

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

А.Д. Шамровский

Доктор технических наук, профессор
 Контактный тел.: (061) 275-35-73, 066-733-98-05
 E-mail: merkatan@ukr.net

Г.В. Меркотан

Аспирант*
 Кафедра программного обеспечения
 автоматизированных систем
 Запорожская государственная инженерная академия
 пр. Ленина, 226, г. Запорожье, Украина, 69000
 Контактный тел.: (061) 275-35-73, 066-733-98-05
 E-mail: merkatan@ukr.net

В представленній роботі розглядається розв'язання узагальненої зв'язаної динамічної задачі термопружності для півпростору. Розв'язання рівнянь виконане за допомогою теорії інваріантно-групових властивостей диференціальних рівнянь

Ключові слова: взаємозв'язана термопружність, асимптотико-груповий аналіз

In the presented work the decision of the generalized interrelated dynamic task of thermoelasticity is examined for half-space. The decision of equalizations is executed with the theory of invariant-group properties of differential equalizations

Keywords: interrelated thermoelasticity, method of the asymptotic-group analysis

Явление термоупругости играет большую роль во многих задачах науки и техники, связанных с изучением процессов деформации и нагрева различных тел.

Уравнения термоупругости описывают распределение температуры в теле и его деформации, вызванные неоднородностью температурного поля и приложенными к телу силами.

Для численного решения стационарных задач теории упругости давно и успешно применяют метод конечных элементов [6]. В [9,5,4] при решении задач используют метод конечных разностей. В ряде работ (например, [1, 8]), рассматриваются разностные методы для решения динамических задач теории упругости.

Представленная работа посвящена решению динамической связанной задачи термоупругости с учетом конечности скорости распространения тепла в одномерном случае. Подобная задача рассматривается в [7] и решается с помощью метода интегральных преобразований, но имеет ряд сложностей при переходе от изображения к оригиналу. Для решения поставленной задачи применен метод асимптотико-групового анализа [10], предложенный Шамровским А.Д. С помощью данного метода удалось сделать качественный анализ движения плоской механической и тепловой волны. Метод асимптотико-групового анализа обладает достаточной эффективностью, решение разыскивается как инвариантно-груповое и доводится до наглядного графического результата.

Задача распространения механических и тепловых волн в изотропном однородном полупространстве описывается системой уравнений:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial T}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{c_q^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} + \eta \tau_r \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial t^2}$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} - \beta T \quad \sigma_{yy} = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} - \beta T$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} - \beta T$$

Учтем, что $\beta = \alpha_T (3\lambda + 2\mu)$, $\eta = \frac{T_0 \alpha_T (3\lambda + 2\mu)}{\lambda_T}$, $a = \frac{\lambda_T}{c_v}$

– коэффициент температуропроводности, $c_q = \sqrt{\frac{a}{\tau_r}}$ – скорость распространения тепла, $T = \theta - T_0$ – приращение температуры точек тела, θ – абсолютная температура, t – время, u – перемещение, τ_r – время релаксации теплового потока, λ_T – коэффициент теплопроводности изотропного тела.

Перейдем к безразмерным величинам.

$$\bar{x} = \frac{c_1 x}{a}, \quad \bar{t} = \frac{c_1^2 t}{a}, \quad \bar{T} = 2\alpha_T T, \quad U = \frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{c_1}{a} u, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{3\lambda + 2\mu}$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha_t^2(3\lambda + 2\mu)^2 T_0}{(\lambda + 2\mu)c_v} - \text{коэффициент связности, при } \delta = 0 \text{ задача несвязанная;}$$

$$M = \frac{c_1}{c_q}$$

где c_1 – скорость звука в термоупругой среде (продольные волны), c_q – скорость тепловой волны. При $c_q \rightarrow \infty$ ($M=0$) имеем классическую модель задачи термоупругости.

