

УДК 539.3

# РЕШЕНИЕ УТОЧНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ, ПРИМЕР ВНЕЗАПНО ПРИЛОЖЕННОГО НА ТОРЦЕ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

**А. Д. Шамровский**

Доктор технических наук, професор\*

Контактный тел.: (0612) 223-82-16

E-mail: adshamr@rambler.ru

**Л. Н. Егармина**

Аспирант, младший научный сотрудник\*

Контактный тел.: 068-449-13-31

E-mail: neverojatnonofakt@rambler.ru

\*Кафедра программного обеспечения

автоматизированных систем

Запорожская государственная инженерная академия

пр. Ленина, 226, г. Запорожье, 69006

*Розглядається процес розповсюдження нестационарних згинних хвиль у балці на основі уточнених рівнянь [1]; раптово прикладений момент, що згинає. На відміну від [2], швидкості розповсюдження фронтів повздовжніх та поперечних хвиль відповідають швидкостям теорії пружності*

*Ключові слова: асимптотико-груповий, квазіфронт, момент, хвиля що згинає*

*Рассматривается процесс распространения нестационарных изгибных волн в балке на основе уточненных уравнений [1]; внезапно приложен изгибающий момент. В отличие от [2], скорости распространения фронтов продольных и поперечных волн соответствуют скоростям теории упругости*

*Ключевые слова: асимптотико-групповой, квазифронт, момент, изгибная волна*

*The process of distribution of non-stationary waves in the bending beam is examined on the basis of the specified equalizations [1]; the moment of flexion is suddenly attached. Unlike to the [2], the speeds of the longitudinal and transversal waves fronts distribution coincide with speeds in the elasticity theory*

*Key words: asymptotic-group, quasifront, the moment, flexural wave*

## 1. Введение

Уравнения динамики стержней получаются обычно на основе каких-то предположений о характере распределения искомых величин – напряжений и деформаций по поперечному сечению стержня [3]. В случае свободных колебаний все величины считаются постоянными по сечению стержня. Ранее в работе [4] было показано, как известные динамические уравнения продольной деформации стержня получаются из трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа, не требующего использования каких-либо гипотез. Однако в динамических задачах существенную роль могут играть некоторые факторы, которые не учитываются классическими уравнениями, например, поперечные колебания стержня, возникающие при движении продольной волны. В [1] аналогично производится поиск уточненных одномерных динамических уравнений изгиба стержня на основе трехмерных уравнений теории упругости. Таким образом, получаются асимптотически обоснованные уточненные уравнения, позволяющие учитывать как известные в изгибе балки эффекты, так и некоторые новые. В данной работе показано решение этих уравнений, а также проанализирован процесс распространения нестационарных волн по стержню прямоугольного сечения при его изгибе на основе полученных решений.

## 2. Решение найденных уточненных динамических уравнений изгиба балки прямоугольного поперечного сечения для случая внезапно приложенного изгибающего момента

В работе [1] изложена процедура получения уточненных динамических уравнений изгиба балки на основе трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа. При этом реализовано, так называемое, неминимальное упрощение трехмерных уравнений, приводящее к одномерным уравнениям.

Перепишем полученные в [1] уравнения в однородном случае, отвечающем отсутствию нагрузок на боковых поверхностях балки:

$$\partial_x^2 \phi + c \partial_x W + c \partial_x V - 8a_s^2 (\partial_x w + \phi) - \partial_t^2 \phi = 0;$$

$$a_s^2 \partial_x^2 w + (a_s^2 + c) \partial_x \phi + W + cV - \partial_t^2 w = 0;$$

$$8a_s^2 \partial_x^2 w + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \phi + 24(W + cV) + \partial_t^2 W = 0;$$

$$8(V + c \partial_x \phi + cW) + \epsilon \partial_t^2 V = 0; \quad Q = \partial_x w + \phi;$$

$$M = \partial_x \phi + cW + cV; \quad N = W + c \partial_x \phi + cV; \quad K = V + c \partial_x \phi + cW$$

