УДК 517.955;636.5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОГО НАГРЕВА МНОГОСЛОЙНОГО МИКРОБИОЛОГИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Ю.Е. Мегель
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой*
Контактный тел.: (057) 716-42-63
E-mail: megel_ye@mail.ru

Д.А. Левкин
Аспирант*
Контактный тел.: (057) 716-42-63
E-mail: artur.lav@3g.ua
*Кафедра кибернетики
Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им.П.Василенко
ул. Артема, 44, г. Харьков, Украина, 61000

У статті розглянута математична модель рівняння теплопровідності для багатошарового мікробіологічного об'єкту та доведена коректність Задачі Коші для даного рівняння теплопровідності за допомогою теорії псевдодиференціальних операторів

Ключові слова: рівняння теплопровідності, багатошаровий мікробіологічний об'єкт, Задача Коші, псевдодиференціальний оператор

В статье рассмотрена математическая модель уравнения теплопроводности для многослойного микробиологического объекта и доказана корректность Задачи Коши для данного уравнения теплопроводности с помощью теории псевдодифференциальных операторов

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, многослойный микробиологический объект, Задача Коши, псевдодифференциальный оператор

In this article a mathematical model of heat conduction equation is considered for multilayer microbiological object and the correctness of the Cauchy`s problem is proved for the heat equation using the theory of pseudodifferential operators

Keywords: the heat equation, multilayer microbiological object, Cauchy problem, pseudodifferential operator

Введение

При взаимодействии лазерного излучения с эмбрионом происходит неоднородный нагрев биообъекта. Распределение тепла зависит от таких параметров, как энергия излучения, время экспозиции, коэффициент теплопроводности и теплоемкость. В случае использования лазерного хетчинга [1,2] при температуре +60°С и выше проявляется процесс коагуляции оболочки в месте приложения сфокусированного лазерного луча, что приводит к образованию углубления или сквозного канала через зону пеллюцида внутрь эмбриона. Поскольку структура эмбриона неоднородна и состоит из ряда слоев, распределение тепла будет неравномерным, что приводит к различному числу травмированных клеток бластомера внутри оболочки.

Постановка задачи

Для построения математической модели теплового взаимодействия при сохранении жизнеспособности эмбриона, важным параметром является оценка локального нагрева среды внутри объекта. Одним из важных вопросов с учетом размера клеток необходимо учесть распространение теплового нагрева при многослойной структуре эмбриона.

Существующие модели рассматривают эмбрион как однородную среду, состоящую в основном из воды [3]. При этом тепловое воздействие не предполагает различные типы взаимодействия со средой, где важным параметром является как локальное увеличение температуры, вызванное непрерывным или импульсным лазерным излучением, так и зависимость от времени воздействия и максимально достигаемой величины температуры клеток.

Для задания граничных условий в уравнении теплопроводности, возможно, воспользоваться задачей Коши. Задача Коши является классической задачей для уравнений в частных производных, однако границы ее применимости в каждом конкретном случае необходимо оценить.

На современном состоянии общей теории задачи Коши существенно отразились теория обобщённых функций, теория псевдодифференциальных операторов (ПДО), которая позволяет в рамках общей теории для случая постоянных коэффициентов естественно перейти к свёрточным уравнениям.

В теории дифференциальных уравнений наряду с построением дифференциального уравнения и задачи Коши к нему, важнейшим этапом является доказательство существования и единственности решения задачи Коши. В этом случае применяется традиционная теория ∃! решения задачи Коши.

Для доказательства теорем теории ∃! решения задачи Коши для дифференциального уравнения воспользуемся результатами, полученными Коши-Буняковским, Минковским, Гронуолл-Беллманом [4]. Исходя из теории о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения применим подход Шварца, в изложении И.Г.Петровского на языке возникшей теории распределений. Здесь показано, что однородное условие корректности [5] является необходимым и достаточным условием корректности задачи Коши в классе медленно растущих распределений, гладко зависящих от времени [6].

Применяя подход Шварца целесообразно использовать теорию псевдодифференциальных операторов (ПДО), которая позволяет в рамках общей теории для случая постоянных коэффициентов естественно перейти к свёрточным уравнениям [6,7].