Опустим черточки над переменными и перепишем уравнения в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{M^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - T \quad \sigma_{yy} = (1 - 2a_s^2) \frac{\partial u}{\partial x} - T \quad \sigma_{zz} = (1 - 2a_s^2) \frac{\partial u}{\partial x} - T$$

Уравнения (2) описывают распространение связанных одномерных термоупругих волн. Рассмотрим эти уравнения подробнее. Возьмем от первого уравнения производную по x и введем обозначения:

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad e_x = \partial_x u \quad (3)$$

В итоге первые два из уравнений (2) примут вид:

$$\partial_x^2 e_x - \partial_x^2 T = \partial_t^2 e_x \quad (4)$$

$$-\varepsilon \partial_t^2 e_x + M^2 \partial_x^2 T = \partial_t^2 T + M^2 (\varepsilon \partial_t e_x + \partial_t T)$$

Выполняя некоторые преобразования, получим:

$$\partial_x^2 (e_x - T) = \partial_t^2 e_x \quad (5)$$

$$\partial_x^2 [-\varepsilon e_x + (\varepsilon + M^2)T] = \partial_t^2 T$$

Введем в рассмотрение следующие матрицу и вектор:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\varepsilon & \varepsilon + M^2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} e_x \\ T \end{pmatrix} \quad (6)$$

Тогда уравнения (5) можно записать в матричной форме:

$$\partial_x^2 AX = \partial_t^2 X \quad (7)$$

Найдем собственные числа матрицы A .

$$a_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon + M^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \varepsilon + M^2)^2 - 4M^2}$$

Введем в рассмотрение вектор:

$$Y = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

связанный с вектором X соотношением:

$$X = UY, \quad (8)$$

где U – матрица собственных векторов.

В развернутом виде имеем:

$$\begin{pmatrix} e_x \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \Rightarrow e_x = f + g, \quad T = \alpha_1 f + \alpha_2 g$$

где $\alpha_i = 1 - a_i^2$ ($i=1,2$)

Подставим (8) в (7), получая:

$$\partial_x^2 AU Y = \partial_t^2 U Y$$

Умножая полученное соотношение слева на матрицу U^{-1} имеем:

$$U^{-1} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_2 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_x^2 \Lambda Y = \partial_t^2 Y, \quad \Lambda = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

В развернутом виде полученное соотношение примет вид:

$$a_1^2 \partial_x^2 f - \partial_t^2 f = 0, \quad a_2^2 \partial_x^2 g - \partial_t^2 g = 0$$

Таким образом, переходя от величин e_x и T к величинам f и g , мы получили систему двух независимых волновых уравнений, описывающих распространение фронтов волн со скоростями a_1 и a_2 .

Вернемся теперь к полной системе уравнений (5). Вводя в рассмотрение матрицу:

$$B = M^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

и используя вновь (6) запишем (4) в матричной форме:

$$\partial_x^2 AX = \partial_t^2 X + \partial_t BX$$

Подставляя сюда (8) получаем:

$$\partial_x^2 AU Y = \partial_t^2 U Y + \partial_t B U Y \quad (9)$$

Умножая соотношение (9) слева на матрицу U^{-1} , имеем:

$$\partial_x^2 \Lambda Y = \partial_t^2 Y + \partial_t D Y \quad (10)$$

Здесь:

$$D = U^{-1}BU = \frac{M^2}{\alpha_2 - \alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_2 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & -\beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \frac{M^2(\varepsilon + \alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{M^2(\varepsilon + \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

В развернутой форме соотношение (10) примет вид:

$$a_1^2 \partial_x^2 f - \partial_t^2 f = -\beta_1 \partial_t f - \beta_2 \partial_t g \quad (11)$$

$$a_2^2 \partial_x^2 g - \partial_t^2 g = \beta_1 \partial_t f + \beta_2 \partial_t g$$

Принципиальным отличием данных уравнений по сравнению с уравнениями (4) и (5) является выделение волновых операторов с известными скоростями распространения фронтов волн.

Используя (2) добавим к (11) соотношение упругости:

$$\sigma_{xx} = e_x - T = a_1^2 f + a_2^2 g$$

При необходимости нахождения перемещения u , будем использовать (5).

