

УДК 678.08

*Розглянуто особливості взаємодії подрібнювального матеріалу з робочим органом. Запропоновано математичну модель взаємодії матеріалу з робочим органом. Наведено результати моделювання процесу подрібнення в програмному комплексі Impact*

*Ключові слова: подрібнювач, полімерні матеріали, робочий орган, Impact*

*Рассмотрены особенности взаимодействия измельчаемого материала с рабочим органом. Предложена математическая модель взаимодействия материала с рабочим органом. Приведены результаты моделирования процесса измельчения в программном комплексе Impact*

*Ключевые слова: измельчитель, полимерные материалы, рабочий орган, Impact*

*The features of co-operation of a crush material are considered with a working organ. The mathematical model of co-operation of material is offered with a working organ. The results of design of process of growing shallow are resulted in a programmatic complex Impact*

*Key words: grinding down, polymeric materials, working organ, Impact*

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПОДРІБНЕННЯ ПОЛІМЕРНИХ МАТЕРІАЛІВ У РОТОРНИХ ДИСКОВИХ ПОДРІБНЮВАЧАХ

**В. В. Заяць**

Аспірант

Кафедра машин та апаратів

Хмельницький національний університет  
вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, 29000

E-mail: zvv2110@ukr.net

Контактний тел.: 067-214-00-44

## Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок з важливими практичними завданнями

Будь-яка інженерна розробка повинна задовольняти визначеним критеріям. Відповідність цим критеріям можлива тільки при комплексній оцінці впливу геометричних параметрів, властивостей матеріалів, що використовуються і умов роботи виробу. З відомих методів переробки відходів гум і термопластичних полімерів найбільш прийнятним є спосіб механічного подрібнення. Механічне подрібнення можна здійснювати при понижених [1] і звичайних температурах [2].

В даний час розроблено багато способів подрібнення полімерів, що розрізняються характером навантаження, умовами і стадійністю процесу руйнування. Тип обладнання для подрібнення обирається залежно від величини шматків початкового матеріалу, його фізико-механічних і хімічних властивостей, а також від вимог до дисперсності кінцевого продукту і необхідної продуктивності. В даний час усе існуюче обладнання складається з двигуна, трансмісії, системи керування, робочого органу. Отже, провести вдосконалення процесу подрібнення можливо за рахунок вдосконалення або системи керування (можливість керування техпроцесом), або за рахунок удосконалення робочого органу. Саме робочий орган є головним елементом конструкції, від якого залежить вид матеріалу, що буде подрібнюватись,

його дисперсність, якість і продуктивність процесу переробки.

## Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми

Одним з найбільш розповсюджених методів подрібнення є різання. При механічному руйнуванні полімерів більша частина енергії витрачається на пружне деформування [3]. Таким чином, з точки зору економії енергії, подрібнення слід проводити в умовах, за яких відбуватиметься мінімальне деформування матеріалу. Так, при руйнуванні відходів легкої промисловості різанням частина матеріалу, що знаходиться в складно напруженому стані, порівняно невелика та зосереджена поблизу ріжучої кромки ножа [3-6]. Внаслідок цього робота руйнування при різанні значно менша. Ступінь дисперсності, якої можливо досягнути при даному способі подрібнення 0,5...10 мм.

Найпоширенішим обладнанням для переробки полімерних відходів легкої промисловості є обладнання, яке проектується залежно від умов навантаження матеріалу. Розрізняють різання з контрножем і без контрножа [6]. Різання без контрножа застосовують для розділу на частини великогабаритних шматків матеріалу. Пристрій може бути виконаний у вигляді багатолезового ножа [7,8,9], що обертається,

або ножа закріпленого нерухомо, з обертанням самого матеріалу.

