

## Литература

1. Шляхтянко С. М. Теория и расчет воздушно-реактивных двигателей [Текст] / С. М. Шляхтянко. — М. : Машиностроение, 1987. — 568 с.
2. Казанджан П. К. Теория авиационных двигателей [Текст] / П. К. Казанджан, Н. Д. Тихонов, А. К. Янко. — М. : Машиностроение, 1983. — 223 с.
3. Патент 26883, Україна, МПК В64С 11/00, В64С 27/00, В64Д 35/00, F04К 3/00. Турбогвинтовентиляторний двигун [Текст] / Б. Ш. Мамедов. — № U200705886, заявл. 29.05.2007, опубл. 10.10.2007. Бюл. № 16. — 22 с.
4. Патент 46407, Україна, МПК F04D 27/02, F02К 1/00, F02К 3/00, F02С 7/00. Спосіб підвищення газодинамічної стійкості роботи повітря-реактивних двигунів [Текст] / Б. Ш. Мамедов. — № U200905152, заявл. 25.05.2009, опубл. 25.12.2009. — Бюл. № 24. — 26 с.

*Розглянуто можливість застосування теорії фракталів для дослідження станів рівноваги стержневих систем. Проведено дослідження стержневої конструкції зі знаходженням всіх можливих її стійких положень за допомогою побудови відповідних фрактальних зображень.*

*Ключові слова:* стержнева система, стан рівноваги, фрактал.

*Рассмотрена возможность применения теории фракталов для изучения состояний равновесия стержневых систем. Проведено исследование стержневых конструкций с нахождением всех ее возможных положений равновесия при помощи построения соответствующих фрактальных изображений.*

*Ключевые слова:* стержневая система, состояние равновесия, фрактал.

*The possibility of applying fractal theory to study the equilibrium of beam systems is considered in this article. The research of beam structure with finding all of its possible equilibrium states was performed by constructing the corresponding fractal images.*

*Keywords:* beam system, equilibrium state, fractal.

УДК 539.3

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФРАКТАЛОВ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

**А. Д. Шамровский**

Профессор, доктор технических наук\*

Контактный тел.: (06 12) 223-82-16

E-mail: adshamr@rambler.ru

**Д. Н. Колесник**

Аспирант\*

Контактный тел.: (06 12) 223-82-21

E-mail: mylogin2006@rambler.ru

\*Кафедра программного обеспечения автоматизированных систем  
Запорожская государственная инженерная академия  
пр. Ленина, 226, г. Запорожье, 69006

### Введение

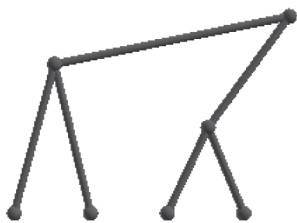
Теория фракталов является достаточно широко освоенной [1–4]. Она может быть применена для описания различных сложных неоднородных, нелинейных систем [2–4]. Так, в [4] представлен необычный взгляд на изучение таких систем. Они представляются в наглядном графическом виде, позволяющем увидеть незаметные с первого взгляда особенности, понятия происходящие в системе процессы. При этом следует учитывать, что «... заглянуть в глубины сложности нелинейных систем можно главным образом с помощью вычислительного эксперимента» [4], поэтому для применения подобных подходов необходимо усиленное использование ЭВМ.

В предыдущей работе авторов [5] изложен метод расчета на прочность и жесткость стержневых систем в условиях конечных перемещений узлов. Этот метод позволяет, в том числе, решать задачи о потере устойчивости систем и об исследовании критической де-

формации систем после потери устойчивости. Здесь, с использованием указанного метода, рассматривается вопрос об исследовании возможных состояний равновесия стержневой системы, как при наличии нагрузки, так и без нее. При этом, для повышения эффективности исследования используется геометрический аппарат фракталов, возможность применения которого обусловлена учетом в методе геометрической нелинейности.

### Постановка задачи

Принципиальным отличием нелинейных задач от линейных является многозначность результатов. Любой нелинейный процесс приводит к ветвлению, к развилке на пути, в которой система может выбрать ту или иную ветвь. Мы имеем дело с выбором решений, последствия которых заранее предсказать невозможно. Самые незначительные отклонения возрастают и имеют далеко идущие последствия [4].



