

## Література

1. Chunshan S. Tri-reforming of methane: a novel concept for catalytic production of industrially useful synthesis gas with desired H<sub>2</sub>/CO ratios [Текст]/ Chunshan S., Wei P. - Catalysis Today, 2004. – p. 128-131.
2. Ткаченко, А. Моделивання процесу каталітичного три-риформінгу метану [Текст] / Ткаченко А., Безносик Ю. - Перша міжнародна наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Хімія та хімічні технології 2010» (ССТ-2010). 25 – 27 листопада 2010. – Львів, 2010. – с.196 – 197.
3. Ткаченко, А. Експериментальні дослідження та моделювання автотермічного процесу три-риформінгу [Текст] / Ткаченко А., Безносик Ю. - Друга міжнародна наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Хімія та хімічні технології 2011» (ССТ-2011). 24 – 26 листопада 2011. – Львів, 2011. – с.184 – 187.

УДК 536.24: 621.438

# S-ФУНКЦИИ В ПОСТРОЕНИИ КОНСЕРВАТИВНЫХ СТРУКТУР РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А. П. Слесаренко

Доктор физико-математических наук, профессор,  
ведущий научный сотрудник, лауреат Государственной  
премии Украины

Отдел моделирования и идентификации тепловых  
процессов

Институт проблем машиностроения А.М. Подгорного  
НАН Украины

ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046  
Контактный тел.: 096-386-30-22

*Пропонується нова методологія побудови регіональних консервативних аналітичних структур розв'язку геометричних зворотних крайових задач*

*Ключові слова: S-функції, геометричні зворотні задачі, структура рішення*

*Предлагается новая методология построения региональных консервативных аналитических структур решения геометрических обратных краевых задач*

*Ключевые слова: S-функции, геометрические обратные задачи, структура решения*

*A new methodology to construct the regional conservative analytical solutions of geometric structures of inverse boundary value problems is proposed*

*Keywords: S-functions, geometric inverse problems, structure of the solution*

## 1. Постановка проблеми

Научные исследования, представленные в данной статье, относятся к математическому моделированию тепловых процессов в областях с границей, подлежащей определению по данным вычислительного эксперимента, а также разработке методологии аналитического описания изменяющихся во времени участков границ с помощью S-функций.

Постановка геометрических обратных задач изложена в работе [1]. К данным задачам можно добавить важные в научно-техническом отношении задачи: задачу об определении оптимального профиля ребер радиатора с максимальной скоростью теплопередачи от поверхности ребра к газу, и задачу по поиску наилучшей формы твердого тела, движущегося в жидкости, создающего наименьшее сопро-

тивление потока. Последняя задача была поставлена Ньютоном [2].

Можно поставить сотни и тысячи геометрических обратных краевых задач, представляющих как самостоятельный научный, так и технический интерес. Но при решении всех этих задач численными методами происходит часто такая нелинейная «суперпозиция» погрешностей, связанная с погрешностью аппроксимации искомой границы области и с заданными на ней граничными условиями, что получаются или большие погрешности конечного результата, или «развал» вычислительного процесса. Метод R-функций делает структуры решения краевых задач нефизичными во внутренних точках области из-за аналитического продолжения граничных условий внутрь области, а также нефизичными в окрестностях острых углов и ребер.

Построение консервативных структур решения прямых и обратных краевых задач, включая и геометрические обратные задачи с помощью S-функций [3,4], позволяет убрать эти «нефизичности» как во внутренних точках области решения задачи, так и в окрестностях угловых точек и ребер области.

## 2. Анализ исследований и публикаций

В монографии [1] и соответствующих работах, указанных в [1] представлена полная информация о достижениях и возможностях решения геометрических обратных задач теплопроводности за последние три десятилетия.