Разыскиваем решение уравнений полученных уравнений (11) в виде:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i, \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \tag{12}$$

Члены рядов (12) удовлетворяют рекуррентным уравнением:

$$\begin{aligned} a_1^2 \partial_x^2 f_i - \partial_t^2 f_i &= -\beta_1 \partial_t f_{i-1} - \beta_2 \partial_t g_{i-1} \\ a_2^2 \partial_x^2 g_i - \partial_t^2 g_i &= \beta_1 \partial_t f_{i-1} + \beta_2 \partial_t g_{i-1} \quad (i=1,2,\dots) \end{aligned} \tag{13}$$

В свою очередь, решение уравнений (13) разыскиваем в виде:

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_{j=1}^i f_{ij}^1 x^{i-j} (a_1 t - x)^{\gamma+i-1} + \sum_{j=2}^i f_{ij}^2 x^{i-j} (a_2 t - x)^{\gamma+i-1} \\ g_i &= \sum_{j=2}^i g_{ij}^1 x^{i-j} (a_1 t - x)^{\gamma+i-1} + \sum_{j=1}^i g_{ij}^2 x^{i-j} (a_2 t - x)^{\gamma+i-1} \quad (i=1,2,\dots) \end{aligned} \tag{14}$$

Коэффициенты данных сумм можно найти из рекуррентных соотношений, получаемых после подстановки (14) в уравнения (13).

Объединяем выражения (12) и (14), затем группируем слагаемые с одинаковыми степенями величин $a_1 t - x$ и $a_2 t - x$. В итоге получаем выражения для нахождения искомым функций:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i^1(x) (a_1 t - x)^{\gamma+i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} f_i^2(x) (a_2 t - x)^{\gamma+i-1} \\ g &= \sum_{i=2}^{\infty} g_i^1(x) (a_1 t - x)^{\gamma+i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} g_i^2(x) (a_2 t - x)^{\gamma+i-1} \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляем полученные выражения (15) в (11). После вычисления соответствующих производных и приведения расщепления по одинаковым степеням $a_1 t - x$ и $a_2 t - x$ приходим к дифференциальным уравнениям, решение которых в первом приближении будет:

$$f_i^1 = f_{i1}^1 e^{-\delta_1 x}, \quad g_i^2 = g_{i1}^2 e^{-\delta_2 x}$$

Нетрудно проверить, что экспоненциальный множитель будет входить и в результаты всех приближений. В итоге получаем:

$$f_i^1 = e^{-\delta_1 x} F_i^1(x), \quad G_i^1 = e^{-\delta_1 x} G_i^1(x),$$

$$f_i^2 = e^{-\delta_2 x} F_i^2(x), \quad G_i^2 = e^{-\delta_2 x} G_i^2(x)$$

Решение этих уравнений разыскивается в виде:

$$\begin{aligned} F_i^1 &= \sum_{j=1}^i F_{ij}^1 x^{i-j}, \quad G_i^1 = \sum_{j=2}^i G_{ij}^1 x^{i-j}, \quad F_i^2 = \sum_{j=2}^i F_{ij}^2 x^{i-j}, \\ G_i^2 &= \sum_{j=1}^i G_{ij}^2 x^{i-j} \quad (i=1,2,\dots) \end{aligned}$$

Подставляя полученные соотношения в уравнения (15), получим соотношения для нахождения функций нового базиса:

$$\begin{aligned} f &= e^{-\delta_1 x} \sum_{i=1}^{\infty} (a_1 t - x)^{\gamma+i-1} \sum_{j=1}^i F_{ij}^1 x^{i-j} + \\ &+ e^{-\delta_2 x} \sum_{i=2}^{\infty} (a_2 t - x)^{\gamma+i-1} \sum_{j=2}^i F_{ij}^2 x^{i-j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= e^{-\delta_1 x} \sum_{i=2}^{\infty} (a_1 t - x)^{\gamma+i-1} \sum_{j=2}^i G_{ij}^1 x^{i-j} + \\ &+ e^{-\delta_2 x} \sum_{i=1}^{\infty} (a_2 t - x)^{\gamma+i-1} \sum_{j=1}^i G_{ij}^2 x^{i-j} \end{aligned}$$

Для нахождения констант интегрирования $F_{ij}^1, F_{ij}^2, G_{ij}^1, G_{ij}^2$ используем граничные условия.

