

УДК 621.317.4

*Розглядаються теоретичні аспекти застосування методів просторового гармонічного аналізу щодо аналітичного представлення за допомогою циліндричних гармонік скалярного потенціалу поля, утвореного зарядами, які розташовані на циліндричній поверхні кінцевої довжини*

*Ключові слова: просторовий гармонічний аналіз, циліндрична гармоніка, потенціал*

*Рассматриваются теоретические аспекты применения методов пространственного гармонического анализа для аналитического представления с помощью цилиндрических гармоник скалярного потенциала поля, созданного зарядами, распределенными по поверхности цилиндра конечной длины*

*Ключевые слова: пространственный гармонический анализ, цилиндрическая гармоника, потенциал*

*The theoretical aspects of application of methods of a spatial harmonic analysis for analytical solution with the help of cylindrical harmonics of a scalar potential of a field created by charges, distributed on a surface of a finite-length cylinder, are considered*

*Key words: spatial harmonic analysis, cylindrical harmonic, potential*

# ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ЗАРЯЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

**А. В. Гетьман**

Кандидат технических наук\*

**А. В. Константинов**

Аспирант\*

\*Научно-технический центр магнетизма технических объектов НАН Украины  
ул. Индустриальная, 19, г. Харьков, Украина, 61109  
Контактный тел.: (0572) 99-11-75/Факс: 99-21-62  
E-mail:ntcmto@ukrpost.ua

## 1. Введение

Построение аналитических моделей магнитного поля различных технических объектов (ТО) остается актуальной задачей электротехники, несмотря на многообразие численных методов расчета магнитных характеристик ТО. Практический интерес к аналитическим моделям обусловлен необходимостью анализа ТО по целому набору его параметров. Нелинейность взаимосвязей между параметрами ТО существенно усложняет, а порой делает невозможным проведение комплексного анализа конструктивных, энергетических и магнитных параметров ТО, только на основе результатов численного расчета. Такое ограничение не свойственно аналитическим моделям ТО, однако практическое применение последних связано с усложненным математическим аппаратом.

На сегодняшний день одним из ограничений практического применения аналитических моделей магнитного поля ТО остается недостаточная проработка их математического аппарата в плане применения к сложной геометрии электротехнических изделий. Поскольку замена реальной геометрии объекта на упрощенное аналитическое представление негативно сказывается на точности результатов применения ме-

тода, то целесообразно использовать аналитическое представление. Поэтому адаптация существующих и разработка новых методов пространственного гармонического анализа (ПГА) магнитного поля призваны снять ограничения, накладываемые на форму граничной поверхности ТО. Поскольку для широкого класса ТО граничной поверхностью является поверхность цилиндра, то в этих случаях рационально использовать методы цилиндрического гармонического анализа магнитного поля.

Целью работы является построение аналитической модели на основе цилиндрических гармоник скалярного потенциала поля, создаваемого распределенным по поверхности цилиндра зарядом.

## 2. Поле двух параллельных заряженных абсолютно проводящих пластин

Найдем аналитическое выражение для потенциала двух круглых тонких противоположно заряженных пластин. Пусть  $R$  - радиус пластин,  $h$  - расстояние между ними,  $q$  и  $-q$  - заряды пластин. Введем цилиндрическую систему координат с центром, совпадающим с осью пластин, и расположенным посередине между ними (рис. 1).

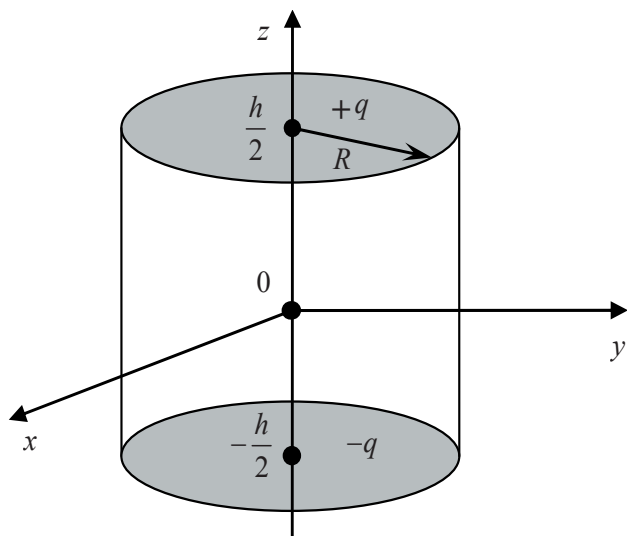


Рис. 1. Две параллельные заряженные круглые пластины

Распределение потенциала в области между пластинами подчиняется уравнению Лапласа [1]. Очевидно, что потенциал является нечетной функцией по  $z$ , и равен нулю в начале координат. Приходим к следующим решениям:

$$U(r, z) = \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) \text{sh}(\lambda z) d\lambda \quad (1)$$

Здесь  $J_0$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $\lambda$  – произвольный параметр,  $A(\lambda)$  – неизвестная функция.

