

Розглянуто застосування неявної схеми розщеплення високого порядку точності для чисельного моделювання течій невязкої нестисливої рідини. Наведено математичну постановку задачі. Проведено розрахунки низки тестових задач та виконано аналіз отриманих результатів

Ключові слова: нестислива рідина, неявна схема розщеплення

Рассмотрено применение неявной схемы расщепления высокого порядка точности для численного моделирования течений невязкой несжимаемой жидкости. Представлена математическая постановка задачи. Проведены расчёты ряда тестовых задач и выполнен анализ полученных результатов

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, неявная схема расщепления

This article represents implicit factored high-order finite volume scheme use for inviscid incompressible fluid flow simulation. The mathematical formulation of the problem is presented. Several representative problems have been solved and comparison showed good agreements

Key words: incompressible flow, implicit factored scheme

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. В. Русанов

Доктор технических наук, заместитель директора по научной работе*

Контактный тел.: (057)752-33-88

E-mail: rusanov@ipmach.kharkov.ua

Д. Ю. Косьянов

Исполняющий обязанности младшего научного сотрудника*

Контактный тел.: (057)349-47-95

E-mail: kosyanovdima@gmail.com

*Институт проблем машиностроения

им. А.М.Подгорного НАН Украины

ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046

1. Введение

В настоящее время решение практических задач повышения эффективности гидромашин различного назначения неразрывно связано с использованием методов вычислительной гидрогазодинамики (Computational Fluid Dynamics, CFD) [1, 2]. Постановка большого числа задач выполняется для областей сложной геометрической формы, дискретизацию которых удобно выполнять с помощью неструктурированных сеток с произвольной формой ячеек. Такие сетки допускают автоматизацию процесса построения и адаптации к решению, например, в областях с вихревыми структурами или большими градиентами физических полей [3].

В статьях [4, 5] авторами предложен способ построения кусочно-полиномиальной реконструкции неизвестных, на базе которого с применением метода контрольного объёма разработана явная схема высокого порядка точности для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках. Для ускорения сходимости к стационарным решениям в работе [6] выполнено обобщение неявной схемы [2] для случая неструктурированных сеток с произвольной формой ячеек, основанное на оригинальном способе расщепления по пространственным координатам и собственным значениям.

В данной работе обобщаются разработанные ранее подходы для численного интегрирования уравнений Эйлера на неструктурированных сетках при модели-

ровании невязких течений несжимаемой жидкости. При моделировании стационарных течений исходная система дифференциальных уравнений модифицирована с помощью метода искусственной сжимаемости [7, 8], а для нестационарных течений дополнительно используется концепция псевдовремени [9].

Апробация разностного метода выполнена при решении задачи моделирования обтекания потоком несжимаемой жидкости аэродинамического профиля NASA0012 при различных углах атаки, а также задачи о моделировании нестационарного течения жидкости в одномерном канале с пульсирующим давлением на выходе.

2. Численный метод интегрирования модельных уравнений гидрогазодинамики

Рассматривается численное решение системы двухмерных уравнений Эйлера, описывающих невязкое течение несжимаемой жидкости, представленных в консервативной (дивергентной) форме:

$$R_t \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0, (x,y) \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

$$Q = (P, u, v)^T, E = (u, P + u^2, uv)^T,$$

$$\text{где } F = (v, uv, P + v^2)^T, R_t = \text{diag}(0, 1, 1), P = \frac{P}{\rho}.$$

Здесь x, y, t – декартовы координаты и время; Ω – расчётная область; p, P, ρ, u, v – статическое давление, кинематическое давление, плотность и компоненты вектора скорости жидкости. Значения плотности и температуры жидкости принимаются постоянными. Обезразмеривание неизвестных выполняется следующим образом:

$$\bar{p} = \frac{P}{\rho_* a_*^2}, \bar{u} = \frac{u}{a_*}, \bar{v} = \frac{v}{a_*}, \bar{w} = \frac{w}{a_*}, \bar{t} = a_* t,$$

где a_* – характерная скорость потока. После обезразмеривания вид уравнений не меняется, поэтому для упрощения дальнейшего описания черта над безразмерными переменными опускается.

