

УДК 539.3

На основі розробленого підходу до розв'язання двовимірних задач статки нетонких конічних оболонок, проведено дослідження впливу параметрів зміни товщини на напружено-деформований стан оболонок

Ключові слова: нетонка конічна оболонка, змінна товщина

На основі розробленого підходу до рішення задач статки нетонких конічних оболонок, проведено дослідження впливу параметрів зміни товщини на напружено-деформований стан оболонок

Ключевые слова: нетонкая коническая оболочка, переменная толщина

On the base of developed approach to solving the problems of statics of non-thin conical shells, the analysis of an influence of thickness parameters change on the stress-strain state of shells is carried out

Key words: non-thin conical shells, variable thickness

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕТОНЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

О.А. Авраменко

Кандидат физико-математических наук
Кафедра программного обеспечения
автоматизированных систем

Запорожская государственная инженерная академия
пр. Ленина, 226, г. Запорожье, Украина, 69006

Контактный тел.: 068-447-84-79

E-mail: avrolya@front.ru

1. Введение

Конические оболочки постоянной и переменной толщины широко используются в различных отраслях техники в качестве элементов конструкций и деталей машин. При расчёте прочности оболочечных конструкций необходимо иметь информацию об их напряжённо-деформированном состоянии. При определении напряжённо-деформированного состояния важно учитывать переменность толщины оболочки, поскольку часто необходимо изменить параметры деформативности конструкции, не изменяя её веса.

2. Классификация существующих методов исследований

Для решения задач статки тонких конических оболочек как постоянной, так и переменной толщины существует ряд разработанных методов, тогда как задачам о напряжённо деформированном состоянии конических оболочек в уточнённой постановке посвящены немного работ. В большинстве из них проводятся исследования изотропных оболочек при простых случаях нагрузки и граничных условиях. Значительная их часть касается упрощённых теорий, которые частично пренебрегают поперечными сдвигами, а также не учитывают некоторые другие параметры при описании исходных

уравнений. Часть работ, где за исходные берутся неклассические модели, посвящённая в основном оболочкам постоянной толщины. Чаще всего такие задачи решались методами асимптотического анализа.

В других работах задачи статки конических оболочек в уточнённой постановке сводятся к одномерным с помощью разложения факторов напряжённо-деформированного состояния в ряды Фурье по образующей, которое является возможным только при отдельных вариантах граничных условий на торцах оболочки и для отдельных видов прилагаемой нагрузки.

Это можно объяснить значительными трудностями, которые возникают при разработке методов решения задач статки нетонких ортотропных конических оболочек переменной толщины, что позволило бы провести анализ напряжённо-деформированного состояния оболочек данного класса в зависимости от геометрических параметров.

3. Решение задач статки нетонких конических оболочек на основе сплайн-аппроксимации

Отнесем нетонкую коническую оболочку к ортогональной системе координат s, θ, γ , где s - длина по образующей поверхности приведения, θ - центральный угол в поперечном сечении к оси вращения, γ - нормальная к данной поверхности координата. Если

радиус окружности в поперечном сечении представить в виде:

$$r(s) = r_0 + \cos \varphi \cdot s. \quad (1)$$

В (1) r_0 - радиус окружности в плоскости отсчета, φ - угол, образованный нормалью к оболочке и осью вращения.

Толщина оболочки изменяется по направляющей по закону

$$h(\theta) = h_0(1 + \alpha \cos \theta), \quad (2)$$

так что с изменением α объем оболочки остается неизменным.