Для решения задачи воспользуемся условием проводимости. На абсолютно проводящих пластинах заряд стремится распределиться таким образом, чтобы поверхность пластин была эквипотенциальной

$$\int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) \text{sh}\left(\lambda \frac{h}{2}\right) d\lambda = V, \quad 0 \leq r \leq R \quad (2)$$

где  $V$  – некоторая константа. Применяя тождество [2]:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kx}{x} J_0(\rho x) dx = 1, \quad (3)$$

найдем  $A(\lambda)$ :

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi} V \frac{\sin \lambda R}{\lambda \text{sh}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)}. \quad (4)$$

Получаем:

$$U(r, z) = \frac{2}{\pi} V \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda R) J_0(\lambda r) \text{sh}(\lambda z)}{\lambda \text{sh}\left(\lambda \frac{h}{2}\right)} d\lambda. \quad (5)$$

Для вычисления  $V$  воспользуемся тем, что вблизи поверхности проводника нормальная составляющая напряженности поля равна поверхностной плотности заряда в этой точке:

$$\sigma\left(r, \frac{h}{2}\right) = -\frac{\partial U\left(r, \frac{h}{2}\right)}{\partial z}. \quad (6)$$

Тогда как суммарный заряд пластины равен:

$$q = 2\pi \int_0^R r \cdot \sigma\left(r, \frac{h}{2}\right) dr. \quad (7)$$

Из выражений (5-7) находим  $V$ :

$$V = -\frac{q}{4R} \frac{1}{\int_0^\infty \sin(\lambda R) \lambda^{-1} \text{sh}^{-1}\left(\lambda \frac{h}{2}\right) J_1(\lambda R) \text{ch}\left(\lambda \frac{h}{2}\right) d\lambda}, \quad (8)$$

и, в итоге, получаем выражение для потенциала системы двух пластин:

$$U(r, z) = -\frac{q}{2\pi R} \frac{\int_0^\infty \sin(\lambda R) \lambda^{-1} \text{sh}^{-1}\left(\lambda \frac{h}{2}\right) J_0(\lambda r) \text{sh}(\lambda z) d\lambda}{\int_0^\infty \sin(\lambda R) \lambda^{-1} \text{sh}^{-1}\left(\lambda \frac{h}{2}\right) J_1(\lambda R) \text{ch}\left(\lambda \frac{h}{2}\right) d\lambda}. \quad (9)$$

Характер распределения потенциала в плоскости XOZ показан на рис. 2, расчет для которого был проведен на основании (9), который был проверен численным методом.