Прямое интегрирование по времени системы уравнений (1) маршевыми методами невозможно [10]. Наиболее широко для гиперболизации исходной системы дифференциальных уравнений используется метод искусственной сжимаемости Чорина [7, 8, 10], основанный на видоизменении уравнения неразрывности. Преобразованная с помощью метода искусственной сжимаемости система несжимаемых уравнений Эйлера отличается от (1) матрицей R_t , которая принимает вид $R_t = \text{diag}(\beta^{-1}, 1, 1)$. В этом случае решение ищется методом установления по времени, а коэффициент искусственной сжимаемости β рассматривается как параметр релаксации. В пределе при $t \rightarrow \infty$ получается стационарное решение, соответствующее физическому несжимаемому невязкому течению жидкости. Получаемое в промежуточные моменты времени неустановившееся численное решение лишено физического смысла [10]. Для краткости в дальнейшем изложении систему уравнений (1) будем ассоциировать также и с системой, в которой используется коэффициент искусственной сжимаемости β .

Существует несколько способов определения коэффициента искусственной сжимаемости. Обычно его значение предполагается постоянным, либо кусочно-постоянным внутри расчётной области. В настоящей работе для обеспечения высокой скорости сходимости и сохранения порядка собственных значений матриц Якоби выбирается постоянное значение коэффициента искусственной сжимаемости, определяемое из соотношения $\beta = \delta_1 c_{\text{хар}}^2 + \delta_0$, $\delta_1 = 5 \dots 10, 0 < \delta_0 < 1$. В качестве характерной скорости $c_{\text{хар}}$ выбрана максимальная скорость потока.

Для численного моделирования нестационарных невязких течений несжимаемой жидкости система уравнений (1) преобразуется с помощью метода искусственной сжимаемости и концепции псевдовремени, после чего она принимает следующий вид

$$R_\tau \frac{\partial Q}{\partial \tau} + R_t \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0, (x, y) \in \Omega, t > 0, \tau > 0, (2)$$

где $R_\tau = \text{diag}(\beta^{-1}, 1, 1)$, а $R_t = \text{diag}(0, 1, 1)$. При таком подходе решение исходной задачи в момент времени t получается методом установления по координате τ , т.е. $Q(x, y, t, \tau) \rightarrow Q(x, y, t)$, а система уравнений (2) в пределе при $\tau \rightarrow \infty$ совпадает с (1).

Система уравнений (2) решается с применением метода контрольного объёма для неструктурированной сетки G . В качестве контрольного объёма выбира-

ется ячейка сетки (“cell-centered” подход) [3 – 6]. После интегрирования по ячейке $P_i \in G, i = 1, N_G$, применения теоремы о среднем и теоремы Грина получается следующий полудискретный вид уравнений

$$R_\tau \frac{\partial \bar{Q}_i(t, \tau)}{\partial \tau} + R_t \frac{\partial \bar{Q}_i(t, \tau)}{\partial t} = \text{RSH}_i(Q), i = 1, N_G, t > 0, \tau > 0, (6)$$

$$\text{RSH}_i(Q) = -\frac{1}{S_i L_i} \int (E(Q) \cdot n_x + F(Q) \cdot n_y) dL,$$

$$\bar{Q}_i(t) = \frac{1}{S_i} \iint_{P_i} Q(x, y, t) dx dy,$$

где S_i – площадь ячейки; L_i – кусочно-линейная граница ячейки; N_G – количество ячеек сетки.

На временной оси задаётся сетка узлов вида $t_n = \Delta t \cdot n, \Delta t > 0, n \in N \cup \{0\}$, где Δt – шаг временной сетки, а n – номер временного слоя. Набор узлов для псевдовремени имеет вид $\tau_s = \Delta \tau \cdot s, \Delta \tau > 0, s \in N \cup \{0\}$, где $\Delta \tau$ и s – шаг псевдовременной сетки и номер псевдовременного слоя соответственно. В системе уравнений (3), записанной для моментов времени $t = t_{n+1}$ и $\tau = \tau_{s+1}$, выполняется аппроксимация временных и псевдовременных производных трёхслойными разностными выражениями