Выполним преобразования:

$$\partial_x = \delta^{\alpha_1} \partial_x^*, \partial_t = \delta^{\alpha_2} \partial_t^*, \phi = \delta^{\alpha_3} \phi^*, w = \delta^{\alpha_4} w^*, W = \delta^{\alpha_5} W^*,$$

$$V = \delta^{\alpha_6} V^*, Q = \delta^{\alpha_7} Q^*, M = \delta^{\alpha_8} M^*, N = \delta^{\alpha_9} N^*, K = K^*,$$

приводящие к соотношениям:

$$\partial_x^* \sim 1, \partial_t^* \sim 1, \phi^* \sim w^* \sim W^* \sim V^* \sim Q^* \sim M^* \sim N^* \sim K^*$$

Соответствующая таблица показателей степени будет:

$$2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3; \quad (1)$$

$$2\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, 2\alpha_2 + \alpha_4;$$

$$2\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, 2\alpha_2 + \alpha_5;$$

$$\alpha_6, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5, 2\alpha_2 + \alpha_6; \quad \alpha_7, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_3;$$

$$\alpha_8, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6; \quad \alpha_9, \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_6; \quad 0, \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_5$$

Рассмотрим следующие значения параметров:

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2,$$

$$\alpha_5 = 2, \alpha_6 = 2, \alpha_7 = 1, \alpha_8 = 0, \alpha_9 = 0$$

**Таблица (1):**

$$-1, 1, 1, 1, 1, -1$$

$$0, 0, 2, 2, 0$$

$$0, 0, 2, 2, 0$$

$$2, 0, 2, 0$$

$$1, 1, 1; \quad 0, 0, 2, 2$$

$$0, 2, 0, 2; \quad 0, 2, 0, 2$$

Упрощенные уравнения:

$$\partial_x^2 \phi - \partial_t^2 \phi = 0; \quad (2)$$

$$a_s^2 \partial_x^2 w + (a_s^2 + c) \partial_x \phi - \partial_t^2 w = 0;$$

$$8a_s^2 \partial_x^2 w + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \phi + \partial_t^2 W = 0;$$

$$8c \partial_x \phi + \epsilon \partial_t^2 V = 0;$$

$$Q = \partial_x w + \phi; \quad M = \partial_x \phi;$$

$$N = c \partial_x \phi; \quad K = c \partial_x \phi$$

Перейдем к более подробному изучению полученного варианта упрощения. Он отвечает быстрым изменениям по  $x$  и по  $t$ , что отвечает отрицательным значениям параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и, соответственно, большим значениям дифференциальных операторов  $\partial_x$  и  $\partial_t$ . В этих условиях результаты, получаемые в первом приближении, нуждаются в уточнениях, достигаемых путем построения процедур последовательных приближений.

Представим искомые функции в виде рядов:

$$\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i; w = \sum_{i=1}^{\infty} w_i; W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i; V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i; \quad (3)$$

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i; M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i; N = \sum_{i=1}^{\infty} N_i; K = \sum_{i=1}^{\infty} K_i$$

Упрощенные уравнения (2) порождают бесконечную рекуррентную систему уравнений:

$$\partial_x^2 \phi_i + c \partial_x W_{i-1} + c \partial_x V_{i-1} - 8a_s^2 (\partial_x w_{i-1} + \phi_{i-1}) - \partial_t^2 \phi_i = 0; \quad (4)$$

$$a_s^2 \partial_x^2 w_i + (a_s^2 + c) \partial_x \phi_i + W_{i-1} + c V_{i-1} - \partial_t^2 w_i = 0;$$

$$8a_s^2 \partial_x^2 w_i + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \phi_i + 24(W_{i-1} + c V_{i-1}) + \partial_t^2 W_i = 0;$$

$$8(V_{i-1} + c \partial_x \phi_i + c W_{i-1}) + \epsilon \partial_t^2 V_i = 0;$$

$$Q_i = \partial_x w_i + \phi_i; \quad M_i = \partial_x \phi_i + c(W_{i-1} + V_{i-1});$$

$$N_i = W_{i-1} + c(\partial_x \phi_i + V_{i-1}); K_i = V_{i-1} + c(\partial_x \phi_i + W_{i-1}),$$

$$(i = 1, 2, \dots)$$

Решение этих уравнений разыскиваем в виде:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^i \phi_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=2}^i \phi_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1} \quad (5)$$