**Рис. 1.** Стержневая система, состоящая из шести стержней

устойчивого равновесия в одном из восьми состояний, изображенных на рис. 2.



**Рис. 2.** Возможные состояния устойчивости стержневой системы без нагрузки

В простейших случаях достаточно длинных стержней верхнего яруса эти состояния легко находятся графически без дополнительных расчетов. Однако возможны такие соотношения длин стержней, например, при относительно длинных стержнях нижнего яруса и коротких стержнях верхнего яруса, когда некоторые из положений равновесия достигаются при деформациях стержней даже при отсутствии нагрузки. В таких случаях поиск всех возможных положений равновесия можно выполнить при помощи метода последовательных перемещений.

**Метод решения**

Для того чтобы с помощью метода [5] получить необходимые результаты, необходимо подбирать соответствующим образом начальные положения узлов. Ранее в нем рассматривались только случаи, когда исходные положения узлов соответствовали какому-то ненагруженному состоянию системы, например, изображенному на рис. 1. Но этот метод позволяет задавать любые начальные положения узлов.

Так, на первом шаге алгоритма, исследуемый узел перемещается в новые координаты  $x_n, y_n$ . В связи с этим изменятся длины всех соединенных с этим узлом стержней. Находим деформации этих стержней:

$$\Delta L_i = L_{in} - L_i,$$

где

$$L_i = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2},$$

$$L_{in} = \sqrt{(x_{jn} - x_{in})^2 + (y_{jn} - y_{in})^2}$$

— начальная и конечная длина  $i$ -го стержня.

Пропорциональные деформациям стержней усилия растяжения (сжатия) будут равны:

$$R_i = C_i \Delta L_i,$$

где  $C_i$  — жесткость стержня  $i$ .

Эти усилия проходят вдоль новых направлений стержней, которые они получили в результате перемещения соединенных с ними узлов.

На следующем шаге мы находим суммарные проекции нагрузок, которые действуют на узлы системы, включая сюда возможные внешние нагрузки  $P_i$  так и реакции стержней  $R_i$ :

$$\sum X_i = -R_i \cos \alpha_{ixn} - \dots - R_k \cos \alpha_{kxn} - P_{ix},$$

$$\sum Y_i = -R_i \cos \alpha_{iyn} - \dots - R_k \cos \alpha_{kyn} - P_{iy},$$

где

$$\cos \alpha_{ixn} = \frac{x_{jn} - x_{in}}{L_{in}}, \quad \cos \alpha_{iyn} = \frac{y_{jn} - y_{in}}{L_{in}}, \quad \dots,$$

$$\cos \alpha_{kxn} = \frac{x_{mn} - x_{kn}}{L_{kn}}, \quad \cos \alpha_{kyn} = \frac{y_{mn} - y_{kn}}{L_{kn}}.$$

Если вычисленные суммы не равны нулю (значительно отличаются от нуля), тогда процедура продолжается, иначе прекращается.

На следующем шаге мы находим проекции перемещений узлов пропорционально найденным суммарным проекциям напряжений:

$$\Delta x_i = \gamma \sum X_i, \quad \Delta y_i = \gamma \sum Y_i.$$

В итоге каждый узел мы перемещаем в новое положение, вычисляемое следующим образом:

$$x_{in} = x_i + \Delta x_i, \quad y_{in} = y_i + \Delta y_i.$$

После этого проводим замену  $x_i = x_{in}, y_i = y_{in}$  и возвращаемся к шагу, на котором вычисляются деформации стержней. Данный рекуррентный процесс заканчивается при достижении равновесия всех узлов системы с заданной точностью.

В связи с вышесказанным, поступим следующим образом. Будем рассматривать, по очереди, различные положения верхнего узла, изменяя их с небольшим шагом по горизонтали и вертикали. Применяя описанный метод последовательных перемещений, находим то состояние равновесия системы, в которое она перемещается при заданном начальном положении узла. Полное сканирование плоскости позволяет, в итоге, найти все искомые состояния равновесия.