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial t} \right|_{\substack{t=t_{n+1} \\ \tau=\tau_{s+1}}} &\approx \frac{(1+\chi)(\bar{Q}_i^{n+1,s+1} - \bar{Q}_i^n) - \chi \delta \bar{Q}_i^n}{\Delta t}, \\ \left. \frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial \tau} \right|_{\substack{t=t_{n+1} \\ \tau=\tau_{s+1}}} &\approx \frac{(1+\chi_\tau) \Delta \bar{Q}_i^{n+1,s+1} - \chi_\tau \Delta \bar{Q}_i^{n+1,s}}{\Delta \tau}, \\ \bar{Q}_i^{n+1,s+1} &= \bar{Q}_i^{n+1,s+1} - \bar{Q}_i^{n+1,s}, i = 1, N_G, \end{aligned} (4)$$

а также линеаризация потоковых вектор-функций по индексу s псевдовремени

$$\begin{aligned} E(Q(x, y, t_{n+1}, \tau_{s+1})) &\approx E(Q(x, y, t_{n+1}, \tau_s)) + \vartheta \cdot A \Big|_{\substack{t=t_{n+1} \\ \tau=\tau_s}} \delta Q^{n+1,s+1}, \\ F(Q(x, y, t_{n+1}, \tau_{s+1})) &\approx F(Q(x, y, t_{n+1}, \tau_s)) + \vartheta \cdot B \Big|_{\substack{t=t_{n+1} \\ \tau=\tau_s}} \delta Q^{n+1,s+1}, \\ \delta Q^{n+1,s+1} &= Q(x, y, t_{n+1}, \tau_{s+1}) - Q(x, y, t_{n+1}, \tau_s) = Q^{n+1,s+1} - Q^{n+1,s}. \end{aligned} (5)$$

Система уравнений (4) примет вид

$$\delta \bar{Q}_i^{n+1,s+1} + \frac{\vartheta}{S_i} M^{-1} \int_{L_i} (A \cdot n_x + B \cdot n_y) \Big|_{\substack{t=t_{n+1} \\ \tau=\tau_s}} \delta Q^{n+1,s+1} dL = R_i(Q), (6)$$

$$M \cdot R_i(Q) = R_\tau \frac{-(1+\chi)(\bar{Q}_i^{n+1,s} - \bar{Q}_i^n) + \chi \delta \bar{Q}_i^n}{\Delta t} +$$

$$+ R_\tau \frac{\chi_\tau \delta \bar{Q}_i^{n+1,s}}{\Delta \tau} - \text{RSH}_i(Q^{n+1,s})$$

$$M = \frac{1+\chi_\tau}{\Delta \tau} R_\tau + \frac{1+\chi}{\Delta t} R_t.$$

Правая часть уравнения (6) содержит уже известные значения сеточной функции и, следовательно,

определяет явный оператор. Левая часть зависит от приращений $\delta Q^{n+1,s+1}$, которые необходимо определить для расчёта средних значений на текущем временном слое, и, следовательно, определяет неявный оператор. Используемые выше χ, χ_τ и ϑ являются коэффициентами неявной схемы. При $\vartheta=0$ схема является явной по псевдовремени. В работе применяется трёхслойная неявная схема по времени с коэффициентами $\chi=0.5, \vartheta=1$ [6, 11] и двухслойная по псевдовремени с $\chi_\tau=0$ [9].

При дискретизации явного оператора с высоким порядком точности применяется предложенный авторами способ построения кусочно-полиномиальной реконструкции вектора неизвестных [4]. Подробное описание неявной схемы расщепления для системы (6) в случае $M = \text{diag}(1, 1, 1)$ представлено в [6, 14]. Для обеспечения разностей против потока используется упрощённый аналог задачи распада произвольного разрыва, в котором значения в области разрыва находятся из соотношений на характеристиках $L_n^{-1}dQ=0$, где L_n^{-1} – матрица из спектрального разложения.