В работе [5] утверждается, что разработана новая методика определения неизвестной границы области, которая основана на совместном применении вариационных методов [2;6], метода R-функций [7] и сплайн-интерполяции. Здесь автор вступает в противоречие с теоремами классических методов теории приближений в краевых задачах. К данным теоремам относится и теорема Канторовича-Крылова [6], из доказательства которой следует, что произведение полной системы линейно-независимых функций на весовую функцию только в том случае является полной системой функций, если: весовая функция является непрерывной, имеет непрерывные производные и ограничена, включая и свои производные. R-функции [7] имеют разрывные производные в угловых точках и неограниченные вторые и т.д. производные в угловых точках. Так что ни о каком в этом случае серьезном с точки зрения теории приближений в краевых задачах поиске минимума функций нескольких переменных – геометрических параметров, не может быть и речи. И каким образом также в этом случае можно с помощью функции с сингулярными особенностями в угловых точках области получить множество возможных решений, образующих компакт? И о какой естественной регуляризации здесь может идти речь в решениях геометрических обратных задач, если заранее решения безнадежно «портятся» внесением «фиктивных» сингулярных особенностей в угловых точках области? Здесь это касается особенно граничных условий второго и третьего рода, а также условий «сопряжения» для геометрических обратных задач теплопроводности. В случае граничных условий первого рода происходят те же неприятности не на много меньшего характера. Поэтому незнание основных теорем классических методов теории приближений в краевых задачах приводит автора в работе [5] к ложному торжеству глобального решения проблемы, связанной с геометрическими обратными задачами теплопроводности.

Чтобы учесть аналитическую информацию о граничных условиях задачи, содержащих производные по нормали или касательной к поверхности S области  $\Omega$  в текущей точке P поверхности S, необходимо в приближенных аналитических структурах решения иметь непрерывные функции

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial z},$$

где

$$\omega(x,y,z)|_S = 0, \quad \omega(x,y,z) > 0,$$

$$\text{если } (x,y,z) \in \Omega \text{ и } \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \right|_S = 1,$$

$\mu$  - направление внешней нормали к поверхности S области  $\Omega$  для геометрической обратной задачи.

Функция  $\omega(x,y,z)$ , построенная с помощью R-функций и удовлетворяющая приведенным выше условиям имеет в угловых точках границы области, включая и ребра для трехмерных конструктивных элементов, разрывные частные производные. В силу этого все структуры решения, построенные с помощью R-функций и учитывающие граничные условия второго и третьего рода, а также условия «идеального» и «неидеального» теплового контакта на поверхностях контакта разнородных сред, имеют разрывные производные. В вычислительном процессе варианты «отступления» от углов порождают ложную уверенность в возможности серьезно решить задачу, так как создается иллюзия возможности замены работы с разрывными частными производными от функции  $\omega(x,y,z)$  работой с якобы непрерывными производными. Достаточно обратиться к работе [8], чтобы понять всю глубину научной «мистики» в таких подходах с вариантами «отступления» от фиктивных сингулярных особенностей в таких приближенных аналитических неконсервативных структурах решений краевых задач.

Другим очень большим «подводным камнем» при решении прямых и обратных краевых задач, является неконсервативность приближенных аналитических структур решений краевых задач в методе R-функций. Это объясняется их «антифизичным» поведением в области  $\Omega$  решения задачи. В работе [3] приводится пример, который показывает, что продолжение граничных условий третьего рода внутрь области ведет к невозможности решения задачи методом R-функций при  $h \rightarrow \infty$ . В то же время из учебного курса ВУЗов по «Методам теории теплопроводности» известно, что при  $h \rightarrow \infty$  температура поверхности области  $\Omega$   $T_{\Pi} \rightarrow T_{Cp}$ , где  $T_{Cp}$  - температура окружающей среды. В этом случае условие третьего рода в предельном случае при  $h \rightarrow \infty$  переходит в условие первого рода.

Особенно это проявляется при осциллятивных граничных условиях теплообмена как по временной переменной, так и в случаях, когда учитываются циклические условия теплообмена, зависящие от координат и времени.