В работе для доказательства корректности задачи Коши применим метод, основанный на теории ПДО. В этом случае однородное условие корректности по Петровскому для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами становится более эффективным, что позволяет перейти в алгебраическое условие на детерминант символа системы дифференциальных уравнений. Согласно [5] это приводит к однозначному решению задачи Коши в классе функций вместе с производными до конечного (фиксированного) порядка и непрерывной зависимости решений в соответствующей топологии от начальных условий и правых частей.

Основная часть

Краевая задача нестационарной теплопроводности для кусочно-однородной по теплопроводности области сводится к интегрированию следующего параболического уравнения второго порядка

$$\delta(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\Delta T(x,y,z,t)+P(x,y,z,t), \qquad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа,

T- температура,

t- время,

x,y,z – пространственные координаты,

P – функция, характеризующая распределение источника энергии лазерного воздействия и представляемая в виде:

$$P(x,y,z,t) = \begin{cases} P(x,y,z,t) - \text{если } (x,y,z)\in L, \quad t\in[0,\tau] \\ 0 - \text{в противном случае} \end{cases},$$

L – область действия лазерного источник,

τ - продолжительность действия импульсного источника.

Коэффициент теплопроводности λ для кусочно-однородной области имеет вид:

$$\lambda(x,y,z) = \begin{cases} \lambda_1, \text{если } (x,y,z)\in\Omega_1 - \text{область бластомеров} \\ \lambda_2, \text{если } (x,y,z)\in\Omega_2 - \text{область перивителлированного пространства} \\ \lambda_3, \text{если } (x,y,z)\in\Omega_3 - \text{оболочка эмбриона} \\ \lambda_4, \text{если } (x,y,z)\in\Omega_4 - \text{питательная среда} \end{cases}$$

Искомое распределение температуры T(x,y,z) из уравнения (1) должно удовлетворять начальному условию, $T(x,y,z,t)|_{t=0} = T(x,y,z)$, а также граничным условиям:

по внешней поверхности Γ_{01} канюли (условие теплообмена с окружающей средой).

$$\left[\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial v_{01}}+h_{01}(x,y,z)T(x,y,z,t)\right]\Big|_{(x,y,z)\in\Gamma_{01}} = T_{01}(t),$$

где v_{01} - направление нормали к Γ_{01},

h_{01} – коэффициент теплообмена;

условию на поверхностях раздела сред (равенству тепловых потоков и температур) например,

$$\lambda_3\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial v_3} = \lambda_4\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial v_3},$$

где λ_3 - коэффициент теплопроводности внешней оболочки эмбриона,

λ_4 - коэффициент теплопроводности питательной среды.

Аналогично формулируются условия на границах других сред.

Коэффициенты теплопроводности сред не отличаются значительно, поэтому эмбрион можно принять как однородное тело с коэффициентом теплопроводности $\lambda = \max\lambda_i$, $i = 1,..,4$.

Эмбрион помещён в канюлю с питательной средой, которая поддерживается при температуре $37\ {}^0C$. Можем исключить питательную среду с температурой $37\ {}^0C$ и заменить её на соответствующие условия на внешней границе эмбриона.

Построим математическую модель для уравнения теплопроводности (1) и зададим краевые условия.

Наиболее нагретой будет оболочка эмбриона (зона пеллюцида). Нестационарное температурное поле шарообразного однородного по теплопроводности тела радиуса R, содержащего в центре дискретный импульсный источник с радиусом r_0 описывается в сферической системе координат уравнением [4, 8]:

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right) = \frac{q(r,t)}{\rho c}, \qquad (2)$$

где T – избыточная температура,

t – время,

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$ - коэффициент температуропроводности,

λ - коэффициент теплопроводности, r - расстояния от центра источника лазерного воздействия до точки, в которой рассчитывается температурное поле,

p,c - плотность и удельная теплоёмкость соответственно.

$q(r,t)$ - плотность источника лазерного воздействия

$$q(r,t) = \begin{cases} q_0, \text{если } r\in[0,r_0], \quad t\in[0,h] \\ 0, \quad \text{в противном случае} \end{cases},$$

h - время воздействия источника

и предположим:

$$\begin{cases} T(r,t)\Big|_{t=t_0} = 0 \\ T(r,t)\Big|_{r=R} = 0 \end{cases}$$

без учёта температуры питательной среды (37^0C).