Для определения вектора неизвестных на границах расчётной области выполняется постановка граничных условий и привлечение дополнительных соотношений. Так, на границе «входа» обычно задаются либо полное давление и направление вектора скорости, либо распределение вектора скорости, а также используется соотношение на «приходящей» характеристике. На границе «выхода» задаётся распределение статического давления и также используется соотношение на «приходящей» характеристике. Для задания граничных условий на «стенке» для уравнений Эйлера применяется условие непротекания $u \cdot n_x + v \cdot n_y = 0$, где $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$ – единичный вектор внешней нормали к стенке.

3. Численные результаты

3.1. Обтекание профиля NASA0012. Для оценки точности разработанного метода выполнено численное моделирование стационарного обтекания аэродинамического профиля NASA0012 потоком несжимаемой жидкости.

На рис. 1 представлен вид расчётной сетки возле профиля.

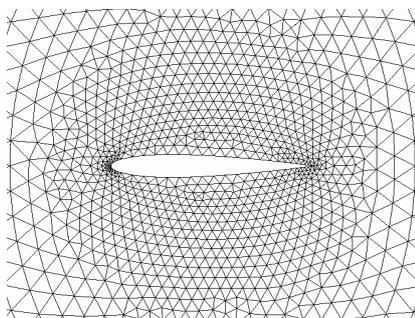


Рис. 1. Вид расчётной области

Внешняя граница расчётной области удалена на расстояние, равное 6-ти длинам хорды. Дискретизация расчётной области выполнена с по-

мощью “грубой” (сетка 1) и “подробной” (сетка 2) неструктурированных сеток, состоящих из 4324 и 9550 треугольных ячеек соответственно. При использовании грубой сетки верхняя и нижняя стороны профиля разбиты на 30 интервалов (каждая сторона) со сгущением к входной и выходной кромке профиля, а при использовании подробной сетки – на 60 интервалов.

В качестве граничных условий на участках втекания жидкости задавались компоненты вектора скорости набегающего потока $u = C_\infty \cos(\alpha), v = C_\infty \sin(\alpha)$, где α – угол потока на входе (отсчитывается от оси симметрии профиля против часовой стрелки), а C_∞ – абсолютная скорость набегающего потока, а на участках вытекания жидкости распределение статического давления $p = p_\infty$. Начальное распределение вектора неизвестных соответствовало состоянию покоящейся жидкости.

Рассмотрены два режима обтекания NASA0012 потоком невязкой несжимаемой жидкости:

- Task 1: нулевой угол атаки набегающего потока $\alpha = 0^\circ, C_\infty = 1$;
- Task 2: положительный угол атаки набегающего потока $\alpha = 5^\circ, C_\infty = 1$.

Все расчёты выполнены с помощью неявной схемы с различным порядком точности явного оператора (т.е. при разных значениях степени полинома реконструкции k). Значение постоянного во всей расчётной области шага интегрирования получено при числе Куранта $\nu = 5.0$.

На рис. 2 представлены графики распределения коэффициента давления C_p по поверхности профиля. Результаты, отмеченные прозрачными и закрашенными маркерами, получены на сетке 1 и сетке 2 соответственно. Соответствие типа маркера степени полинома реконструкции приведено в описании к графику. Кривая с меньшими значениями коэффициента на рис. 2, б) соответствует нижней поверхности профиля. На рис. 3 представлены изолинии коэффициента давления, полученные на сетке 2 при интегрировании с кубической реконструкцией.

Из графиков распределения коэффициента давления (особенно из увеличенного фрагмента на рис. 2, б)) следует, что при повышении степени полинома реконструкции происходит уточнение численного решения. Наибольшее различие результатов при $k = 3$ получено между сетками 1 и 2 в случае положительного угла атаки.