В этом случае «шторм» в физических моделях тепловых процессов происходит только в граничном пояске. Продолжение же таких граничных условий внутрь области приводит к заполнению «безштормового» внутреннего региона области в точном решении задачи фиктивным «штормом».

Такой фиктивный «шторм» во внутреннем регионе области или во много раз увеличит усилия по решению исходной задачи, или зачастую сделает невозможным ее решение с допустимыми погрешностями.

Методология построения консервативных структур решения задач теплопроводности с помощью S-функций, приведенная в работах [3,4,9,10], позволяет впервые в мировой научной практике строить приближенные аналитические структуры решения краевых задач с непрерывно-дифференцируемыми базисными функциями. При этом в асимптотическом приближении с любой наперед заданной степенью точности решаются соответствующие обратные задачи дифференциальной геометрии, и учитывается аналитическая информация от заданных граничных условиях краевой задачи.

### 3. Цель работы

Разработка методологии построения региональных консервативных структур решения геометрических обратных краевых задач с помощью S-функций по данным вычислительного эксперимента, точно удовлетворяющих заданным граничным условиям на искомой границе области.

Граница области описывается в аналитической форме S-функциями для любого заданного набора параметров, входящих в «опорные» функции, которые задают изменяющиеся во времени участки границы области решения геометрической обратной краевой задачи.

### 4. Основные материалы исследования

Данный подход иллюстрируется на примере решения четырех геометрических обратных задач.

Задача 1. Рассмотрим геометрическую обратную задачу теплопроводности с системой фиксированных источников энергии для области, представленной на рис. 1.

При решении данной задачи подбирается оптимальная форма границы пластины таким образом, чтобы площадь поверхностей пластины оставалась неизменной (1).

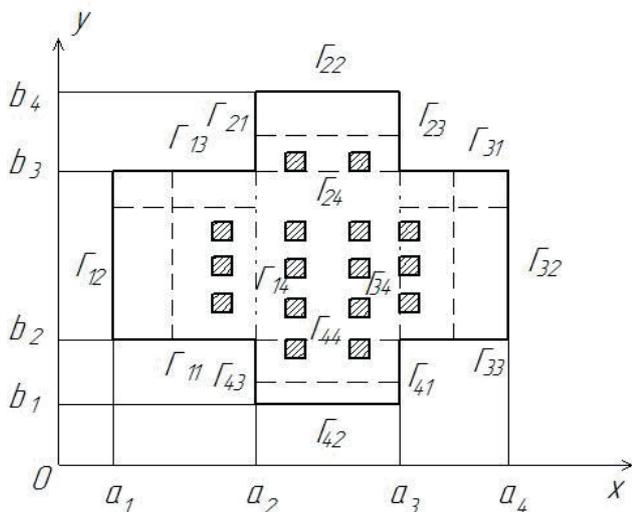


Рис. 1. Схема конструктивного элемента с источниками энергии

$$\Delta T - \beta^2 T = -F; \quad T = T(x, y); \quad \left( \frac{\partial T}{\partial \mu} + Bi_{kk} T \right) \Big|_{\Gamma_{kk}} = Bi_{kk} T_{Cpk};$$

$$T(x_m, y_m) = T_{\Omega}(x_m, y_m); \quad F = \begin{cases} \frac{P_i}{s \lambda d}, & (x, y) \in H_i \\ 0, & (x, y) \notin H_i \end{cases} \quad (1)$$

где  $Bi_{kk} = \frac{\alpha_{kk} \cdot l}{\lambda}$ ,  $\alpha_{kk}$  - коэффициент теплообмена,  $l$  - характерный размер,  $d$  - толщина пластины,  $\lambda$  - теплопроводность пластины,  $P_i$  - тепловой поток в области  $H_i$ ,  $\beta^2 = (\alpha_1 + \alpha_2) \lambda^{-1} d^{-1}$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - суммарные коэффициенты теплоотдачи, характеризующие конвекцию и излучение с поверхностей пластины в окружающую среду.