$$w_i = \sum_{j=1}^i w_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j} + \sum_{j=1}^i w_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j}$$

$$W_i = \sum_{j=1}^i W_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j} + \sum_{j=1}^i W_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j}$$

$$V_i = \sum_{j=1}^i V_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j} + \sum_{j=2}^i V_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j}$$

$$M_i = \sum_{j=1}^i M_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-2} + \sum_{j=2}^i M_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-2}$$

$$K_i = \sum_{j=1}^i K_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-2} + \sum_{j=2}^i K_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-2}$$

$$N_i = \sum_{j=1}^i N_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-2} + \sum_{j=2}^i N_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-2}$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^i Q_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i Q_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1}$$

Выражения вида  $t-x$  определены при  $x \leq t$  и равны нулю при  $x > t$ ; выражения вида  $a_s t-x$  определены при  $x \leq a_s t$  и равны нулю при  $x > a_s t$ . Коэффициенты сумм (4) определены при значениях  $j$ , заданных в записях соответствующих сумм. Если индекс выходит за указанные пределы, то коэффициенты считаются равными нулю.

После подстановки решений (5) в рекуррентные уравнения (4), а также применения к получившемуся результату некоторых несложных математических преобразований будем иметь:

$$\phi_{i,j-1}^1 = \frac{1}{2(i-j+1)(\gamma+i+j-2)} \left\{ (i-j+2)(i-j+1) \phi_{i,j-2}^1 + \right. \\ \left. + c \left[ (i-j+1) W_{i-1,j-2}^1 - (\gamma+i+j-2) W_{i-1,j-1}^1 + \right. \right. \\ \left. \left. + (i-j+1) V_{i-1,j-2}^1 - (\gamma+i+j-2) V_{i-1,j-1}^1 \right] - \right. \quad (6)$$

$$8a_s^2 \left[ (i-j+1) w_{i-1,j-2}^1 - (\gamma+i+j-2) w_{i-1,j-1}^1 + \phi_{i-1,j-1}^1 \right],$$

$$(i = 2, 3, \dots; j = 2, \dots, i);$$

$$\phi_{ij}^2 = \frac{1}{(a_s^2 - 1)(\gamma + i + j - 1)(\gamma + i + j - 2)} \{ (i - j + 2)(i - j + 1)\phi_{i,j-2}^2 - 2(i - j + 1)(\gamma + i + j - 2)\phi_{i,j-1}^2 + c[(i - j + 1)(W_{i-1,j-2}^2 + V_{i-1,j-2}^2) - (\gamma + i + j - 2)(W_{i-1,j-1}^2 + V_{i-1,j-1}^2)] - 8a_s^2[(i - j + 1)w_{i-1,j-2}^2 - (\gamma + i + j - 2)w_{i-1,j-1}^2 + \phi_{i-1,j-1}^2] \}, \quad (i = 2, 3, \dots; j = 2, \dots, i);$$

$$w_{ij}^1 = \frac{1}{(1 - a_s^2)(\gamma + i + j)(\gamma + i + j - 1)} \{ a_s^2(i - j + 2)(i - j + 1)w_{i,j-2}^1 - 2a_s^2(i - j + 1)(\gamma + i + j - 1)w_{i,j-1}^1 + (a_s^2 + c)[(i - j + 1)\phi_{i,j-1}^1 - (\gamma + i + j - 1)\phi_{ij}^1] + W_{i-1,j-1}^1 + cV_{i-1,j-1}^1 \}, \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, i);$$

$$w_{i,j-1}^2 = \frac{1}{2a_s^2(i - j + 1)(\gamma + i + j - 1)} \{ a_s^2(i - j + 2)(i - j + 1)w_{i,j-2}^2 + (a_s^2 + c)[(i - j + 1)\phi_{i,j-1}^2 - (\gamma + i + j - 1)\phi_{ij}^2] + W_{i-1,j-1}^2 + cV_{i-1,j-1}^2 \}, \quad (i = 2, 3, \dots; j = 2, \dots, i);$$