Такое решение задачи является избыточным, поскольку одно и то же состояние равновесия находится многократно при многих начальных положениях верхнего узла. Однако такой подход распространен в так называемой теории фракталов. Фрактал, в данном случае получается следующим образом. Каждому из положений равновесия присваивается какой-то определенный цвет. Далее, тот же цвет присваивается всем тем точкам плоскости, которые приводят в данное положение равновесия, если верхний узел вначале совместить с данной точкой.

Так, на рис. 3. изображен пример подобного фрактала. Мы видим, что в одно и то же положение равновесия можно попасть при расположении начальной точки в некоторой достаточно сложно устроенной области плоскости. Это типично для теории фракталов и отражает



1 — ■, 2 — ■, 3 — ■, 4 — ■, 5 — ■, 6 — ■, 7 — ■, 8 — ■

**Рис. 3.** Фрактал, построенный для стержневой системы без нагрузки



**Рис. 4.** Стержневая система, из шести стержней с нагрузкой на верхний узел

сложность нелинейных задач, графической иллюстрацией которых и являются фракталы.

Если теперь приложить к системе некоторую нагрузку (например, направленную вертикально вниз силу, действующую на верхний узел (рис. 4)), то картина состояний равновесия изменится (рис. 5).



1 — ■, 2 — ■, 3 — ■, 4 — ■, 5 — ■, 6 — ■, 7 — ■, 8 — ■

**Рис. 5.** Фрактал, построенный для стержневой системы с нагрузкой

При относительно небольшой нагрузке происходит только количественное изменение, т. е. некоторые смещения состояний равновесия системы по сравнению с теми, которые отвечают отсутствию нагрузки (рис. 2). При этом и фрактальная картина изменяется незначительно. Рост нагрузки, сопровождаемый потерей устойчивости системы, приводит к исчезновению некоторых из положений равновесия и качественно изменению фрактальной картины. На рис. 6 приведены соответствующие результаты.

Мы получаем типичный случай из так называемой теории катастроф. Катастрофа (потеря устойчивости) приводит к изменению картины расположения особых точек.

Данный процесс можно изучить более подробно, построив серию фракталов для разных значений нагрузок, действующих на систему. Постепенно увеличивая нагрузку с небольшим шагом от нулевого значения до значения, когда система впервые теряет устойчивость, можно получить серию фракталов, изображенную на рис. 7.

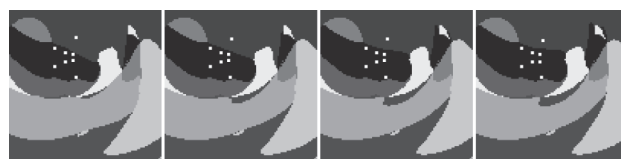
Из рисунка видно, что одна из областей постепенно замещает собой другую, наглядно демонстрируя посте-



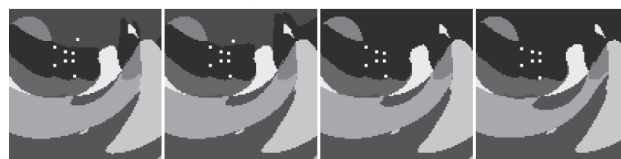
1 — ■, 2 — ■, 3 — ■, 4 — ■, 5 — ■, 6 — ■, 7 — ■

**Рис. 6.** Фрактал, построенный для стержневой системы с критической нагрузкой

пенное исчезновение одного из положений устойчивости. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к последующим потерям устойчивости системой, что можно наблюдать как постепенное замещение одних областей фрактала другими (рис. 8).



а б в г



д е ё ж

**Рис. 7.** Серия фракталов, изображающая постепенное наращивание нагрузки



а б в г



д е ё ж

**Рис. 8.** Серия фракталов, изображающая постепенное исчезновение областей

С увеличением нагрузки на систему, уменьшается количество возможных состояний равновесия. На рисунках это выражается тем, что плоскость постепенно окрашивается в меньшее число цветов, а отчетливо различимые области, отвечающие разным положениям равновесия, постепенно сливаются друг с другом.