Пунктирными линиями обозначены возможные варианты изменения геометрии области. Ограничение накладывается на максимально возможную температуру в области  $\Omega$ .

Построим региональные консервативные структуры решения геометрической обратной задачи теплопроводности (2):

$$T_1 = T_{Cp1} + \Phi_1 - \omega_{11} \wedge_S (\omega_{12} \omega_{13} \omega_{14})^2 \left[ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \omega_{11}}{\partial y} \Big|_{y=b_2} - Bi_{11} \Phi_1 \Big|_{y=b_2} \right] -$$

$$- \omega_{12} \wedge_S (\omega_{11} \omega_{13} \omega_{14})^2 \times \left[ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x} \Big|_{x=a_1} - Bi_{12} \Phi_1 \Big|_{x=a_1} \right] -$$

$$- \omega_{13} \wedge_S (\omega_{11} \omega_{12} \omega_{14})^2 \left[ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial \omega_{13}}{\partial y} \Big|_{y=b_3} - Bi_{13} \Phi_1 \Big|_{y=b_3} \right];$$

$$T_2 = T_{Cp2} + \Phi_2 - \omega_{21} \wedge_S (\omega_{22} \omega_{23} \omega_{24})^2 \times$$

$$\times \left[ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial \omega_{21}}{\partial x} \Big|_{x=a_2} - Bi_{21} \Phi_2 \Big|_{x=a_2} \right] - \omega_{22} \wedge_S (\omega_{21} \omega_{23} \omega_{24})^2 \times$$

$$\times \left[ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \frac{\partial \omega_{22}}{\partial y} \Big|_{y=b_4} - Bi_{22} \Phi_2 \Big|_{y=b_4} \right] - \omega_{23} \wedge_S (\omega_{21} \omega_{22} \omega_{24})^2 \times$$

$$\times \left[ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial \omega_{23}}{\partial x} \Big|_{x=a_3} - Bi_{23} \Phi_2 \Big|_{x=a_3} \right];$$

$$T_3 = T_{Cp3} + \Phi_3 - \omega_{31} \wedge_S (\omega_{32} \omega_{33} \omega_{34})^2 \times$$

$$\times \left[ \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \frac{\partial \omega_{31}}{\partial y} \Big|_{y=b_3} - Bi_{31} \Phi_3 \Big|_{y=b_3} \right] - \omega_{32} \wedge_S (\omega_{31} \omega_{33} \omega_{34})^2 \times$$

$$\times \left[ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \frac{\partial \omega_{32}}{\partial x} \Big|_{x=a_4} - Bi_{32} \Phi_3 \Big|_{x=a_4} \right] - \omega_{33} \wedge_S (\omega_{31} \omega_{32} \omega_{34})^2 \times$$

$$\times \left[ \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \frac{\partial \omega_{33}}{\partial y} \Big|_{y=b_2} - Bi_{33} \Phi_3 \Big|_{y=b_2} \right];$$

$$T_4 = T_{Cp4} + \Phi_4 - \omega_{41} \wedge_S (\omega_{42} \omega_{43} \omega_{44})^2 \times$$

$$\times \left[ \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} \frac{\partial \omega_{41}}{\partial x} \Big|_{x=a_3} - Bi_{41} \Phi_4 \Big|_{x=a_3} \right] - \omega_{42} \wedge_S (\omega_{41} \omega_{43} \omega_{44})^2 \times$$

$$\times \left[ \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} \frac{\partial \omega_{42}}{\partial y} \Big|_{y=b_1} - Bi_{42} \Phi_4 \Big|_{y=b_1} \right] - \omega_{43} \wedge_S (\omega_{41} \omega_{42} \omega_{44})^2 \times$$

$$\times \left[ \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} \frac{\partial \omega_{43}}{\partial x} \Big|_{x=a_2} - Bi_{43} \Phi_4 \Big|_{x=a_2} \right];$$



