Розглянуто новий клас складних стаціонарних випадкових процесів. Отримано вирази для оцінки математичного очікування, дисперсії, кореляційної функції. Показано переваги використання СВВП поряд зі звичайними методами статистичного аналізу

Ключові слова: складовий векторний випадковий процес, підвектор, кореляційна функція

Рассмотрен новый класс сложных стационарных случайных процессов. Получены выражения для оценки математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции. Показаны преимущества использования СВСП перед обычными методами статистического анализа

Ключевые слова: составной векторный случайный процесс, подвектор, корреляционная функция

The article considers a new class of complex stationary stochastic processes. Expressions are obtained to evaluate mean, variance, and correlation functions. The advantages of composite vector stochastic processes over conventional methods of statistical analysis are shown

Key words: composite vector stochastic process, sub-vector, correlation function

УДК 621.391:519.246.8

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОСТАВНЫХ ВЕКТОРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В.А. Тихонов
Доктор физико-математических наук, профессор*
Контактный тел.: (057) 702-15-87
E-mail: res@kture.kharkov.ua

Н.В. Кудрявцева
Аспирантка*
Контактный тел.: (057) 702-15-87
E-mail:kimberly86@list.ru

И.О. Филь*
Контактный тел.: 093-477-01-97
E-mail:res@kture.kharkov.ua
*Кафедра радиоэлектронных систем
Харьковский университет радиоэлектроники
пр. Ленина, 14, г. Харьков, 61166

1. Введение

Совокупность сигналов, характеризующаяся определенными общими свойствами, является элементами некоторого множества, которые представлены своими координатами, обладают рядом свойств и называются векторами [1].

Для описания сигналов в рамках корреляционной теории широко применяется гильбертово пространство [2]. Классический подход к построению гильбертовых пространств не позволяет в удобной форме строить модели некоторых классов сложных сигналов и процессов.

К таким классам относятся процессы, которые можно разбить на последовательность процессов меньшей длины, обладающих некоторыми общими свойствами.

Предложенный в работе метод анализа подобных сигналов позволяет извлекать информацию, которую нельзя получить обычными методами статистического анализа. Для анализа коррелированных случайных процессов широко используются модели линейного предсказания [3].

Целью работы является: определение класса рассматриваемых процессов, нахождение выражений для оценок статистических характеристик этих процессов, синтез авторегрессионной модели.

2. Статистики второго порядка составных векторных случайных процессов

Рассмотрим стационарный случайный процесс $X[t]$ в виде вектора $\vec{x}[t]$ в линейном пространстве, который определяется своими координатами $x[1], x[2], ..., x[N]$. Пусть такой случайный процесс можно представить в виде последовательности подвекторов $\vec{x}_i$, одинаковой длины n с однородными статистическими свойствами. Здесь введено понятие «подвектора» $\vec{x}_i$ вектора $\vec{x}^n[t]$, по аналогии с отсчетом $x[t]$ выборки $X[t]$. Назовем такой стационарный случайный процесс «составным векторным случайным процессом» (СВСП) $\vec{x}^n[t]$. Фиксированный верхний индекс n указывает на длину подвектора и не является переменной. СВСП является обобщением понятия случайного процесса, в котором его отсчет заменяется подвектором $\vec{x}_i$ длины n. При $n=1$ СВСП становится обычным стационарным процессом в виде вектора $\vec{x}[t]$.

Под коррелированным СВСП $\vec{x}^n[t]$, будем понимать процесс, в котором существуют статистические связи второго порядка между подвекторами $\vec{x}_i$. Представим процесс $\vec{x}^n[t]$ в виде их последовательности

$$\vec{x}^n[t] = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{N/n}\}.$$

Каждый подвектор определяется n координатами вектора $\vec{x}^n[t]$:

$$\vec{x}_1 = \{x[1], x[2], ..., x[n]\},\ \vec{x}_2 = \{x[n+1], x[n+2], ..., x[2n]\}, ...$$

$$..., \vec{x}_i = \{x[(i-1)n+1], ..., x[in]\}, ...,$$

$$\vec{x}_{N/n} = \{x[N-n+1], ..., x[N]\},$$

где i – номер подвектора, N – номер последнего отсчета последнего подвектора. Если количество отсчетов вектора некратно длине подвектора n, то в качестве N/n берется целая часть этого числа, т.е. $N/n \sim \lfloor N/n \rfloor$.

Средние значения СВСП $\vec{x}^n[t]$, состоящего из подвекторов длиной n, определяются выражением

$$\bar{\vec{x}}^n = \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N/n}\bar{\vec{x}}_i,\ \bar{\vec{x}}_i = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x[(i-1)n+v],$$

т.е. математическим ожиданием от средних значений подвекторов. Очевидно, что среднее значение СВСП совпадает со средним значением процесса $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x[t] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N/n}\sum_{v=1}^{n} x[(i-1)n+v] = \bar{\vec{x}}^n.$$

При N – некратном длине подвектора n справедливо соотношение $\bar{X} \approx \bar{\vec{x}}^n$.

Центрированная выборка вектора определяется следующим образом

$$\vec{x}^n_c[t] = \vec{x}^n[t] - \bar{\vec{x}}^n = \{\vec{x}_1 - \bar{\vec{x}}^n, \vec{x}_2 - \bar{\vec{x}}^n, ..., \vec{x}_{N/n} - \bar{\vec{x}}^n\}.$$

Далее, для упрощения выражений, полагаем, что СВСП $\vec{x}^n[t]$ представляет собой центрированный вектор с нулевым математическим ожиданием.