$$W_{ij}^1 = -\frac{1}{(\gamma + i + j)(\gamma + i + j - 1)} \{ 8a_s^2[(i - j + 2)(i - j + 1)w_{i,j-2}^1 - 2(i - j + 1)(\gamma + i + j - 1)w_{i,j-1}^1 + (\gamma + i + j)(\gamma + i + j - 1)w_{ij}^1] + (8a_s^2 + 24c)[(i - j + 1)\phi_{i,j-1}^1 - (\gamma + i + j - 1)\phi_{ij}^1] + 24(W_{i-1,j-1}^1 + cV_{i-1,j-1}^1) \}, \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, i);$$

$$W_{ij}^2 = -\frac{1}{a_s^2(\gamma + i + j)(\gamma + i + j - 1)} \{ 8a_s^2[(i - j + 2)(i - j + 1)w_{i,j-2}^2 - 2(i - j + 1)(\gamma + i + j - 1)w_{i,j-1}^2 + (\gamma + i + j)(\gamma + i + j - 1)w_{ij}^2] + (8a_s^2 + 24c)[(i - j + 1)\phi_{i,j-1}^2 - (\gamma + i + j - 1)\phi_{ij}^2] + 24(W_{i-1,j-1}^2 + cV_{i-1,j-1}^2) \}, \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, i);$$

$$V_{ij}^1 = -\frac{8}{\varepsilon(\gamma + i + j)(\gamma + i + j - 1)} \{ V_{i-1,j-1}^1 + c[(i - j + 1)\phi_{i,j-1}^1 - (\gamma + i + j - 1)\phi_{ij}^1] + cW_{i-1,j-1}^1 \}, \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, i);$$

$$V_{ij}^2 = -\frac{8}{\varepsilon a_s^2(\gamma + i + j)(\gamma + i + j - 1)} \{ V_{i-1,j-1}^2 + c[(i - j + 1)\phi_{i,j-1}^2 - (\gamma + i + j - 1)\phi_{ij}^2] + cW_{i-1,j-1}^2 \}, \quad (i = 2, 3, \dots; j = 2, \dots, i);$$

$$Q_{ij}^1 = (i - j + 1)w_{i,j-1}^1 - (\gamma + i + j)w_{ij}^1 + \phi_{ij}^1, \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, i);$$

$$Q_{ij}^2 = (i - j + 1)w_{i,j-1}^2 - (\gamma + i + j)w_{ij}^2 + \phi_{ij}^2, \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, i);$$

$$M_{ij}^1 = (i - j + 1)\phi_{i,j-1}^1 - (\gamma + i + j - 1)\phi_{ij}^1 + c(W_{i-1,j-1}^1 + V_{i-1,j-1}^1), \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, i);$$

$$M_{ij}^2 = (i - j + 1)\phi_{i,j-1}^2 - (\gamma + i + j - 1)\phi_{ij}^2 + c(W_{i-1,j-1}^2 + V_{i-1,j-1}^2), \quad (i = 2, 3, \dots; j = 2, \dots, i);$$

$$N_{ij}^1 = W_{i-1,j-1}^1 + c[(i - j + 1)\phi_{i,j-1}^1 - (\gamma + i + j - 1)\phi_{ij}^1 + V_{i-1,j-1}^1], \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, i);$$

$$N_{ij}^2 = W_{i-1,j-1}^2 + c[(i - j + 1)\phi_{i,j-1}^2 - (\gamma + i + j - 1)\phi_{ij}^2 + V_{i-1,j-1}^2], \quad (i = 2, 3, \dots; j = 2, \dots, i);$$

$$K_{ij}^1 = V_{i-1,j-1}^1 + c[(i - j + 1)\phi_{i,j-1}^1 - (\gamma + i + j - 1)\phi_{ij}^1 + W_{i-1,j-1}^1], \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, i);$$

$$K_{ij}^2 = V_{i-1,j-1}^2 + c[(i - j + 1)\phi_{i,j-1}^2 - (\gamma + i + j - 1)\phi_{ij}^2 + W_{i-1,j-1}^2], \quad (i = 2, 3, \dots; j = 2, \dots, i)$$