нестационарному граничному условию (7) согласно [3;4] представим в виде:

$$T(x,y,p_1,p_2,Fo) = T_{Cp}(Fo) + T(x,y,C_{ij},Fo) - \omega^* D_1 \left( T(x,y,C_{ij},Fo) \right) \Big|_{\Gamma(Fo)} + \omega^* Bi(Fo) T(x,y,C_{ij},Fo) \Big|_{\Gamma(Fo)};$$

$$D_1(T) = \frac{\partial \omega^*}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \omega^*}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y};$$

$$\omega^* = \omega(x,y,p_1,p_2,Fo) \left[ \omega_1^2 + (\text{grad}(\omega))^2 \right]^{-1/2};$$

Максимальные значения  $p_1$  и  $p_2$  всегда можно определить из динамической физической модели процесса.

Для того чтобы определить коэффициенты структуры решения (9)  $C_{ij}$  для каждого момента времени  $Fo_1$   $C_{ij} = C_{ij}(p_1,p_2,Fo_1)$  решим 121 задачу для  $p_1 = 0.5 + 0.25m$ ;  $p_2 = 0.5 + 0.25m$ ;  $m = 0,1...10$  и применим первую и вторую интерполяционные формулы Ньютона [11].

Параметры скорости изменения геометрической формы области для каждого момента времени  $Fo_1$  определим из вариационных задач (10):

$$I_1(p_1^{(l)}, p_2^{(l)}) = \sum_m \sum_{ij} \left[ T(x_m, y_m, C_{ij}, p_1^{(l)}, p_2^{(l)}, Fo_1) - T^{(l)}(x_m, y_m, Fo_1) \right]^2, \quad (10)$$

что сводится к решению системы нелинейных уравнений (11):

$$\frac{\partial I_1(p_1^{(l)}, p_2^{(l)})}{\partial p_1^{(l)}} = 0; \quad \frac{\partial I_1(p_1^{(l)}, p_2^{(l)})}{\partial p_2^{(l)}} = 0; \quad (11)$$

$$\omega(x,y,p_1,p_2,Fo) = \left( a^2 - x^2 e^{-p_1 Fo} - y^2 (1 - e^{-p_1 Fo}) \right) \wedge_S \left( b^2 - x^2 (1 - e^{-p_2 Fo}) - y^2 e^{-p_2 Fo} \right);$$

Следует заметить, что при  $Fo = 0$  форма области представляет собой прямоугольник  $|x| \leq a, |y| \leq b$ , а при  $Fo = \infty$  - прямоугольник  $|x| \leq b, |y| \leq a$ . Формы области для различных моментов времени представлены на рис. 3,  $a=1, b=0.35$ .

Задача 4. Проблемной и важной с научно-технической точки зрения является задача описания в аналитической форме процесса движения фронта затвердевания металла в изложницах различной формы, и определения параметров скорости движения фронта по данным вычислительного или теплофизического эксперимента.

С помощью S-функций построим эмпирическую формулу (12):

$$f_1 \wedge_S f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt[2k]{f_1^{2k} + f_2^{2k} + 10^{-(2k+p)} \exp[-10(2k+p)(f_1^{2k} + f_2^{2k})]}; \quad (12)$$

