilde{\delta}_1'-\frac{\omega}{\omega_0}\tilde{\theta}_1\right)+$$
$$+\left(\tilde{s}_{\xi_1}''-2\frac{\omega}{\omega_0}\tilde{s}_{\eta_1}'-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\tilde{s}_{\xi_1}\right)\frac{l_u d}{l_\alpha A}=0,$$
$$\tilde{s}_{\xi_1}''+\frac{h}{km\omega_0}\tilde{s}_{\xi_1}'=-\frac{mnl_\alpha d}{2l_u k}(1-b)\left(\tilde{\theta}_1''+2\frac{\omega}{\omega_0}\tilde{\delta}_1'-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\tilde{\theta}_1\right),$$
$$\tilde{s}_{\eta_1}''+\frac{h}{km\omega_0}\tilde{s}_{\eta_1}'=\frac{mnl_\alpha d}{2l_u k}(1+b)\left(\tilde{\delta}_1''-2\frac{\omega}{\omega_0}\tilde{\theta}_1'-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\tilde{\delta}_1\right). \qquad (17)$$

Очевидним є введення наступних безрозмірних параметрів

$$\tilde{\omega}=\omega/\omega_0,\ \tilde{C}=C_p/A,\ \tilde{h}_\alpha=h_\alpha/(A\omega_0),$$
$$\tilde{c}_\alpha=c_\alpha/(A\omega_0^2),\ \tilde{h}=h/(km\omega_0). \qquad (18)$$

Тоді рівняння (17) приймуть вигляд

$$\tilde{\delta}_1''-2\tilde{\omega}\tilde{\theta}_1'-\tilde{\omega}^2\tilde{\delta}_1+\tilde{h}_\alpha(\tilde{\delta}_1'-\tilde{\omega}\tilde{\theta}_1)+\tilde{c}_\alpha\tilde{\delta}_1+\tilde{C}\tilde{\omega}(\tilde{\theta}_1'+\tilde{\omega}\tilde{\delta}_1)-$$
$$-(\tilde{s}_{\eta_1}''+2\tilde{\omega}\tilde{s}_{\xi_1}'-\tilde{\omega}^2\tilde{s}_{\eta_1})l_u d/(Al_\alpha)=0,$$

$$\tilde{\theta}_1''+2\tilde{\omega}\tilde{\delta}_1'-\tilde{\omega}^2\tilde{\theta}_1+\tilde{h}_\alpha(\tilde{\theta}_1'+\tilde{\omega}\tilde{\delta}_1)+\tilde{c}_\alpha\tilde{\theta}_1-\tilde{C}\tilde{\omega}(\tilde{\delta}_1'-\tilde{\omega}\tilde{\theta}_1)+$$
$$+(\tilde{s}_{\xi_1}''-2\tilde{\omega}\tilde{s}_{\eta_1}'-\tilde{\omega}^2\tilde{s}_{\xi_1})l_u d/(Al_\alpha)=0,$$

$$\tilde{s}_{\xi_1}''+\tilde{h}\tilde{s}_{\xi_1}'=-\frac{mnl_\alpha d}{2l_u k}(1-b)(\tilde{\theta}_1''+2\tilde{\omega}\tilde{\delta}_1'-\tilde{\omega}^2\tilde{\theta}_1),$$
$$\tilde{s}_{\eta_1}''+\tilde{h}\tilde{s}_{\eta_1}'=\frac{mnl_\alpha d}{2l_u k}(1+b)(\tilde{\delta}_1''-2\tilde{\omega}\tilde{\theta}_1'-\tilde{\omega}^2\tilde{\delta}_1). \qquad (19)$$

Вибором невизначених масштабних коефіцієнтів ω_0, l_α, l_u зменшимо кількість безрозмірних параметрів. Нехай в перших двох рівняннях (19) коефіцієнти біля змінних $\tilde{\delta}_1, \tilde{\theta}_1$ та других похідних $\tilde{s}_{\xi_1}'', \tilde{s}_{\eta_1}''$ рівні одиниці, тобто