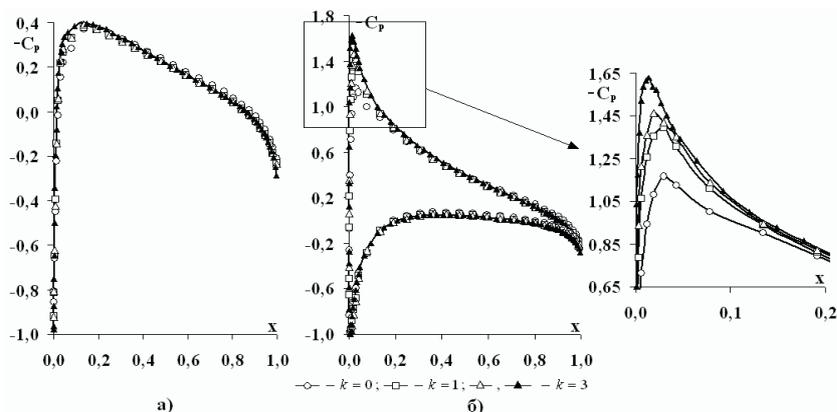


Рис. 2. Распределение коэффициента давления на поверхности профиля: а) Task 1; б) Task 2

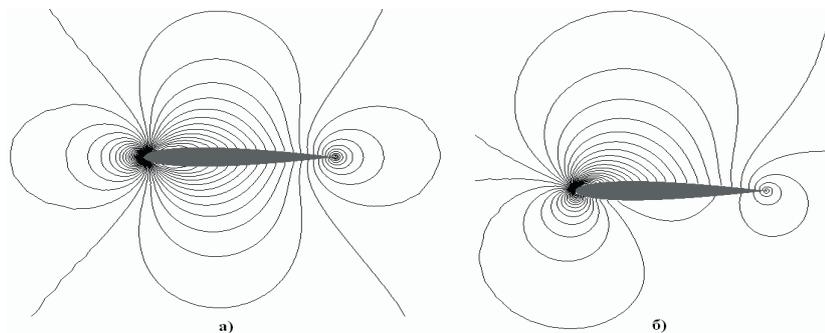


Рис. 3. Изолинии коэффициента давления возле профиля: а) Task 1; б) Task 2

Для рассмотренных задач наиболее существенное улучшение результата наблюдается при переходе с кусочно-постоянной $k=0$ к кусочно-линейной $k=1$ реконструкции. Уточнение решения в большей степени проявляется в области входной кромки профиля. В случае нулевого угла атаки наблюдается менее существенное уточнение решения при увеличении степени полинома реконструкции. В целом полученные результаты хорошо согласуются с данными, приведенными в работах [8, 12].

3.2. Моделирование нестационарного течения жидкости в канале. Рассмотрена задача моделирования нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в одномерном канале с периодически изменяющимся давлением жидкости на выходе. Данная задача рассматривалась в работах S.E. Rogers и D. Kwak [13], C.L. Merkle и M. Athavale [14] при проверке адекватности получаемых с помощью метода псевдовремени соленоидального поля вектора скорости и распределения статического давления.

В начальный момент времени $t=0$ в канале длиной L задано стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости с $P(x,t)=P_0=const$ и $u(x,t)=u_0=const$. Для моментов времени $t>0$ в распределение статического давления на выходе из канала (при $x=L$) добавляется нестационарное периодическое возмущение $P(L,t)=P_0+P_e \sin(\omega t)$, где P_e – давление возмущения, ω – частота колебаний. Возмущение потока осуществляется непрерывно.

Из уравнения неразрывности для одномерного несжимаемого течения следует, что распределение скорости возмущенного потока является функцией только времени, т.е. $u(x,t)=u_0+c(t)$, где $c(t)$ – скорость возмущения. Ищется такое решение задачи, для которого полные удельные энергии возмущенного потока $H(x,t)=\frac{P(x,t)}{g} + \frac{u^2(x,t)}{2g}$ и среднего течения H_0 мало отличаются на входе в канал (при $x=0$).

Аналитическое решение задачи можно получить в случае, когда давление возмущения P_e является величиной малой по сравнению со значением давления среднего потока P_0 . Его вид определяется соотношениями

$$u(x,t) = u_0 - \frac{P_e}{u_0(1+\Omega^2)} \left(\sin(\omega t) - \Omega \cos(\omega t) + \Omega e^{-\frac{u_0 t}{L}} \right),$$

$$P(x,t) = P_0 + P_e \sin(\omega t) + (x-L) \frac{P_e \omega}{u_0(1+\Omega^2)} \left(\cos(\omega t) + \Omega \sin(\omega t) - e^{-\frac{u_0 t}{L}} \right),$$

где $\Omega = L\omega/u_0$ – изменённая частота колебаний.