Зосереджене різання матеріалів реалізується в роторних ножових дробарках, в яких ножі розташовані на роторі і статорі. Подрібнювачі цього типу широко використовуються для переробки відходів полімерів на підприємствах легкої промисловості, зокрема для попереднього подрібнення відходів лиття взуттєвого виробництва. В даний час створена велика кількість конструкцій комбінованих подрібнювачів, які використовують для подрібнення відходів легкої промисловості.

Сучасні роторні ножові дробарки мають наступні технологічні недоліки: в процесі роботи відбувається зношування робочих органів під дією сил тертя і удару; конструкції не дозволяють активно впливати на ступінь подрібнення матеріалу; при подрібненні пластичних і в'язких матеріалів в результаті підвищення температури в робочій зоні відбувається процес налипання матеріалу на робочі органи, що різко знижує ефективність процесу подрібнення. Частки кінцевого продукту мають досить великий розкид за розмірами і формою.

Отже, підсумовуючи все вище перераховане можемо зробити висновки, що для зменшення витрат необхідно оптимізувати систему керування (технологію) та робочий орган, також слід звернути увагу на матеріал і його взаємодію з робочим органом. Так як від взаємодії робочого органу і матеріалу залежить кількість енергії, що витрачається обладнанням на процес подрібнення відходів полімерних матеріалів легкої промисловості. Тобто необхідно враховувати технологічні параметри та створити робочий орган, якому необхідно мінімум енергії для виконання певної роботи, в нашому випадку руйнування певної частинки на менші частини.

### Формулювання цілей статті (постановка завдання)

Метою нашого дослідження є розробка загальної моделі взаємодії робочих органів (дисків) з матеріалом і перевірка їх для конкретних умов та обладнання, а також визначення основних факторів, що впливають на отримання потрібного нам результату, а саме, одержання потрібної дисперсності подрібнених полімерних матеріалів для подальшої переробки.

### Виклад основного матеріалу досліджень

Аналіз обладнання та процесів подрібнення дозволив встановити, що для зменшення витрат енергії на процес подрібнення полімерних матеріалів необхідно розглядати взаємодію робочого органу подрібнювача з матеріалом з точки зору мінімізації питомої енергії, що витрачається на утворення одиниці вивільненої поверхні при руйнуванні. Для досягнення поставленої цілі докладніше зупинимось на способах подрібнення.

Отже, як зазначено вище, найпоширенішим на даний час для переробки полімерних відходів легкої промисловості є процес різання.

Аналізуючи конструкторсько-технологічні параметри обладнання необхідно математично описати

моделі роботи даного пристрою та розглянути два основних етапи:

- взаємодія робочого органу з матеріалом;
- визначення основних конструктивно-технологічних параметрів пристрою.

На першому етапі взаємодії робочого органу з матеріалом, визначаються основні характеристики цього процесу, щоб в подальшому використати дану модель і на її основі описати роботу пристрою в загальному.

На другому етапі проводиться визначення основних конструктивно-технологічних параметрів пристрою, що враховують властивості перероблюваного матеріалу. До цих параметрів відноситься визначення продуктивності обладнання та ступеня подрібнення.

З метою вирішення поставленої задачі було прийнято ряд припущень:

- в процесі подрібнення матеріал знаходиться в ізо-термічних умовах переробки;
- розміри частинок матеріалу після подрібнення наближуються до форми куба;
- матеріал, що подрібнюється приймаємо ізотропної будови;
- питома енергія для утворення одиниці вільної поверхні не залежить від розміру частинок матеріалу, що подрібнюється;
- матеріал, що подрібнюється розглядається як монолітний.

Розглядається взаємодія диска з кусочками подрібнюваного матеріалу і для отримання математичної моделі враховуються основні фактори, що істотно впливають на даний технологічний процес. До цих факторів відносяться геометричні параметри пристрою, технологічні фактори і властивості матеріалу.

Для дослідження питання про зміну напружень при переході від одної точки до другої, нескінченно близької їй точки, розглядаються умови рівноваги нескінченно малого прямокутного паралелепіпеда.