Рекуррентные соотношения (6) не позволяют находить коэффициенты вида  $\phi_{ii}^1$  и  $w_{ii}^2$ . Эти коэффициенты находятся при помощи граничных условий. При задании этих условий учтем, что решение вида (5) описывает распространение упругой волны в положительном направлении из точки  $x = 0$ , т.е. от торца полубесконечной балки  $x \geq 0$ . Основной нагрузкой здесь является изгибающий момент, заданный при  $x = 0$ . В соответствии с (3) и (6) имеем:

$$M(0, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (M_{ii}^1 + M_{ii}^2 a_s^{\gamma+2(i-1)}) t^{\gamma+2(i-1)} \quad (7)$$

Отсюда, с учетом (6), будет:

$$\phi_{ii}^1 = \frac{1}{\gamma + 2i - 1} \{ \phi_{i,i-1}^1 + c(W_{i-1,i-1}^1 + V_{i-1,i-1}^1) - f_i + a_s^{\gamma+2(i-1)} [\phi_{i,i-1}^2 - (\gamma + 2i - 1)\phi_{ii}^2 + c(W_{i-1,i-1}^2 + V_{i-1,i-1}^2)] \}, \quad (8)$$

$(i = 1, 2, \dots)$

В случае внезапно приложенного в момент времени  $t = 0$  и остающегося в дальнейшем постоянным момента  $M(0, t) = 1$  задаем:

$$\gamma = 0, \quad f_i = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases}$$

Кроме того, на конце балки может быть задан прогиб (шарнирная опора) либо перерезывающая сила (свободный торец). В первом случае, в соответствии с (3) и (6), имеем:

$$w(0, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (w_{ii}^1 + w_{ii}^2 a_s^{\gamma+2i}) t^{\gamma+2i} = 0 \quad (9)$$

Отсюда получаем:

$$w_{ii}^2 = -\frac{w_{ii}^1}{a_s^{\gamma+2i}} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

Во втором случае будет:

$$Q(0, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (Q_{ii}^1 + Q_{ii}^2 a_s^{\gamma+2i-1}) t^{\gamma+2i-1} = 0 \quad (11)$$

Отсюда, с учетом (6), получаем:

$$w_{ii}^2 = \frac{1}{\gamma + 2i} \left[ \frac{w_{i,i-1}^1 - (\gamma + 2i)w_{ii}^1 + \phi_{ii}^1}{a_s^{\gamma+2i-1}} + w_{i-1,i-1}^2 + \phi_{ii}^2 \right], \quad (12)$$

$(i = 1, 2, \dots)$

Таким образом, задавая (7), (9) или (11) мы имеем возможность находить все коэффициенты сумм (5) по решениям (6), (8) и (10) или (12), т.е. доводить решение до конца.

Остановимся коротко на вопросе о сходимости построенных рядов. Эти ряды носят название так называемой прифронтной асимптотики. Это означает, что они в первую очередь предназначены для описа-

ния зоны вблизи фронта волны. В каждый член ряда входит величина  $t-x$  и  $a_s t-x$ . При малых значениях этих величин общий член ряда стремится к нулю. Т.е. выполняется необходимое условие сходимости. Ранее было показано [5, 6], что удержание только слагаемых, преобладающих вблизи фронта, приводит к рядам для функции Бесселя, для которых сходимосť доказана.

нящегося роста продольного усилия. С удалением от фронта, картина переходит в классическую. Таким образом классическое решение для продольной волны в стержне – это медленноизменяющаяся асимптотика по отношению к более точному решению.

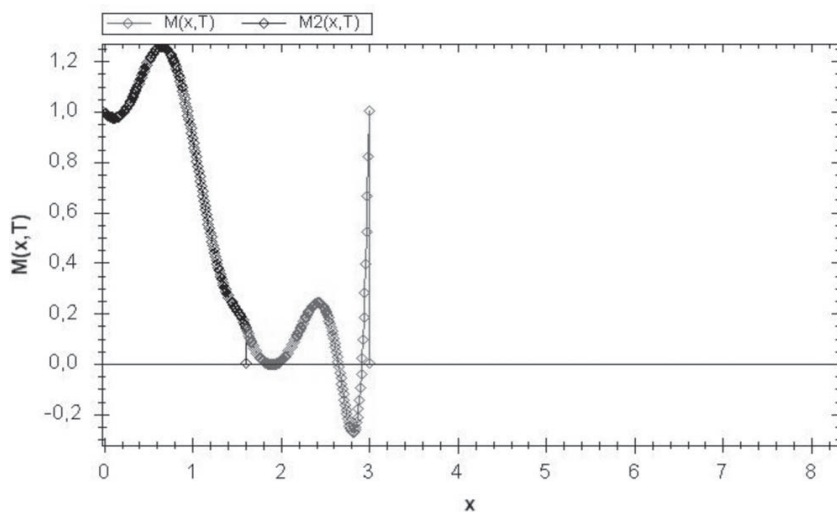


Рис. 1. Распространение волны  $M(x, \tau)$  в стержне квадратного сечения  $\tau = 3$