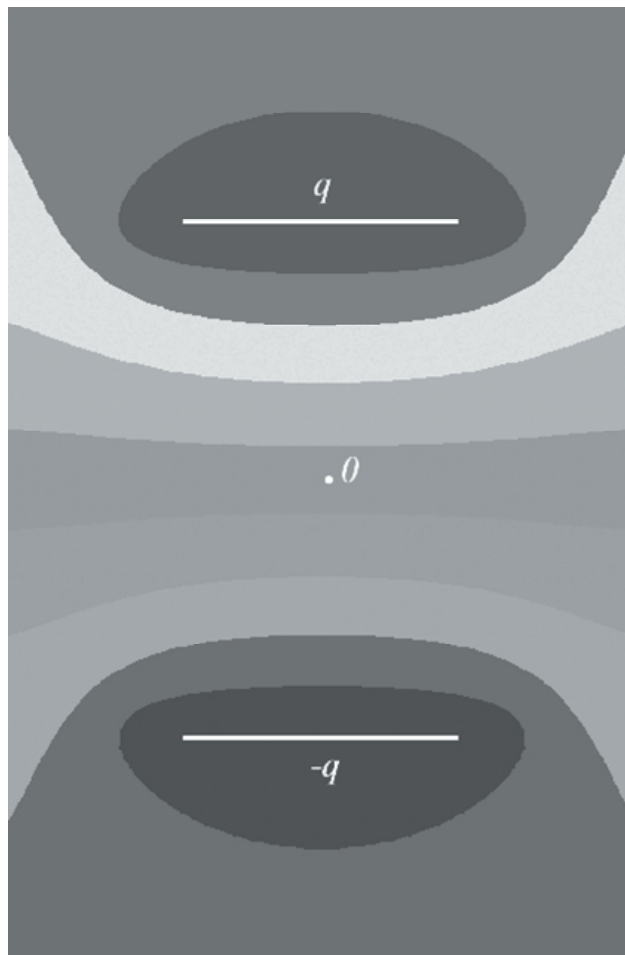


Рис. 2. Потенциал двух заряженных пластин

**3. Поле заряженной боковой цилиндрической поверхности**

Теперь вычислим потенциал, создаваемый заряженной цилиндрической поверхностью. Пусть  $R$  - радиус цилиндрической поверхности,  $h$  - ее высота. Введем цилиндрическую систему координат с центром, совпадающим с осью поверхности, и расположенным посередине ее высоты (рис. 3). Пусть, также, потенциал поля на боковой поверхности линейно зависит от  $z$  и равен  $\pm V$  при  $z = \pm h/2$ , где  $V$  - может быть взят из (8).

Распределение потенциала в области, ограниченной данной цилиндрической поверхностью, подчиняется уравнению Лапласа. Выражение для потенциала для этой области можно также представить в виде:

$$U(r,z) = \int_0^{\infty} B(\lambda) I_0(\lambda r) \sin(\lambda z) d\lambda \tag{10}$$

Для решения задачи воспользуемся описанными выше условиями.

$$\int_0^{\infty} B(\lambda) I_0(\lambda R) \sin(\lambda z) d\lambda = \frac{2V}{H} \cdot z, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \tag{11}$$

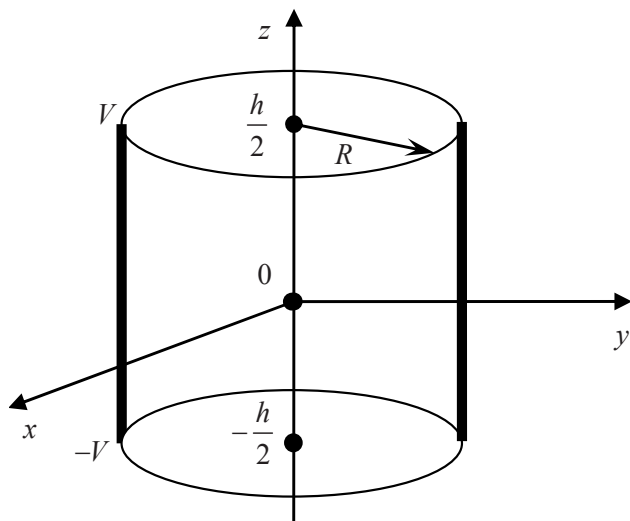


Рис. 3. Геометрия заряженной боковой цилиндрической поверхности

Для нахождения  $B(\lambda)$  воспользуемся выражением:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda R) \sin(\lambda z) d\lambda = \frac{z}{R}, \tag{12}$$

Тогда:

$$B(\lambda) = \frac{2R}{H} V \frac{J_1(\lambda R)}{\lambda I_0(\lambda R)} \tag{13}$$

Окончательно, для потенциала заряженной боковой поверхности получаем выражение:

$$U(r,z) = \frac{2R}{H} \cdot V \int_0^{\infty} \frac{J_1(\lambda R)}{\lambda I_0(\lambda R)} I_0(\lambda r) \sin(\lambda z) d\lambda \tag{14}$$

На рис. 4 показано распределение поля внутри заряженной боковой поверхности цилиндра рассчитанное на основании (14).

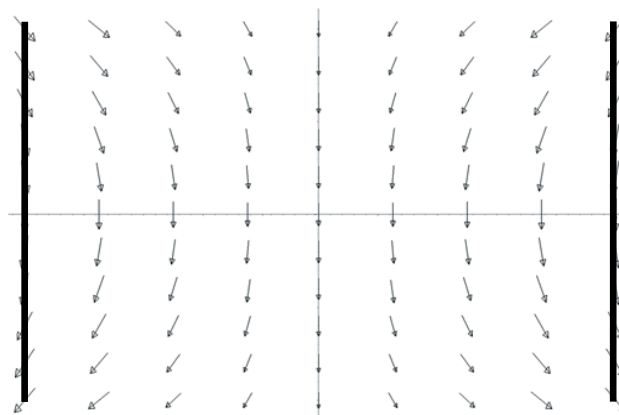


Рис. 4. Поле заряженной боковой цилиндрической поверхности

**4. Выводы**

Разработанные аналитические модели поля на основе цилиндрических гармоник скалярного потенциала могут быть использованы при построении модели намагниченности цилиндров конечной длины, в частности, для построения модели равномерно намагниченного вдоль оси симметрии цилиндра.

Литература

1. Smythe W. Static and Dynamic Electricity. -ISBN: 0891169172, Publisher: Hemisphere Publishing Corporation, 1989. – 623 p.
2. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. – 703 с.