В тих випадках, коли частини пружного тіла знаходяться в русі, для випадку руху рівняння рівноваги запишуться в такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + R_x &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + R_y &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + R_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

де  $\sigma$  – компоненти напруження по площадкам, що визначаються відповідними індексами (x,y,z);

$R$  – проекції на координатні осі об'ємних сил;

$\rho$  – густина;

$u$  – переміщення;

$t$  – час.

Рівняння (1) є основними диференціальними рівняннями теорії пружності.

Для врахування властивостей матеріалу необхідно враховувати зв'язок між напруженнями і деформаціями:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \epsilon_t; \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] + \epsilon_t; \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \epsilon_t; \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy}; \epsilon_{yz} = \frac{1}{G} \sigma_{yz}; \epsilon_{zx} = \frac{1}{G} \sigma_{zx}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де E - модуль пружності;  
G - модуль зсуву;  
μ - коефіцієнт Пуассона;  
ε<sub>t</sub> = αT - температурна деформація.

З рівняння (2) отримуємо систему рівнянь, в яких виражається напруження через деформацію для довільної ортогональної системи координат

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) - \frac{E}{1-2\mu} \alpha T \\ \sigma_{yy} &= 2G\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) - \frac{E}{1-2\mu} \alpha T \\ \sigma_{zz} &= 2G\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) - \frac{E}{1-2\mu} \alpha T \\ \sigma_{xy} &= G\epsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= G\epsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= G\epsilon_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (3) \quad \lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

Рівняння (3) виражають загальну форму закону пружності (закону Гука) з урахуванням температурної деформації. Вони містять два незалежних параметри пружності, в якості яких зазвичай приймають модуль пружності E і коефіцієнт Пуассона μ.

Компоненти деформації однозначно описують деформацію елемента тіла. В деформованому стані всі елементи повинні утворювати єдине тіло. Якщо умови сумісності деформацій порушуються, то з окремих елементів неможливо створити тіло без розривів і пустот.

В тому випадку, коли рівняння сумісності задовольняються в кожній точці тіла, переміщення u<sub>x</sub>, u<sub>y</sub>, u<sub>z</sub> будуть безперервними функціями координат, що гарантує безперервне перетворення початкової форми тіла в кінцеву (деформовану).

Вирішення задачі про напружений і деформований стан зводиться до пошуку переміщень u<sub>x</sub>, u<sub>y</sub>, u<sub>z</sub> і останні вибираються серед класу безперервних функцій з безперервними частковими похідними до третього порядку, рівняння сумісності деформацій задовольняються тотожно.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \epsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}; \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; \epsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}; \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \epsilon_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

сукупність диференціальних рівнянь рівноваги (1), геометричних рівнянь (4) і фізичних співвідношень (3) утворюють систему з 15 рівнянь, в які входять 6

компонент напружень, 6 компонент деформації і 3 компоненти переміщення. Таким чином, отримується замкнута система рівнянь, що дозволяє описувати поведінку матеріалу в динаміці з урахуванням впливу температури.

Для вирішення задачі про напружений і деформований стан в систему рівнянь диференційної рівноваги тіла (1) підставляємо напруження з рівняння (3). В результаті отримуємо видозмінене рівняння Ляме для випадку руху з урахуванням впливу температури:

$$\left. \begin{aligned} G\nabla^2 u_x + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{E}{1-2\mu} \alpha T + R_x &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ G\nabla^2 u_y + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{E}{1-2\mu} \alpha T + R_y &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ G\nabla^2 u_z + (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{E}{1-2\mu} \alpha T + R_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \\ \theta &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

До цих рівнянь необхідно приєднати граничні умови. Якщо на поверхні тіла задані переміщення, то граничні умови зводяться до вимоги, що в точках поверхні шукані функції u<sub>x</sub>, u<sub>y</sub>, u<sub>z</sub> приймають задані значення (10).