В работе приняты следующие значения параметров решаемой задачи: $L=1$, $P_0=u_0=1$, $P_e=0.1P_0$, $\omega=10$. Численное интегрирование выполнено в двумерной области $\Omega=(0,1) \times (-0.01, 0.01)$, представляющей тонкий канал заданной длины. Для моделирования одномерного потока на границах $y=\pm 0.01$ задаются условия периодичности. Фрагмент дискретизации расчётной области представлен на рис. 4. Линейный размер сетки вдоль оси x равен 0.05.



Рис. 4. Вид расчётной сетки в канале

Все расчёты выполнены со значением коэффициента искусственной сжимаемости $\beta=100$. Шаг сетки по времени выбран таким образом, чтобы на один период колебаний давления выхода приходилось 30 шагов интегрирования по времени, т.е. $\Delta t = \pi/150$. Интегрирование с помощью явной схемы по псевдовремени выполняется при $\Delta \tau = 0.5\Delta t$, а с помощью неявной – при $\Delta \tau = 10\Delta t$. Дискретизация явного оператора выполнена с помощью кусочно-квадратичной реконструкции, что соответствует второму порядку точности по пространству.

На рис. 5 и 6 представлены распределения скорости в канале и давления на входе в канал в различные моменты времени.

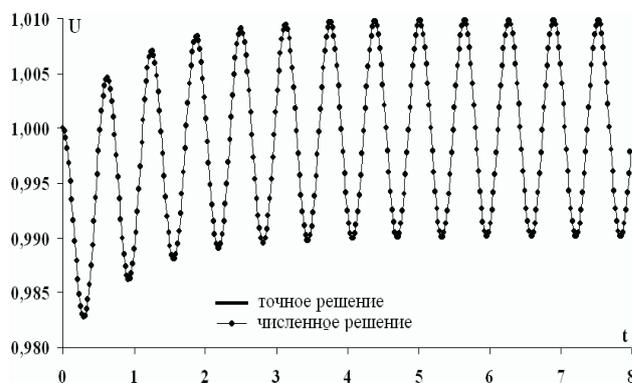


Рис. 5. Распределение скорости в различные моменты времени

На рис. 7 представлен график сходимости по псевдовремени при получении численного решения в момент времени $t=8$. В каждый момент времени подитерации по псевдовремени выполнялись, пока максимальное значение модуля дивергенции вектора скорости по всем ячейкам ϵ станет меньше 10^{-8} . Стоит отметить, что для снижения погрешности на 3-4 порядка требуется 20-30 подитераций, что характерно для схем с факторизацией и расщеплением [10, 14].

Из представленных результатов видно, что переходное состояние распределений скорости и давления, вызванное появлением периодических пульсаций на

выходе, исчезает приблизительно после времени $t = 4$, что составляет около 6-ти периодов пульсаций давления выхода. После этого момента распределения давления и скорости изменяются периодически по синусоидальному закону. В целом, численные результаты и точное решение хорошо согласуются. Также наблюдается повышение скорости сходимости по псевдовремени к течению с соленоидальным полем вектора скорости при использовании неявной схемы.