Изучение фракталов позволяет выявить некоторые неочевидные явления. Например, для некоторых систем возможно близкое расположение двух (или более) положений равновесия, отвечающих одной и той же нагрузке. При этом система может попасть в одно из этих близких положений в зависимости от так называемой истории

нагружения. Конкретно, при применении метода последовательных перемещений, это может выглядеть так:

1. Можно применить метод сразу для полного значения приложенной нагрузки.

2. Можно, вместо этого, вначале приложить небольшую часть нагрузки; найти соответствующее положение равновесия системы. Затем, исходя из этого положения, найти новое положение, отвечающее увеличенной нагрузке и т. д. вплоть до достижения полной нагрузки.

При таких разных подходах система может оказаться, при одной и той же конечной нагрузке, в разных положениях равновесия.

### Выводы

Расширена область применения метода расчета стержневых конструкций, представленного в [5], с целью произвольного задания начальных положений вершин, рассчитываемой системы.

Для лучшей иллюстрации возможных состояний равновесия стержневой системы применена теория фракталов.

Разработанная методика использована для исследования ряда сложных стержневых конструкций, что позволило найти для них всевозможные положения устойчивости, как при отсутствии нагрузки, так и при ее наличии. Также получены соответствующие данным системам фракталы, благодаря которым можно наглядно

представить условия, приводящие стержневую систему в то или иное устойчивое состояние.

### Литература

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы [Текст]: пер. с англ. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
2. Пьетронеро Л. Фракталы в физике [Текст]: труды VI Международного симпозиума по фракталам в физике, 9–12 июля 1985 г. МЦТФ, Триест, Италия / Пьетронеро Л., Тозатти Э. — М.: Мир, 1988. — 672 с.
3. Кулак М.И. Фрактальная механика материалов [Текст] / М.И. Кулак. — Мн.: Выш. Шк., 2002. — 304 с.: ил. — ISBN 985-06-0761-0.
4. Пайтген Х.-О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем [Текст] / Х.-О. Пайтген, П.Х. Рихтер. — М., 1993. — 176 с.
5. Шамровський О. Д. Розрахунок стрижневих конструкцій методом послідовних переміщень із урахуванням геометричної нелінійності [Текст] / О. Д. Шамровський, Д. М. Колесник, Ю. О. Лимаренко // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2009. — № 1. — С. 78–85.
6. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов [Текст] / Ю. Н. Работнов. — М.: Физматиз, 1962. — 455 с.
7. Тимошенко С. П. Курс теории упругости [Текст] / С. П. Тимошенко. — К.: Наукова думка, 1972. — 508 с.

УДК 621.165

## ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ НА УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК ГАЗОВОЙ ТУРБИНЫ

Ю. А. Быков

Кандидат технических наук, ведущий инженер отдела\*

Контактный тел.: (057) 737-15-92, 099-345-37-27

E-mail: bykov@ukrpost.ua

В. И. Гнесин

Доктор технических наук, профессор, заведующий отделом\*

Контактный тел.: (0572) 94-18-67

E-mail: gnesin@ipmach.kharkov.ua

\*Отдел нестационарной газодинамики и аэроупругости  
Институт проблем машиностроения  
имени А. Н. Подгорного НАН Украины  
ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61000

*Представлено результати чисельного моделювання пружних коливань лопаток газової турбіни при нерівномірному розподілу температури та наявності охолоджуючих каналів в лопатці. Наведені результати аналізу власних частот коливань лопатки.*

*Ключові слова: власні частоти та форми коливань, динаміка лопаток турбомашин, температурне поле.*

*Представлены результаты численного моделирования упругих колебаний лопаток газовой турбины при неравномерном распределении температуры и наличии охлаждающих каналов в лопатке. Приведены результаты анализа собственных частот колебаний лопатки.*

*Ключевые слова: собственные колебания частоты и формы колебаний, динамика лопаток турбомашин, температурное поле.*

*In the paper results of numerical simulation of elastic vibrations of gas turbine blades with non-uniform temperature distribution and cooling are presented. The results of analysis of natural frequencies of blade vibrations are demonstrated.*

*Keywords: natural frequencies and modes, turbomachine blade dynamics, thermal field.*