В нашому випадку взаємодія матеріалу з інструментом має складний характер, що зумовлений складністю форми і динамікою процесу. В результаті такої взаємодії необхідно враховувати велику кількість факторів, що зробити аналітично дуже складно, а в деяких випадках і неможливо. Тому розглядаємо нашу модель як дискретну. Для цього використовуємо чисельну методику – метод кінцевих елементів. Метод кінцевих елементів є дуже зручним для реалізації на ЕОМ.

Найпростіші задачі механіки розв'язуються аналітичним шляхом, що є загальноприйнятим методом; це пов'язано з точністю даного методу. Недоліком аналітичного підходу у вирішенні простих задач є збільшення факторів при описанні аналітичної моделі, що ускладнює її і робить неможливим отримання аналітичної моделі. Найбільш розповсюдженим серед відомих чисельних методів є метод скінчених елементів завдяки легкій реалізації на ЕОМ, а також завдяки чіткій формалізації окремих етапів розв'язання задачі та матричній формі розрахунку.

Для зручності описання та вирішення отримані рівняння представляються в матричній формі (5), що являє собою основне рівняння динаміки, яке покладене в основу розробки програмного комплексу Impact.

$$[M] \cdot \{\ddot{x}\} + [C] \cdot \{\dot{x}\} + [K] \cdot \{x\} = \bar{F}(t) \quad (6)$$

де [M] – матриця мас;

[C] – матриця демпфування;

[K] – матриця жорсткості;

$\{\ddot{x}\}, \{\dot{x}\}, \{x\}$  – відповідно вектор прискорення, швидкості і переміщення;

$\vec{F}(t)$  - вектор правої частини (навантаження, що залежить від часу).

Дане рівняння реалізоване в програмному комплексі Ipract і є його основою. Ipract дозволяє вирішувати наступні задачі: контактні просторові задачі, задачі руйнування, задачі формування, частотний аналіз, задачі з великими переміщеннями, розрахунок динамічних моделей з пружних, непружних і твердих тіл.

Основним параметром, що характеризує будь-яке обладнання є корисна робота. В нашому випадку основною задачею обладнання є подрібнення відходів матеріалу до визначеної степені дисперсності. Тобто основні характеристики даного обладнання можуть бути визначені в залежності від кількості виконуваної роботи, тобто роботи подрібнення. Для оцінки роботи подрібнення найбільш зручно використовувати питому роботу подрібнення віднесено до одиниці об'єму, так як питома робота є комплексним показником процесу подрібнення і дозволяє досить зручно описувати процес руйнування.

Для стійкого процесу руйнування деякого об'єму матеріалу при впливі на нього механічних сил напишемо рівняння закону збереження енергії в диференціальній формі:

$$dA_{пр}^{пнт} - dU_{внк}^{пнт} = 0, \quad (7)$$

де:  $dA_{пр}^{пнт}$  – приріст роботи пружної деформації матеріалу віднесений до одиниці об'єму;

$dU_{внк}^{пнт}$  – питомий викид енергії пружної деформації при утворенні вільної поверхні в даному об'ємі матеріалу.

Враховуючи те, що величина енергії, яка викидається прямо пропорційна площі вільної поверхні, що утворюється при руйнуванні певного об'єму матеріалу [11], переписемо рівнянні (7) в наступному вигляді

$$dA_{пр}^{пнт} - \frac{udS}{V} = 0, \quad (8)$$

де  $dS$  – приріст площі поверхні руйнування в об'ємі  $V$  матеріалу;

$u$  – коефіцієнт пропорційності, що має фізичний зміст питомої енергії утворення одиниці поверхні руйнування і виступаючий константою даного матеріалу.

Питома робота пружної деформації для нелінійно-пружного тіла може бути виражена в диференціальній формі [12]

$$dA_{пр}^{пнт} = \sigma d\epsilon + \tau d\gamma, \quad (9)$$

де:  $\sigma$  – напруження розтягу – стиску;

$d\epsilon$  – приріст відносної деформації;

$\tau$  – напруження зсуву;

$d\gamma$  – приріст величини кутової деформації.