Исходя из основных соотношений уточненной теории оболочек, которая базируется на гипотезе прямолинейного элемента [1], после ряда преобразований получаем разрешающую систему дифференциальных уравнений в частных производных в перемещениях, которая описывает напряженно-деформированное состояние конических оболочек переменной толщины:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= b_{11}u + b_{12} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{13} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{14} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b_{15}v + \\ &+ b_{16} \frac{\partial v}{\partial s} + b_{17} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{18} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + b_{19}w + b_{1,10} \frac{\partial w}{\partial s} + b_{1,11}q_s; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= b_{21}u + b_{22} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{23} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{24} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + b_{25}v + \\ &+ b_{26} \frac{\partial v}{\partial s} + b_{27} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{28} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + b_{29}w + b_{2,10} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ &+ b_{2,11} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} = b_{2,12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} + b_{2,13} \psi_\theta + \\ &+ b_{2,14} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + b_{2,15} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2} + b_{2,16} q_\theta \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= b_{31}u + b_{32} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{32} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{33}v + b_{36} \frac{\partial w}{\partial s} + b_{37} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ &+ b_{38} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + b_{39} \psi_s + b_{3,10} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + b_{3,11} \psi_\theta + b_{3,12} \frac{\psi_\theta}{\partial \theta} + b_{3,13} q_s; \\ \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \theta^2} &= b_{41}u + b_{42} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{43} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b_{45}v + \\ &+ b_{46} \frac{\partial v}{\partial s} + b_{47} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{48} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + b_{49}w + b_{4,10} \frac{\partial w}{\partial s} + \\ &+ b_{4,11} \psi_s + b_{4,12} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + b_{4,13} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + b_{4,14} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} + b_{4,15} \psi_\theta + b_{4,16} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + b_{4,17} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + b_{4,18} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} + b_{4,19} q_s; \\ \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} &= b_{51}u + b_{52} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{53} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{54} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + b_{55}v + b_{56} \frac{\partial v}{\partial s} + \\ &+ b_{57} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{58} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + b_{59}w + b_{5,10} \frac{\partial w}{\partial \theta} + b_{5,11} \psi_s + b_{5,12} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + \\ &+ b_{5,13} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + b_{5,14} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} + b_{5,15} \psi_\theta + b_{5,16} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + b_{5,17} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \\ &+ b_{5,18} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2} + b_{5,19} q_\theta; (0 \leq s \leq L, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты $b_{i,j}$ приведены в [2].

Добавляя к системе разрешающих уравнений (3) граничные условия на криволинейных контурах и условия симметрии по направляющей, приходим к двумерной краевой задаче.

Предлагается подход [2, 3] к решению таких задач, основанный на сплайн-аппроксимации решения в одном направлении и применении устойчивого численного метода дискретной ортогонализации в другом.

Система уравнений (3) содержит производные от разрешающих функций по координате s не выше второго порядка. На этом основании при аппроксимации решений по s можно ограничиться сплайн-функциями третьей степени [3]. Тогда искомое решение краевой задачи для системы уравнений (3) с граничными условиями для жестко закрепленных контуров $s = 0$ и $s = L$

$$u = v = w = \psi_s = \psi_\theta = 0 \quad (4)$$

представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(s, \theta) &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_{1i}(s), \quad v(s, \theta) = \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \varphi_{2i}(s), \\ w(s, \theta) &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \varphi_{3i}(s), \\ \psi_s(s, \theta) &= \sum_{i=0}^N \psi_{si}(\theta) \varphi_{4i}(s), \quad \psi_\theta(s, \theta) = \sum_{i=0}^N \psi_{\theta i}(\theta) \varphi_{5i}(s), \end{aligned} \quad (5)$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, $\psi_{si}(\theta)$, $\psi_{\theta i}(\theta)$ – искомые функции переменной θ , $\varphi_{ji}(s)$ ($j = \overline{1,5}$) – заданные комбинации В-сплайнов третьей степени на равномерной сетке $\Delta: s_0 < s_1 < \dots < s_N = L$, удовлетворяющие граничным условиям (4).

После коллокации приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, $\psi_{si}(\theta)$, $\psi_{\theta i}(\theta)$, которая решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации.

Подставляя значения $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, $\psi_{si}(\theta)$, $\psi_{\theta i}(\theta)$ в выражения (5), находим перемещения и полные углы поворота нормали исходной задачи, а по ним вычисляются все факторы напряженно-деформированного состояния оболочки.

4. Анализ полученных результатов

Рассмотрим трансверсально - изотропные замкнутые нетонкие конические оболочки переменной вдоль направляющей толщины под действием равномерного нормального давления $q_\gamma = q_0 = \text{const}$. Оболочка жестко закреплена по контурам $s=0$ и $s=L$.

Материал оболочки имеет модуль поперечного сдвига $G_{s\gamma} = G_{\theta\gamma} = G' = E/40$, где $E_s = E_\theta = E$ – модуль упругости в плоскости изотропии, коэффициент Пуассона $\nu_s = \nu_\theta = \nu = 0,3$.

Исследуется влияние параметров изменения толщины h_0 и α на напряженно-деформированное состояние конических оболочек постоянного объема.