Рассмотрим дифференциальное уравнение из краевой задачи (2):

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right) = \frac{q(r,t)}{pc}$$

с символом

$$P(\tau,\eta) = i\tau + a\eta^2 - 2ai - \frac{\tilde{q}(\tau,\eta)}{pc}, \qquad (3)$$

где $\tilde{q}(\tau,\eta)$ - преобразование Фурье функции $q(r,t)$

Для дальнейших рассуждений при применении подхода Шварца введем ряд определений [6, 9]:

Полином $P(\tau,\eta)$ является экспоненциально-корректным, если

$\forall\, \nu>0, \quad \exists\, p(\nu)$, так что

$P(\tau,\eta+i\omega)\neq 0, \operatorname{Im}\tau \le p(\nu), |\omega_j| \le \nu, j=1,...,n-1$.

Так в символе оператора

$$P(\tau,\eta) = i\tau + a\eta^2 - 2ai - \frac{\tilde{q}(\tau,\eta)}{pc}$$

$$\tau_1 = \operatorname{Im}\tau = a((\operatorname{Re}\tau)^2 - \omega^2) - \frac{\tilde{q}(\tau,\eta)}{pc}, \qquad (4)$$

при $|\operatorname{Im}\tau|\langle 0$, $P(\tau,\eta)$ полином является экспоненциально-корректным. Заметим, что должны выполняется следующее предложение: Для полинома $P(\tau,\eta)$ следующие условия эквивалентны:

1. $P(\tau,\eta)$ является экспоненциально-корректным;

2. Все сдвиги $P_{\varpi}(\tau,\eta) = P(\tau,\eta+i\varpi)$ удовлетворяют однородному условию корректности по Петровскому.

Символ $P(x,\tau,\eta)$ удовлетворяет условию постоянства силы:

$\exists\, A>0, \quad \gamma_0$ такие что

$|P(x';\tau,\eta)P^{-1}(x'';\tau,\eta)| < A, \quad (\operatorname{Re}\tau,\eta)\in R^n, \quad \operatorname{Im}\tau\le\gamma_0$,

$\forall\, x', \quad x''\in R^n$.

В нашем случае полином $P(\tau,\eta)$ не зависит от x, а значит $P(\tau,\eta) = i\tau + a\eta^2 - 2ai - \frac{\tilde{q}(\tau,\eta)}{pc}$ удовлетворяет условию постоянства силы т.е.,

$$\left|\frac{P(\tau,\eta)}{P(\tau,\eta)}\right| = \left|\frac{\left(i\tau + a\eta^2 - 2ai - \frac{\tilde{q}(\tau,\eta)}{pc}\right)}{i\tau + a\eta^2 - 2ai - \frac{\tilde{q}(\tau,\eta)}{pc}}\right| < 1 \qquad (5)$$

Заметим так же, что $P(\tau,\eta)\in S_p^m$

$P(\tau,\eta)\in S_p^m \Leftrightarrow |\partial_\eta^\alpha \partial_\tau^\beta P(\tau,\eta)| \le C_{\alpha\beta}(1+|\eta|)^{m-|\alpha|}(1+|\tau|)^p$,

$\{\tau,\eta\}\in R^n, \forall \alpha,\beta$,

если $\forall\alpha,\beta \quad \left|\frac{\partial_\eta^\alpha \partial_\tau^\beta \tilde{q}(\tau,\eta)}{pc}\right| \le C_{\alpha\beta}(1+|\eta|)^{m-|\alpha|}(1+|\tau|)^p$

тогда $P(\tau,\eta)\in S_p^m$.

Исходя из вышесказанного, справедливы следующие теорема и следствие [5, 7].

Если $p(x,\eta)\in S_{p_1}^{m_1}, \quad q(x,\eta)\in S_{p_2}^{m_2}$.