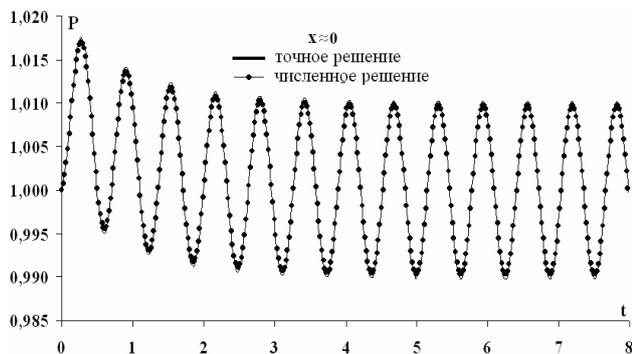


Рис. 6. Распределение давления в различные моменты времени

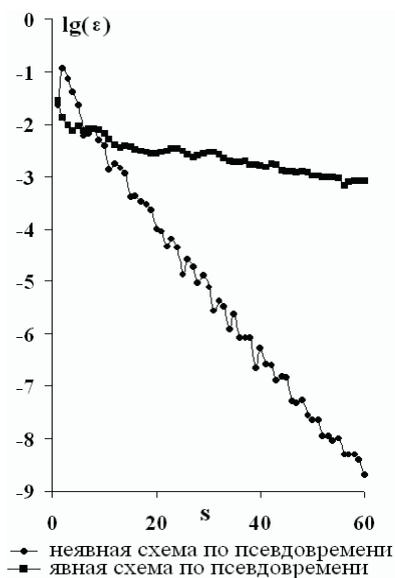


Рис. 7. История сходимости по псевдовремени при $t = 8$

4. Выводы

Рассмотрено применение неявной схемы расщепления высокого порядка точности для численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости. Представлена математическая постановка задачи. Апробация разностного метода выполнена при решении задачи моделирования обтекания потоком несжимаемой жидкости аэродинамического профиля NASA0012 при различных углах атаки, а также задачи о моделировании нестационарного течения жидкости в одномерном канале с пульсирующим давлением на выходе. Полученные результаты хорошо согласуются с точным решением и с результатами, приведенными в других работах.

Литература

1. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене. – Киев, Наукова думка, 2003. – 379 с.
2. Русанов А.В. Математическое моделирование нестационарных газодинамических процессов в проточных частях турбомашин / А.В. Русанов, С.В. Ершов [Монография]. – Харьков: Ин-т пробл. машиностроен. НАН Украины, 2008. – 275 с.
3. Venkatakrishnan V. A perspective on unstructured grid flow solvers / V. Venkatakrishnan // AIAA, Aerospace Sci. Meeting № 33 – 1996. – v. 34. – P. 533–547.
4. Русанов А.В. Явная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках / А.В. Русанов, Д.Ю. Косьянов // Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина. Серия МИА, Харьков. – 2010. – № 926. – С. 123–138.
5. Русанов А.В. Численное моделирование нестационарных решений уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках / А.В. Русанов, Д.Ю. Косьянов // Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина. Серия МИА, Харьков. – 2011. – № 987. – С. 34–45.
6. Русанов А.В. Неявная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках / А.В. Русанов, Д.Ю. Косьянов // Пробл. машиностроения. – 2010. – № 3. – С. 30–37.
7. Cherny S. An Efficient LU – TVD finite volume method for 3D inviscid and viscous incompressible flow problem / S. Cherny, Y. Gryazin, S. Sharov, P. Shashkin // Proceedings of the Third ECCOMAS CFD conference, Paris, France, 1996. – pp. 90–96.
8. Русанов А.В. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием неявной квазимонотонной схемы Годунова повышенной точности / А.В. Русанов, Д.Ю. Косьянов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – №5. – С. 4–7.
9. Чёрный С.Г. Численное моделирование течений в турбомашинах / С.Г. Чёрный, Д.В. Чирков, В.Н. Лапин [и др.]. – Новосибирск: Наука, 2006. – 202 с.
10. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах. – М.: Мир, 1991. – 504 с.
11. Русанов А. В. Использование неявной схемы расщепления для численного моделирования трансзвуковых течений идеального газа / А. В. Русанов, Д. Ю. Косьянов, А. И. Косьянова // Вестник двигателестроения: научн.-техн. журнал. – Харьков, 2011. – № 2. – С. 20–24.
12. Honzatko R. Numerical solution of inviscid incompressible flow over a vibrating profile / R. Honzatko, J. Horaček, K. Kozel // Proceeding of the Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics, 2005. – pp. 26–32.
13. Rogers S.E. Upwind Differencing Scheme for the Time-Accurate Incompressible Navier-Stokes Equations / S.E. Rogers, D. Kwak // AIAA Journal. – 1990. – vol. 28, № 2. – P. 253–262.
14. Merkle C.L. Time-Accurate Unsteady Incompressible Flow Algorithms based on artificial compressibility / C.L. Merkle, M. Athavale // AIAA Paper 87-1137. – 1987. – P. 397–407.