$$l_u d/(Al_\alpha)=1,\ \tilde{c}_\alpha=c_\alpha/(A\omega_0^2)=1.$$

Тоді

$$l_\alpha = l_u d / A\,,\quad \omega_0 = \sqrt{c_\alpha / A} \qquad (20)$$

і рівняння (19) приймуть вигляд

$$\begin{aligned}&\tilde\delta_1'' - 2\tilde\omega\tilde\theta_1' - \tilde\omega^2\tilde\delta_1 + \tilde h_\alpha(\tilde\delta_1' - \tilde\omega\tilde\theta_1) + \tilde\delta_1 + \tilde C\tilde\omega(\tilde\theta_1' + \tilde\omega\tilde\delta_1) - \\ &-(\tilde s_{\eta_1}'' + 2\tilde\omega\tilde s_{\xi_1}' - \tilde\omega^2\tilde s_{\eta_1}) = 0\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}&\tilde\theta_1'' + 2\tilde\omega\tilde\delta_1' - \tilde\omega^2\tilde\theta_1 + \tilde h_\alpha(\tilde\theta_1' + \tilde\omega\tilde\delta_1) + \\ &+\tilde\theta_1 - \tilde C\tilde\omega(\tilde\delta_1' - \tilde\omega\tilde\theta_1) + \tilde s_{\xi_1}'' - 2\tilde\omega\tilde s_{\eta_1}' - \tilde\omega^2\tilde s_{\xi} = 0\end{aligned}, \qquad (21)$$

$$\tilde s_{\xi_1}'' + \tilde h\tilde s_{\xi_1}' = -\frac{mnd^2}{2Ak}(1-b)(\tilde\theta_1'' + 2\tilde\omega\tilde\delta_1' - \tilde\omega^2\tilde\theta_1)\,,$$

$$\tilde s_{\eta_1}'' + \tilde h\tilde s_{\eta_1}' = \frac{mnd^2}{2Ak}(1+b)(\tilde\delta_1'' - 2\tilde\omega\tilde\theta_1' - \tilde\omega^2\tilde\delta_1)\,. \qquad (22)$$

Вводимо останній параметр

$$\tilde m = mnd^2/(2kA),\quad \tilde m \ll 1\,. \qquad (23)$$

Підставивши (23) в (22) отримаємо

$$\tilde s_{\xi_1}'' + \tilde h\tilde s_{\xi_1}' = -\tilde m(1-b)(\tilde\theta_1'' + 2\tilde\omega\tilde\delta_1' - \tilde\omega^2\tilde\theta_1)\,,$$

$$\tilde s_{\eta_1}'' + \tilde h\tilde s_{\eta_1}' = \tilde m(1+b)(\tilde\delta_1'' - 2\tilde\omega\tilde\theta_1' - \tilde\omega^2\tilde\delta_1)\,. \qquad (24)$$

Отже, стійкість основних рухів системи описується безрозмірними рівняннями (21), (24) з шістьма незалежними безрозмірними параметрами:

$$\tilde\omega, \tilde m, \tilde C, \tilde h_\alpha, \tilde h, b\,. \qquad (25)$$

3. Комплексне псевдосгортання диференціальних рівнянь

Помножимо 2-е рівняння системи (21) і 1-є – (24) на уявну одиницю i та додамо і віднімемо їх відповідно від 1-го та 2-го рівнянь вказаних систем:

$$\begin{aligned}L_1 &= \tilde\delta_1'' + \tilde\theta_1'' i + 2\tilde\omega(\tilde\delta_1' + \tilde\theta_1' i)i - \tilde\omega^2(\tilde\delta_1 + \tilde\theta_1 i) + \\ &+\tilde h_\alpha[\tilde\delta_1' + \tilde\theta_1' i + \tilde\omega(\tilde\delta_1 + \tilde\theta_1 i)i] + \tilde\delta_1 + \tilde\theta_1 i + \\ &+\tilde C\tilde\omega[-(\tilde\delta_1' + \tilde\theta_1' i)i + \tilde\omega(\tilde\delta_1 + \tilde\theta_1 i)] - (\tilde s_{\eta_1}'' - \tilde s_{\xi_1}'' i) - \\ &-2\tilde\omega i(\tilde s_{\eta_1}' - \tilde s_{\xi_1}' i) + \tilde\omega^2(\tilde s_{\eta_1} - \tilde s_{\xi_1} i) = 0\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}L_3 &= \tilde s_{\eta_1}'' + \tilde s_{\xi_1}'' i + \tilde h(\tilde s_{\eta_1}' + \tilde s_{\xi_1}' i) - \tilde m[(\tilde\delta_1'' - \tilde\theta_1'' i) + b(\tilde\delta_1'' + \tilde\theta_1'' i) - \\ &-2\tilde\omega(\tilde\delta_1' - \tilde\theta_1' i)i + 2b\tilde\omega(\tilde\delta_1' + \tilde\theta_1' i)i - \\ &-\tilde\omega^2(\tilde\delta_1 - \tilde\theta_1 i) - b\tilde\omega^2(\tilde\delta_1 + \tilde\theta_1 i)] = 0\end{aligned},$$