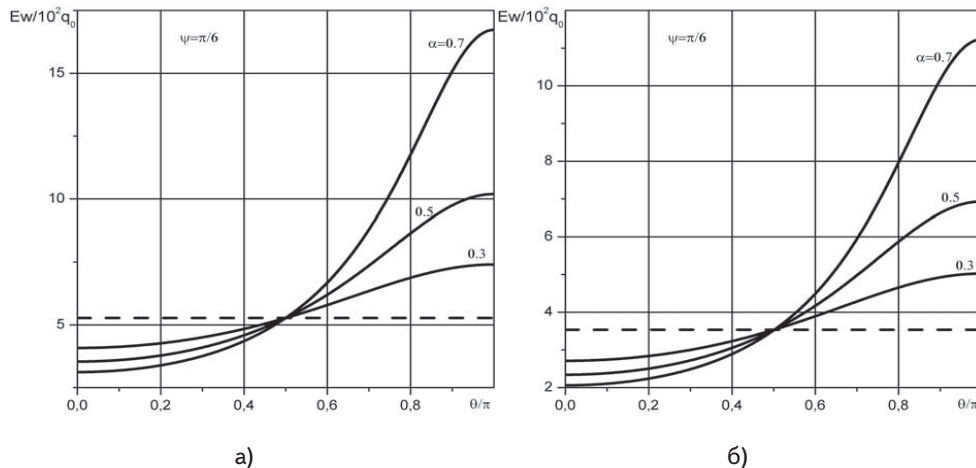


Рис. 1. Распределение прогибов по направляющей для разных параметров изменения толщины трансверсально-изотропной оболочки (а - $h_0=1$; б - $h_0=1,5$)

На рис. 1 показаны распределения прогибов w в трансверсально-изотропной оболочке по направляющей в сечении $s = L/2$ на интервале $0 \leq \theta \leq \pi$ при $h_0=1$ (а) и $h_0=1,5$ (б) для $\alpha=0; 0,3; 0,5; 0,7$ для значения половины угла раствора конуса $\psi = \pi/6$. Пунктирная линия соответствует оболочке постоянной толщины при $\alpha=0$. Из приведенных графиков видно, как с изменением параметра α изменяется величина прогиба.

определенные их значения, чтобы получить наиболее рациональное распределение прогиба и напряжений.

Выводы

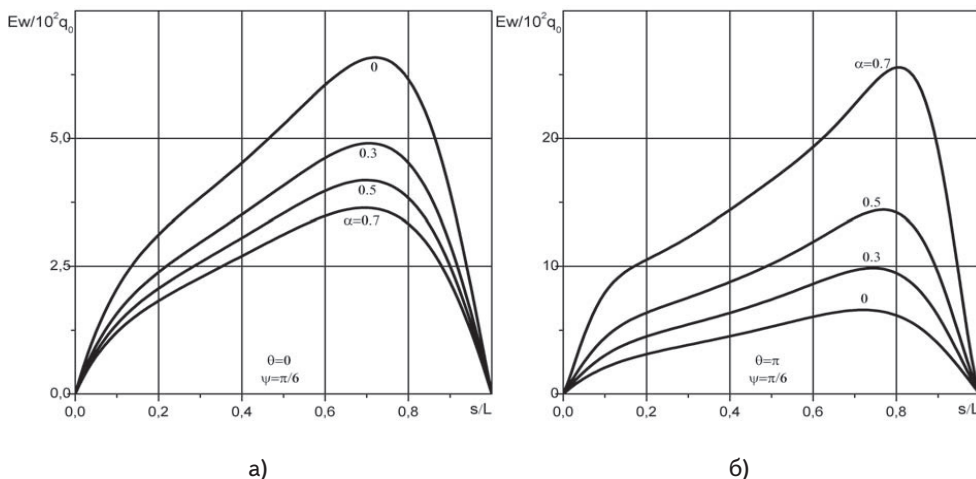


Рис. 2. Распределение прогибов по образующей для разных параметров изменения толщины трансверсально-изотропной оболочки

На рис. 2 представлены графики распределения прогиба w оболочек вдоль образующей для $h_0=1$ при определенных значениях параметров, указанных на рисунках, для значения половины угла раствора конуса $\psi = \pi/6$.

нетонких конических оболочек, в результате которого обнаружен ряд закономерностей распределения полей перемещений и напряжений, которые имеют практическое значение при оценке прочности и надежности элементов конструкций.

Литература

1. Григоренко Я.М. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Г.П. Голуб – Киев: Наукова думка, 1987.– 216 с.
2. Григоренко Я.М. Решение на основе сплайн-аппроксимации двумерных задач статики ортотропных конических оболочек в уточненной постановке / Я.М. Григоренко, О.А. Авраменко, С.Н. Яремченко // Прикладная механика. – 2007.-Т. 43, № 11. – С. 43-54.
3. Григоренко Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я.М. Григоренко, Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.