При $x=0$ имеем:

$$f(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_1^{\gamma+i-1} F_{i1}^1 t^{\gamma+i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} a_2^{\gamma+i-1} F_{i1}^2 t^{\gamma+i-1}$$

$$g(0,t) = \sum_{i=2}^{\infty} a_1^{\gamma+i-1} G_{i1}^1 t^{\gamma+i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} a_2^{\gamma+i-1} G_{i1}^2 t^{\gamma+i-1}$$

Таким образом, напряжение и температуру на границе $x=0$ следует задавать в виде рядов по возрастающим степеням времени t :

$$\sigma(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i t^{\gamma+i-1}, \quad T(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i t^{\gamma+i-1}$$

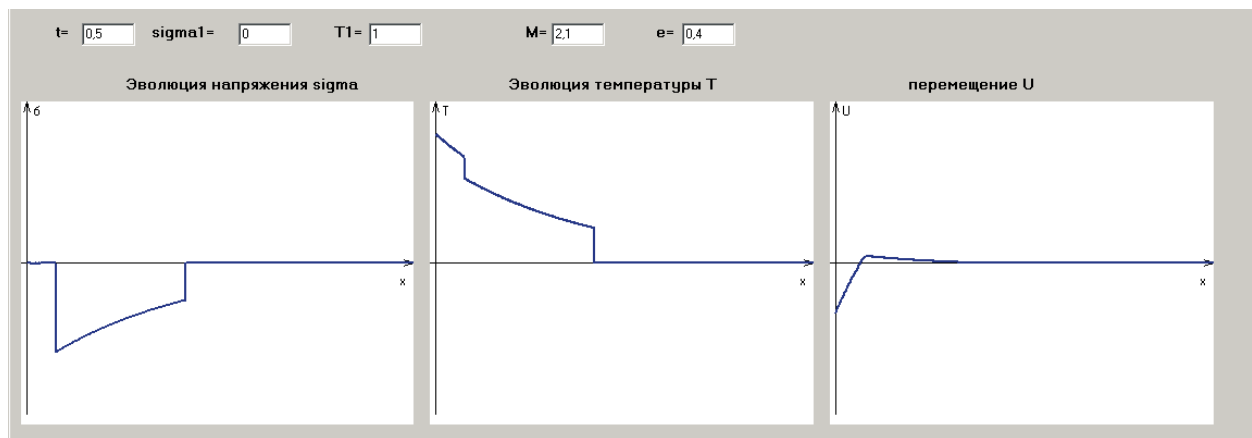


Рис. 1. Графики напряжения, температуры и перемещения при значении времени $t=0.5$

Наиболее интересными являются задачи о внезапно приложенном на границе постоянном напряжении либо температуре. При этом $\sigma_1 \neq 0$ и/или $T_1 \neq 0$ задаются.

На графике приведен пример внезапно заданной на границе температурой для термоупругого полупространства при внезапно приложенной на границе температуре.

смаатриваем обобщенную динамическую задачу, т.е. учитываем конечность распространения тепла. В этом случае имеет смысл рассматривать движение тепловой и механической волны только при малых значениях времени.