$$f_1 = f_1(x, \tau); \quad f_2 = f_2(y, \tau); \quad p = 2N.$$

$$f_1(x, \tau) = \sum_{m=0}^3 a_m x^m \exp(-p_m^{(1)} \tau);$$

$$f_2(y, \tau) = \sum_{m=0}^3 b_m y^m \exp(-p_m^{(2)} \tau).$$

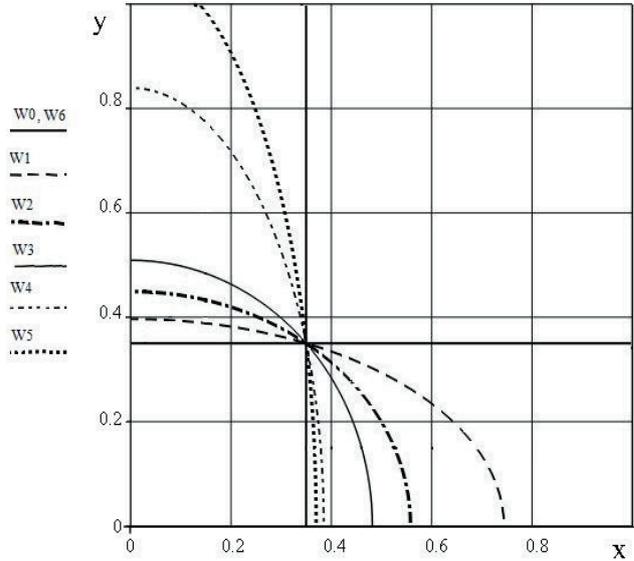


Рис. 3. Форма области для различных моментов времени, при  $p_1 = 10, p_2 = 1$ : W0 ( $y=0.35$ ) –  $0Fo$ ; W1 –  $0.25Fo$ ; W2 –  $0.5Fo$ ; W3 –  $0.75Fo$ ; W4 –  $1.75Fo$ ; W5 –  $2.25Fo$ ; W6 ( $x=0.35$ ) –  $10Fo$

Эта формула с достаточно высокой степенью точности может описывать движение фронта затвердевания металла в изложницах клинообразной, прямоугольной и любой другой формы. Она содержит восемь параметров, характеризующих скорость движения фронта затвердевания.

В простом случае для изложницы с прямоугольным сечением  $|x| \leq a, |y| \leq b$ , для описания процесса движения фронта затвердевания металла с параметрами скорости движения  $p_1$  и  $p_2$  с приемлемой точностью для инженерных расчетов можно пользоваться формулой (13):

$$\omega(x,y,p_1,p_2,\tau) = \left( x^2 - a^2 \exp(-p_1 \tau) \right) \wedge_S \left( y^2 - b^2 \exp(-p_2 \tau) \right) \quad (13)$$

Параметры скорости движения фронта затвердевания металла в изложнице можно определить по данным вычислительного или теплофизического эксперимента по методологии рассмотренной в предыдущей задаче.

### 5. Вычислительный эксперимент

При оформлении статьи Слесаренко А.П. «S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм» [3] была допущена неточность, и результаты, помещенные в табл. 4 статьи [3] в строке для R-функций были получены не по структуре метода R-функций [7], а по консервативной структуре решения задачи, предложенной в [4,9-10] с применением разностных схем повышенного порядка точности:

$$T = T_{Cp} + \Phi - \omega_1 \wedge_0 \omega_2 \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \Big|_{x=\pm 1} - Bi_1 \Phi \Big|_{x=\pm 1} \right] - \omega_2 \wedge_0 \omega_1 \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \Big|_{y=\pm 1} - Bi_2 \Phi \Big|_{y=\pm 1} \right] \quad (14)$$

В данной статье в табл. 1 приведены результаты, полученные по неконсервативной структуре решения задачи метода R-функций:

$$T = (T_{cp} + \Phi) \omega \frac{\omega_2 Bi_2 + \omega_1 Bi_1}{\omega_1 + \omega_2} - \omega \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{\partial \omega}{\partial C} \right]; \quad \omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2 \quad (15)$$

с использованием по временной переменной разностной схемы первого порядка точности, а по пространственным координатам разностной схемы второго порядка точности. При этом использовалось 55 координатных функций, 400 узлов разностной сетки, шаг по времени 0,001Fo.

В табл. 1 приведены вычисленные приближенно и точные значения для температуры призмы в отдельных ее внутренних точках и максимальная относительная погрешность вычисления для задачи [3]. Приближенные значения температуры получены по консервативной структуре решения задачи с помощью S-функций IV рода (14), и по неконсервативной структуре решения (15) задачи [3] с помощью R-функций.

На рис. 4 представлена в диметрии температура пластины, вычисленная с помощью неконсервативной структуры решения (15) для момента времени 0.02Fo с использованием R-функций.