Робота, необхідна для руйнування певного об'єму матеріалу

$$A_p = A_{пнт} S_{вільн}^{пнт} \quad (10)$$

де:  $A_{пнт}$  – питома робота руйнування;

$S_{вільн}^{пнт}$  – питома площа вільної поверхні, що утворюється при руйнуванні.

Значення питомої площі вільної поверхні визначається, виходячи з прийнятих раніше припущень і є кількісним показником процесу подрібнення так як дозволяє визначити ступінь подрібнення матеріалу.

Площа вільної поверхні віднесена до одиниці об'єму,

$$S_{вільн}^{пнт} = \frac{S_{вільн}}{V}, \quad (11)$$

яка утворюється при взаємодії різачка з матеріалом визначається з умов, що елемент до подрібнення мав форму куба зі стороною  $a_0$ , а після подрібнення сукупність кубічних елементів зі сторонами  $a_k$

$$S_{вільн}^{пнт} = \frac{S_{вільн}}{V} = 6 \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_0} \right) \quad (12)$$

У випадку подрібнення матеріалу що має незначну товщину порівнянно з площею поверхні, тобто є листовим чи плівковим, визначивши загальну площу куска матеріалу, який руйнується, його периметр та товщину, а також необхідну дисперсність, можна визначити площу вільної поверхні одного куска, що звільняється при руйнуванні. Ця площа визначається наступним чином:

$$S_{в.пов.к.} = \left( \frac{S_k}{L_k^2} - \frac{P_k}{2} \right) \cdot t_k \quad (13)$$

де  $S_k$  - площа поверхні куска матеріалу, який подрібнюється;

$L_k$  - величина подрібнення, тобто дисперсність;

$P_k$  - загальний периметр подрібнюваного куска матеріалу;

$t_k$  - товщина матеріалу.

Об'єм одного куска, утвореного при руйнуванні:

$$V_k = S_k t_k \quad (14)$$

Обраховавши загальний об'єм матеріалу, що подрібнюється, площу та об'єм одного куска, а також вільну поверхню, яка звільняється при руйнуванні куска матеріалу з (13), (14) отримуємо загальну площу вільної поверхні, що утворюється при руйнуванні:

$$S_{в.пов} = \frac{V}{V_k} S_{в.пов.к.} = \frac{V}{S_k} \left( \frac{S_k}{L_k^2} - \frac{P_k}{2} \right) \quad (15)$$

Для моделювання процесу подрібнення за допомогою програмного комплексу Ipract достатньо розглянути процес взаємодії одного диска з матеріалом. При цьому враховуються усі конструктивні та кінематичні параметри взаємодії. Нижче представлено результати моделювання процесу подрібнення полімерних матеріалів в дискових роторних подрібнювачах за допомогою програмного комплексу Ipract, враховуючи представлену вище математичну модель:

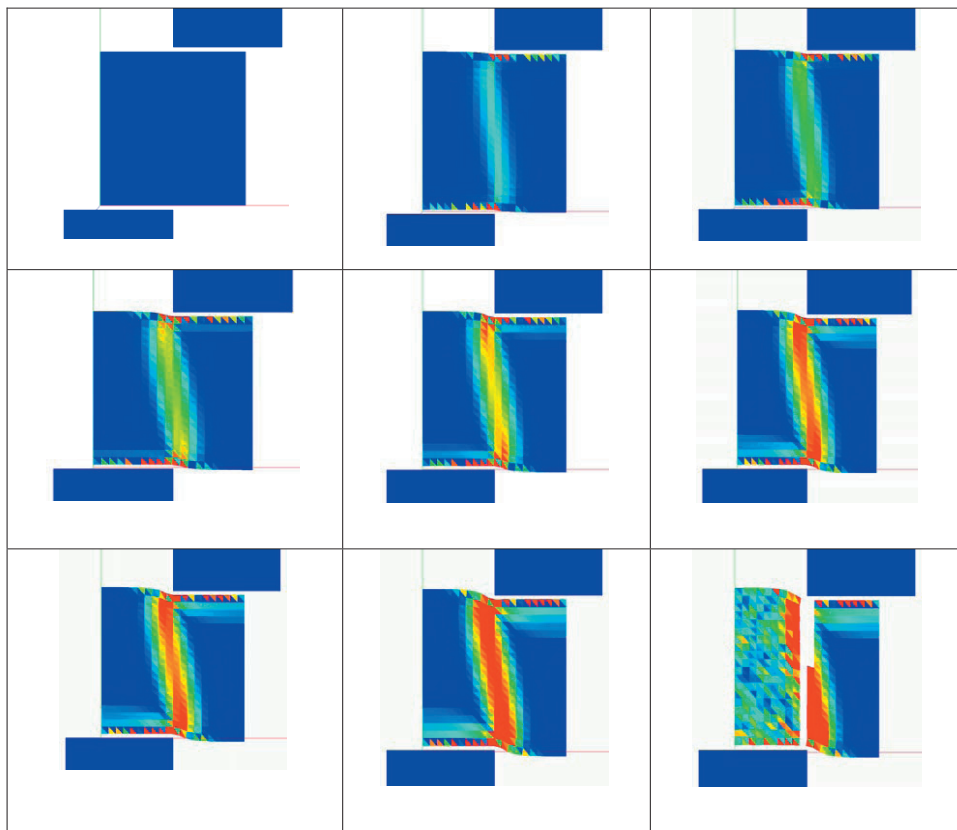


Рис. 1. Результати моделювання

### Висновки і перспективи подальшого розвитку даного напрямку

Розроблено модель та методику моделювання, яка дозволяє визначити питому роботу подрібнення в залежності від конструктивних та технологічних параметрів. При цьому враховуються матеріал робочого органу та його параметри, а також враховуються властивості матеріалу, що переробляється та ступінь його дисперсності.

При проектуванні, за допомогою представленої моделі, можна буде визначити всі існуючі параметри і фактори взаємодії робочого органу з матеріалом. В подальшому, представлена модель, може бути використана для загального проектування дискових роторних подрібнювачів.

### Література

1. Сиденко П.М. Измельчение в химической промышленности [Текст] / П.М. Сиденко. – М. : Химия, 1968. – 84 с.
2. Кауш Г.Н. Разрушение полимеров [Текст] / Г.Н. Кауш. – М.: Мир, 1981. - 440с.
3. Зуев Ю.С. Разрушение эластомеров в условиях, характерных для эксплуатации [Текст] / Ю.С. Зуев.— М.: Химия, 1980.— 288 с.
4. Огибалов П.М. Механика полимеров [Текст] / Огибалов П.М., В.А. Ломакин , В.А. Шишкин .— М.: Изд. МГУ, 1975. - 528с.
5. Лукомская А.И. Основы прогнозирования механического поведения резин и каучуков [Текст] / А.И. Лукомская, В.Ф. Евстратов. – М.: Химия, 1975. - 360с.
6. Бартнев Г.М. Прочность и механизм разрушения полимеров [Текст] / Г.М. Бартнев.— М.: Химия, 1984. - 290с.
7. Образцов И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов [Текст]: учеб. пособие для студентов авиац. спец. вузов / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х.С. Хазанов – М.: Высш. Шк., 1985. – 392 с.
8. Бартнев Г.М. Физика и механика полимеров [Текст]: Г.М. Бартнев, Ю.В. Зеленев. – М.: Высшая школа, 1983. – 391 с.
9. Аскадский А.А. Деформация полимеров [Текст] / А.А. Аскадский. – М. : Химия, 1973. – 448 с.
10. Виноградов Г.А., Малкин А.Я. Реология полимеров. - М.: Химия, 1974. - 44с.