В работе выведено инвариантно-групповое решение динамической связанной задачи обобщенной термоупругости. Рассмотрен одномерный случай, на

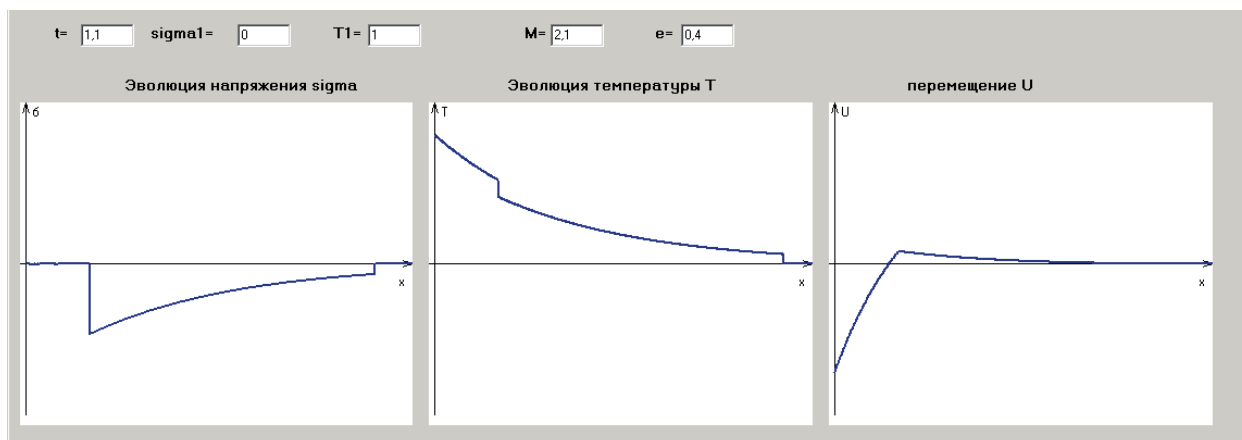


Рис. 2. Графики напряжения, температуры и перемещения при значении времени $t=1.1$

Мы видим, что в полупространстве образуются два фронта волн. Фронт упругой волны предшествует тепловой.

С уменьшением теплоотдачи с поверхности полупространства динамические температурные напряжения уменьшаются по экспоненте. Здесь мы рас-

смотрим примере которого мы убедились в относительной простоте предложенного метода асимптотико-группового анализа, который можно также применять для аналогичных двумерных задач. Отметим качественное сходство полученных результатов с данными, описанными в исследованиях [7].

Литература

1. Белужина, И. Г. Разностные схемы для решения плоской динамической задачи теории упругости со смешанными краевыми условиями. / И. Г. Белужина // Журн. ЖВМ и МФ. – 1969. – Т.9, № 2 – с.362-372.
2. Гасилов, В.А. К расчету напряженно-деформированного состояния среды в области сложной формы. / В. А. Гасилов, С. И. Деревянко, В. И. Маслянкин // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР – 1988. – № 31, 25 – с. 82.
3. Коваленко, А. Д. Введение в термоупругость. / А. Д. Коваленко – К.: Наукова думка, 1965. – 204с.
4. Молчанов, И.Н. Численные методы решения некоторых задач теории упругости. / И.Н. Молчанов – К.: Наукова думка, 1979. – 316с.
5. Партон, В. З. Методы математической теории упругости. / В. З. Партон, П. И. Перлин – М.: Наука, 1981. – 688с.
6. Победря, Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. / Победря, Б.Е. – Изд-во Московского университета, 1995. – 366с.
7. Подстригач, Я.С. Обобщенная термомеханика. / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно – К.: Наукова думка – 1976 г. –356 с.
8. Самарский, А. А. Экономичные разностные схемы для гиперболической системы уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений теории упругости. / А. А. Самарский // Журн. ЖВМ и МФ. – 1965. – т.5, № 1 – с.34-43.
9. Тимошенко, С. П. Теория упругости. / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер – М.: Наука, 1975. – 576 с.
10. Шамровский, А. Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости. / А. Д. Шамровский – Запорожье: ЗГИА, 1997. –136 с.
11. Кукуджанов, В. Н. Динамические задачи взаимосвязанной термоупругости. / Кукуджанов В.Н., Острик А.В. // Институт проблем механики, М.: Наука, 1988. – с. 125-130.