$$L_2 = \bar L_1 = 0,\ \ L_4 = \bar L_3 = 0\,. \qquad (26)$$

Вводимо дві пари комплексно-спряжених змінних:

$$\begin{aligned}&\tilde\delta_z = \tilde\delta_1 + \tilde\theta_1 i,\quad \tilde\theta_z = \tilde\delta_1 - \tilde\theta_1 i, \\ &\tilde s_{z\eta} = \tilde s_{\eta_1} + \tilde s_{\xi_1} i,\quad \tilde s_{z\xi} = \tilde s_{\eta_1} - \tilde s_{\xi_1} i\end{aligned}. \qquad (27)$$

Тоді система (26) прийме вигляд

$$\begin{aligned}L_1 &= \tilde\delta_z'' + [\tilde h_\alpha + (2-\tilde C)\tilde\omega i]\tilde\delta_z' + \\ &+[1 + (\tilde C - 1)\tilde\omega^2 + \tilde h_\alpha\tilde\omega i]\tilde\delta_z - \tilde s_{z\xi}'' - 2\tilde\omega i\tilde s_{z\xi}' + \tilde\omega^2\tilde s_{z\xi} = 0, \\ L_2 &= \tilde\theta_z'' + [\tilde h_\alpha - (2-\tilde C)\tilde\omega i]\tilde\theta_z' + \\ &+[1 + (\tilde C - 1)\tilde\omega^2 - \tilde h_\alpha\tilde\omega i]\tilde\theta_z - \tilde s_{z\eta}'' + 2\tilde\omega i\tilde s_{z\eta}' + \tilde\omega^2\tilde s_{z\eta} = 0,\end{aligned} \qquad (28)$$

$$\begin{aligned}L_3 &= -\tilde m[b(\tilde\delta_z'' + 2\tilde\omega i\tilde\delta_z' - \tilde\omega^2\tilde\delta_z) + \tilde\theta_z'' - 2\tilde\omega i\tilde\theta_z' - \tilde\omega^2\tilde\theta_z] + \\ &+\tilde s_{z\eta}'' + \tilde h\tilde s_{z\eta}' = 0, \\ L_4 &= -\tilde m[\tilde\delta_z'' + 2\tilde\omega i\tilde\delta_z' - \tilde\omega^2\tilde\delta_z + b(\tilde\theta_z'' - 2\tilde\omega i\tilde\theta_z' - \tilde\omega^2\tilde\theta_z)] + \\ &+\tilde s_{z\xi}'' + \tilde h\tilde s_{z\xi}' = 0\end{aligned}. \qquad (29)$$

Надалі стійкість основних рухів системи буде досліджуватися за рівняннями (28), (29).

4. Оцінка порядку безрозмірних параметрів, та визначення меж їх зміни

Параметр $\tilde\omega$ відповідає кутовій швидкості обертання ротора і змінюється у широких межах, теоретично – від 0 до +∞. Задача полягає у визначенні таких областей $\tilde\omega$, у межах яких буде стійкий основний рух (тобто буде наставати автобалансування).

Оскільки для реальних роторних машин маса КВ набагато менша маси ротора (ротора з корпусом), то $\tilde m \ll 1$. Параметр $\tilde C$ еквівалентний 1, бо є співвідношенням між осьовими моментами інерції деякого умовного ротора, про який буде сказано нижче. Параметри $\tilde h_\alpha$, $\tilde h$ характеризують сили опору в системі і для реальних роторних машин еквівалентні 1.

Так як

$$1 - b^2 = \frac{2}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\sin^2(\tilde\psi_i - \tilde\psi_j) \ge 0\,, \qquad (30)$$

то параметр b при довільній зміні дисбалансу і кількості куль змінюється в межах від 0 до 1.

Випадок $b = 1$ є критичним, так як рівняння (24) чи (29) при цьому мають принаймні один нульовий корінь. З (30) слідує, що це можливе тільки при

$$\tilde\psi_i = \tilde\psi + \sigma_i\pi,\quad \sigma_i = \{0, 1\}\ \ /\, i = \overline{1,n}\,/\,. \qquad (31)$$

де $\tilde\psi \in [0, 2\pi)$ – деякий фіксований кут.