Для получения статистик второго порядка СВСП необходимо произведения координат вектора заменить на скалярное произведение подвекторов. Введем скалярное произведение для подвекторов СВСП

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_{i+k}) = \sum_{j=1}^{n}(x[(i-1)n+j]x[(i-1)n+j+kn]),$$

где k – сдвиг векторов, равный $1, 2, ..., \frac{N}{n}-1$. Применяя усреднение скалярного произведения, получим формулу оценки корреляционной функции СВСП

$$R^n[k] = \frac{1}{\frac{N}{n}-k}\sum_{i=1}^{\frac{N}{n}-k}\sum_{j=1}^{n}(x[(i-1)n+j]x[(i-1)n+j+kn]). \quad (1)$$

Отсюда видно, что корреляционная функция СВСП описывает статистическую связь первого порядка между подвекторами. Представим это выражение в виде

$$R^n[k] = \frac{1}{\frac{N}{n}-k}\sum_{i=1}^{\frac{N}{n}-k}(\vec{x}_i, \vec{x}_{i+k}) = R^n[i, i+k], \quad (2)$$

где i – номер подвектора СВСП. При $n=1$ из выражения (1) может быть получена известная формула оценки корреляционной функции для стационарного случайного процесса

$$R[k] = \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}(x[i]x[i+k]). \quad (3)$$

Следовательно, корреляционная функция СВСП является обобщением обычной функции корреляции.

Рассмотрим свойства корреляционной функции СВСП. Пусть i, l – номера подвекторов СВСП, причем $l = i+k$. Для стационарного процесса СВСП корреляционная функция удовлетворяет соотношению, следующему из (2)

$$R^n[i, l] = R^n[i, l+k] = R^n[l-k, l].$$

Так как корреляционная функция стационарного процесса не зависит от i и l, а только от сдвига k, имеем

$$R^n[k] = R^n[-k].$$

Следовательно, корреляционная функция СВСП является четной функцией.

Найдем выражение для дисперсии СВСП. При $k=0$ из (1) имеем

$$D^n_x = R^n[0] = \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{\frac{N}{n}}\sum_{j=1}^{n}(x[(i-1)n+j])^2. \quad (4)$$

Т.о., дисперсия СВСП равна среднему от квадратов подвекторов. При $n=1$, из (4) получаем известное выражение для оценки дисперсии случайного процесса

$$D^n_x = R^n[0] = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x^2[t] = D_X.$$

Для анализа СВСП можно использовать нормированные значения корреляционной функции

$$r^n[k] = \frac{R^n_x[k]}{R^n_x[0]}.$$

Из этого выражения следует, что $r^n[0] = 1$.

В случае корреляционных функций СВСП учитывается статистическая связь между подвекторами СВСП, что позволяет получать новую информацию о случайном процессе, как бы в большем «масштабе».

3. Модель авторегрессии составных векторных случайных процессов

Рассмотрим свойства СВСП на имитационных процессах с заданными статистическими характеристиками. Разностное уравнение АР СВСП имеет вид аналогичный [3]

$$\vec{x}_i = \sum_{s=1}^{p} \Phi^n[s]\vec{x}_{i-s} + \vec{a}_i\,, \qquad (5)$$

где $\Phi^n[s]$ – коэффициенты АР СВСП, p – порядок модели АР СВСП, $\vec{a}_i$ – векторы длиной n отсчетов белого шума. Условие оптимальности модели АР СВСП состоит в статистической независимости подвекторов $\vec{a}_i$. Для модели АР СВСП ошибки $\vec{a}_i$ должны быть некоррелированными, т.е. $E\{(\vec{a}_i,\vec{a}_{i-k})\}=0,$ при $k \neq 0$. Это условие эквивалентно минимуму дисперсии ошибки предсказания СВСП D_a^n. Для нахождения коэффициентов АР векторов процесса умножим (5) скалярно на $\vec{x}_{i-j}$ и усредним. После несложных преобразований получим уравнения типа Юла – Уокера для расчета параметров модели АР СВСП

$$R^n[j] = \sum_{i=1}^{p} \Phi^n[i]R^n[i-j]\ ,\ j = 1,2,...p\,.$$

При $j=0$ получим выражение, связывающее дисперсию подвекторов процесса и дисперсию подвекторов ошибки предсказания

$$R^n[0] = \sum_{i=1}^{p} \Phi^n[i]R^n[i] + D_a^n\,.$$

Выводы

В работе рассмотрен новый класс сложных стационарных случайных процессов, названный СВСП. Для СВСП, состоящего из непересекающихся смежных подвекторов, найдены выражения для оценки математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции. Предложены выражения для расчета параметров АР СВСП. Использование известных методов статистического анализа и модели СВСП дает возможность более тонко исследовать сложные процессы, представимые в виде совокупности подвекторов.

Работа может быть полезна для анализа сложных случайных процессов, исследования долгосрочных изменений процессов, в частности сезонных явлений.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Элементы теории функций и функционального анализа. [Текст] / Фомин С.В – М.: Наука, 1972. – 496 с.
2. Волощук Ю. І. Сигнали та процеси у радіотехніці: Навч. посібник, частина 1. – Харків, ХТУРЕ, 2001. – 550 с.
3. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.