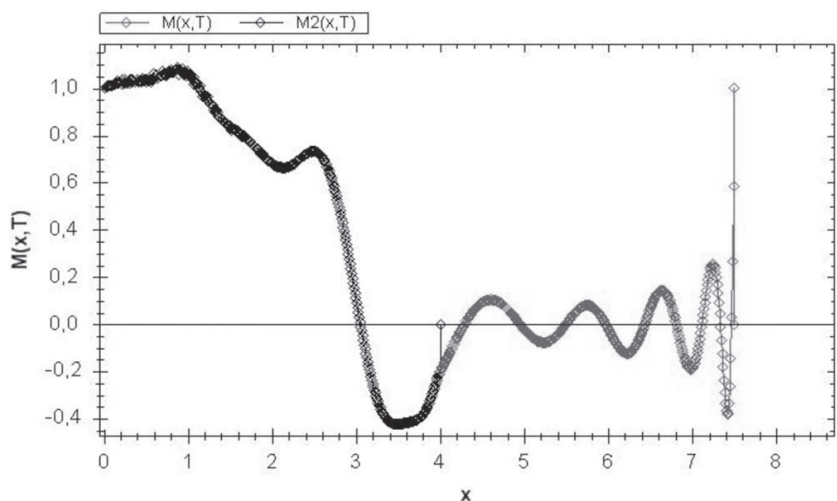


Рис. 2. Распространение волны  $M(x, \tau)$  в стержне квадратного сечения  $\tau = 7,5$

На рис. 1,2 приведены соответствующие графические результаты. Изображены графики изгибающего момента, как функции  $x$  для моментов времени  $\tau = 3$  и  $\tau = 7,5$ . Мы видим, что в отличие от картины, получаемой при помощи известных уравнений изгиба стержня, картина вблизи фронта распространяющейся волны выглядит значительно сложнее. Вблизи трехмерного фронта волны наблюдаются интенсивные поперечные колебания стержня, которые приводят к быстроизменяющемуся напряженно-деформированному состоянию. В дальнейшем происходит переход к классическому решению в виде так называемого квазифронта, то есть не ступенчатого, а быстроизме-

### 3. Выводы

Исследование распространения нестационарного волнового возмущения в балке при воздействии внезапно приложенного изгибающего момента на основе предлагаемых уточненных уравнений показало, что картина возмущения хорошо соответствует трехмерным уравнениям теории упругости. В частности, возмущение имеет два фронта – продольных и поперечных волн, причем скорости этих фронтов совпадают со скоростями таких же фронтов в теории упругости.

### Литература

1. Шамровский А.Д., Егармина Л.Н. Уточненные динамические уравнения изгиба балки с учетом трехмерной картины напряженно-деформированного состояния в поперечном сечении балки // Сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании '2010». Том 5. Технические науки. – Одесса: Черноморье, 2010. – 28-37с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко – М., «Наука», 1967. 444 с.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков – М., «Наука», 1968. 559 с.
4. Егармина Л.Н. Вывод динамических уравнений продольной деформации стержня при помощи двойного упрощения уравнений теории упругости / А.Д. Шамровский, Л.Н. Егармина // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2009. – №2. – С. 111 – 115.
5. Скрышник И.А. Двумерное моделирование трехмерных продольных волн в плоском слое. / И.А. Скрышник, А.Д. Шамровский // Математическое моделирование физико-математических полей и интенсификация промышленного производства – Запорожье, 1995. – С. 43–50.
6. Шамровский А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости / А.Д. Шамровский – Запорожье, Издательство ЗГИА, 1997 – 169 с.