Точное решение задачи [3] выбрано в виде:

$$T_T(x, y, Fo) = T_{cp}(Fo) + (\phi(x, Fo) - f_1'(x) \phi(x, Fo) f_1'(x) + f_1(x) Bi(Fo) \phi(x, Fo)) \times (\psi(y, Fo) - f_2'(y) \psi'(y, Fo) f_2'(y) + f_2(y) Bi(Fo) \psi(y, Fo));$$

$$f_1(x) = (1 - x^2); \quad \phi(x) = (\cos(x\pi/2) + 2);$$

$$f_2(y) = (1 - y^2); \quad \psi(y) = (\cos(y\pi/2) + 2)$$

$$T_{cp}(Fo) = 10000(1 - \exp(-0.5Fo)),$$

$$Bi(Fo) = \exp(-230Fo), \quad (x, y) \in \Omega, \quad 0 < Fo < 0.02$$

Если в исходной задаче температура среды и критерий Био изменяются по осцилляторному закону, то погрешности, полученные неконсервативными структурами будут значительно большими, чем полученные консервативными структурами. Это доказывает, что продолжение граничных условий внутрь области делает решение нефизичным, особенно ярко это заметно, если в граничных условиях отражены резко осциллирующие условия теплообмена. Физически это объясняется тем, что резко осциллирующие условия теплообмена на границе области распространяют свое влияние вдоль граничного пояса области и не влияют на внутренние точки области, достаточно удаленные от границы. Продолжение же в этом случае граничных условий внутрь области заполняют всю область фиктивными осциллирующими источниками и стоками энергии. В этом случае применение сплайнов Шёнберга в качестве аппроксимационных функций в структурах решения во многих случаях не позволяет

нейтрализовать фиктивные источники и стоки внутри области.

Таблица 1

Fo	Значение	(0;0)	(0,5;0,5)	(0,95;0,95)	$\epsilon_{max}, \%$
0.001	Пр.R	25,544707	7,20506366	9,14682844	11,5804
	Пр.S	28,889586	6,632975	9,356339	0,02784
	Точное	28,890317	6,632868	9,354975	-
0.01	Пр.R	212,35613	92,3503863	7,82298339	86,4953
	Пр.S	372,479831	80,169448	57,932896	0,019836
	Точное	372,482560	80,168620	57,927971	-
0.02	Пр.R	11213,75800	1912,79669	2974,95338	1311,76
	Пр.S	23272,328980	2490,855986	210,681319	0,180956
	Точное	23272,400000	2490,867000	210,726327	-

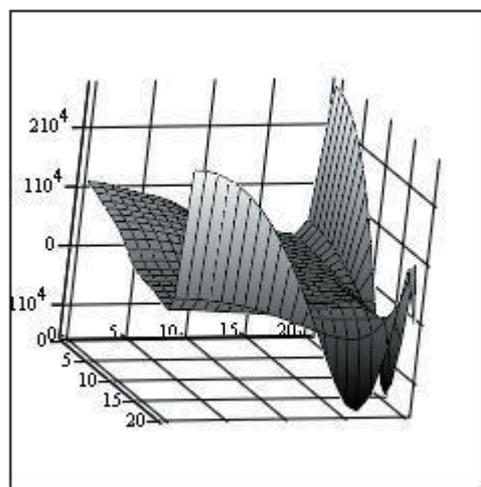


Рис. 4. Распределение температуры по сечению прямоугольной призмы в момент времени 0.02Fo, вычисленное с помощью неконсервативной структуры решения (15) задачи [3] методом R-функций

## 6. Выводы

Геометрические двухмерные и трехмерные обратные задачи теплопроводности для нестационарных высокоскоростных процессов относятся к числу задач, для которых все еще остается много нерешенных проблемных вопросов. Решение обратных нестационарных по геометрии задач аналитической и дифференциальной геометрии в плане получения их непрерывно-дифференцируемых решений в аналитическом виде по координатам и временной переменной встречало принципиальные трудности математического характера.