Нехай для j куль $\tilde\psi_i = \tilde\psi$, а для $n - j$ куль $\tilde\psi_i = \tilde\psi + \pi$, де $j = \overline{0,n}$. Тоді на основних рухах з (6) отримуємо

$$mr(2j - n)\cos\tilde\psi + m_0 r_0 = 0,\quad mr(2j - n)\sin\tilde\psi = 0\,. \qquad (32)$$

З останньої системи маємо:

$$2j - n \ne 0,\ \ j < n/2:\ \tilde\psi = 0\,,\ \ m_0 r_0 = mr(n - 2j)\,, \qquad (33)$$

(випадок $\tilde\psi = \pi$ забезпечується вибором σ_i);

$$2j - n = 0:\ \tilde\psi \in [0, \pi)\,,\ \ m_0 r_0 = 0\,. \qquad (34)$$

Розв'язок (34) задає однопараметричну сім'ю основних рухів ($\tilde\psi$ – параметр).

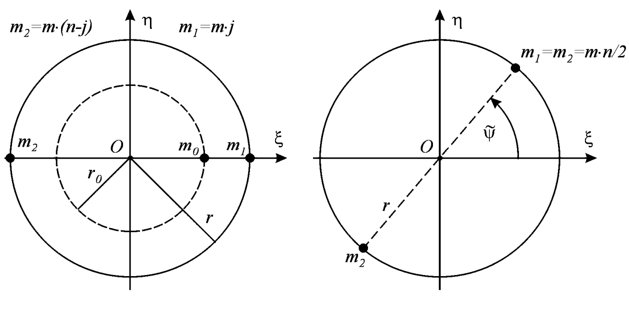
Введемо число p як цілу частину числа $n/2$:

$$p=[n/2], \tag{35}$$

тоді всіх критичних випадків – $p+1$.

Зауважимо, що:

– рівності (33) мають місце, коли j куль ($j=\overline{0,p}$/, $j<n/2$) відхилені в сторону дисбалансу, а усі інші в – сторону протилежно дисбалансу (рис. 3, а); дисбаланс при цьому приймає відповідні дискретні значення $mr(n-2j)$; таких випадків $p+1$ при непарному n і p – при парному;



а) б)

Рис. 3. Розташування куль в критичних випадках

– рівності (34) мають місце, коли n парне і половина куль розташована в одному довільному місці, а інша – в діаметрально протилежному (рис. 3, б); дисбаланс при цьому рівний нулю.

Остаточно маємо такі співвідношення малості для безрозмірних параметрів:

$$\tilde{\omega}\in(0,+\infty),\ \tilde{m}<<1,\ \tilde{C},\ \tilde{h}_\alpha,\ \tilde{h}\sim 1,\ b\in[0,1],\ (\Sigma\in[0,1]) . \tag{36}$$

Відповідно до вихідних диференціальних рівнянь (3) корпус і ротор начебто утворюють деякий умовний ротор із осьовими моментами інерції $A=A_к+A_р$, $C=C_р$, обчисленими відносно осей, що проходять через нерухому точку. Цей ротор в залежності від величини параметра $\tilde{C}$: $\tilde{C}<1$ – довгий; $\tilde{C}\approx 1$ – сферичний; $\tilde{C}>1$ – короткий. Оскільки $\tilde{C}=C_р/(A_к+A_р)$, то при масивному корпусі умовний ротор буде – довгим, навіть якщо сам ротор – короткий. При дуже масивному корпусі можливе і таке співвідношення між безрозмірними параметрами

$$0<\tilde{m}<<\tilde{C}<<1 . \tag{37}$$

Надалі будемо приймати, що між параметрами системи мають місце співвідношення (36).

Висновки

Проведені дослідження дозволяють зробити такі висновки.

1. Стійкість основних рухів системи залежить від дванадцяти розмірних параметрів, або від шості незалежних безрозмірних параметрів $\tilde{\omega},\tilde{h}_\alpha,\tilde{C},\tilde{h},\tilde{m},b$ незалежно від кількості КВ в АБ.
2. Безрозмірний параметр $\tilde{m}$, що відображає відношення маси КВ до маси всієї системи можна розглядати як малий параметр.
3. Випадки, коли $b=1$ є критичними, бо у системи з'являється принаймні один нульовий корінь.

Література

1. Філімоніхін Г.Б. Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус - автобалансир / Філімоніхін Г.Б., Гончаров В.В. // Збірник наукових праць КНТУ, 2009, Вип. 22, С. 357–363.
2. Філімоніхін Г.Б. Диференціальні рівняння руху системи, складеної з незрівноваженого ротора з нерухомою точкою, корпуса і автобалансира / Філімоніхін Г.Б., Гончаров В.В. // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. Загальнодержавний міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 40, Ч. II – Кіровоград; КНТУ, 2010 р. С. 86–93.