Описание даже в стационарном случае поверхностей тел сложной формы с помощью R-функций, содержало в аналитических конструкциях решений модули от «опорных» функций, описывающих части поверхности тел. Это приводило к тому, что в итоге аналитическая конструкция решений задач имела разрывные а также неограниченные производные в угловых точках границы для двухмерных задач, и на ребрах для трехмерных задач.

В этих случаях в итерационных вычислительных процессах происходило лавинообразное нарастание погрешностей, что приводило в лучшем случае к неприемлемо большим погрешностям результатов решений, а в худшем случае – к развалу вычислительного процесса. Это иллюстрируется в статье на примере решения нестационарной высокоскоростной задачи теплопроводности с помощью неконсервативной структуры решения методом R-функций, которая точно удовлетворяет соответствующим стационарным граничным условиям третьего рода для каждого момента времени и при этом граничные условия продолжают входить внутрь области.

Лавинообразное накопление погрешностей в процессе решения нестационарной задачи теплопроводности для каждого момента времени методом R-функций приводит к тому, что уже для 20-го слоя во времени получают погрешности более тысячи

процентов. Решение этой же задачи с использованием S-функций дало возможность получить непрерывно-дифференцируемую аналитическую консервативную конструкцию решения, точно удовлетворяющую нестационарным граничным условиям. При этом погрешности решения для каждого момента времени не выходят за две десятые доли процента.

В статье впервые предложена методология аналитического описания переменных во времени границ или участков границ областей сложной формы, а также процессов движения фронта затвердевания металла в изложницах неканонической формы с учетом параметров скорости движения фронта затвердевания. Предложены новые подходы к решению ряда геометрических обратных задач теплопроводности по определению геометрических параметров участков границ области и параметров скорости изменения участков границы.

---

#### Литература

1. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности: в 2-х т. Т.2. Приложения [Текст]. / Ю.М. Мацевитый. – Киев: Наук. думка, 2002. – 391 с.
2. Шехтер Р.С. Вариационный метод в инженерных расчетах [Текст] / Р.С. Шехтер. – М.: Мир, 1971. – 289 с.
3. Слесаренко А.П. S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм [Текст] / А.П. Слесаренко // Вост.- Европ. журнал передовых технологий. – 2012. - №1/4 (55) – С. 4 – 10.
4. Слесаренко А.П. S-функции в обратных задачах аналитической геометрии и моделировании тепловых процессов [Текст] / А.П. Слесаренко // Вост. – Европ. журнал передовых технологий. – 2011. - №3/4(51). – С.41 – 46.
5. Костиков А.О. Идентификация и оптимизация геометрических параметров объектов энергетики и радиоэлектроники путем решения обратных задач теплопроводности [Текст]: Автореф. дис. ...кандидата техн. наук. – Харьков, 2011. – 34 с.
6. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа [Текст]. – М.; Л.: Физматгиз, 1962. – 695 с.
7. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения [Текст] / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка 1982. – 552 с.
8. Алифанов О.М., Румянцев С.В. Об устойчивости итерационных методов решения линейных некорректных задач [Текст] // Докл. АН СССР. – 1979. – 248, №6 – 1289 – 1291.
9. Слесаренко А.П. Идентификация нелинейной нестационарной зависимости мощности источника энергии от температуры на базе вариационно-структурного и проекционных методов [Текст] / А.П. Слесаренко, Н.А. Сафонов // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т.13, №6. – С.58-63.
10. Слесаренко А.П. Структурно-разностный подход к математическому моделированию высокоскоростных тепловых процессов с нестационарным теплообменом на поверхности конструктивных элементов [Текст] / А.П. Слесаренко, Ю.О. Кобринович // Проблемы машиностроения. – 2011. – Т14, №3. – С.66 – 75.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) [Текст] / Н.С. Бахвалов. – Наука, 1973 – С.37-39.