Тогда:

$$\forall N\ge 0, \exists N_1\ge N: p(x,D)q(x,D) = \sum_{|\alpha|\le N_1} r_\alpha(x,D) + T_{N_1}(x,D),$$

$$r_\alpha(x,\eta) = \frac{1}{\alpha!} p_{(\eta)}^{(\alpha)}(x,\eta) q_{(x)}^{(\alpha)}(x,\eta) + T_{N_1}(x,\eta), T_{N_1}(x,\eta)\in S_{p_1+p_2}^{-N}$$

Следовательно, символ композиции ПДО имеет следующий вид

$$p(x,\eta)\circ q(x,\eta)\in S_{p_1+p_2}^{m_1+m_2}$$

Для доказательства корректности ($\exists!$ решения) задачи Коши в случае неоднородного псевдодифференциального уравнения

$P_0(x,D)u(x) + P_1(x,D)u(x) = f(x)$ с нулевыми начальными условиями введём следующие определения:

Пусть $P_0(x,\eta)$ - экспоненциально-корректный полином постоянной силы.

Псевдодифференциальный оператор $P_1(x,D)$ с символом (3), удовлетворяющим оценке

$$|D_\eta^\alpha D_x^\beta P_1(x,\eta)| \le C_{\alpha\beta}(1+|\eta|)^m$$

является подчинённым дифференциальному оператору $P_0(x,D)$, если выполняются условия:

$$\forall\alpha,\beta \quad (D_\eta^\alpha D_x^\beta P_1(x,\eta))/P_0(x,\eta)\to 0$$

при $\operatorname{Im}\tau\to-\infty$ равномерно по переменным $x=(t,y), (\operatorname{Re}\tau,\eta)\in R^{n-1}$.

Так псевдодифференциальный оператор

$$P_1(x,D)T = T(x+h,t)\sin x$$

является подчинённым оператору

$$P_0(x,D)T = \frac{\partial T}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{\tilde{q}(r,t)}{pc}.$$

Действительно,

$$\frac{P_1(x,\eta)}{P_0(x,\eta)} = \frac{e^{ih\eta}\sin x}{i\tau + a\eta^2 - 2ai - \dfrac{\tilde{q}(\tau,\eta)}{pc}} \to 0$$

равномерно при $\operatorname{Im}\tau \to -\infty$.

Аналогично

$$\forall\alpha,\beta \quad \left(D_\eta^\alpha D_x^\beta P_1(x,\eta)\right)/P_0(x,\eta) \to 0$$

при $\operatorname{Im}\tau \to -\infty$ равномерно по переменным $x = (t,y)$, $(\operatorname{Re}\tau,\eta) \in R^{n-1}$.

Полученные результаты означают, что задача Коши для неоднородного псевдодифференциального уравнения $P_0(x,D)u(x) + P_1(x,D)u(x) = f(x)$ с нулевыми начальными условиями является корректной в пространстве $S[a,b]$ или в соответствующей шкале пространств Соболева-Слободецкого $H_{(e)}^{(s)}[a,b)$.

Рассмотрим пространства

$$H_{(e)}^{(s)}(R^n) = \{f \in S'(R^n) : \|f\| = \\ = \|(1+|D|^2)^{s/2}(1+|x|^2)^{e/2} f\|_{L_2}, D = -i\frac{\partial}{\partial x}\}.$$

Отправляясь от пространств $H_{(e)}^{(s)}(R^n)$ положим для $a < b$

$$H_{(e)}^{(s)}[a,b) = H_{(e)}^{(s)}[a,\infty)/H_{(e)}^{(s)}[b,\infty),$$

$$S[a,b) = S[a,\infty)/S[b,\infty).$$

Отметим, что $S[a,b) = \bigcap_{s,e\in\mathbb{N}} H_{(e)}^{(s)}[a,b)$.

Получим следующий результат. Пусть $P_0(x,\tau,\eta)$ - экспоненциально-корректный полином постоянной силы, а $P_1(x,\tau,\eta)$ - голоморфный по τ при $\operatorname{Im}\tau \le \gamma_0$, подчинённый символ псевдодифференциального оператора.

Тогда задача Коши для уравнения

$$P_0(x,D_t,D_x)u(x,t) + P_1(x,D_t,D_x)u(x,t) = f(x,t)$$

и начального условия

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

корректна в пространстве $S[a,b)$.

Вывод

В статье рассматривается математическая модель уравнения теплопроводности для многослойного микробиологического объекта.

Исходя из традиционной теории о существовании и единственности решения задачи Коши для произвольного дифференциального уравнения, применим подход Шварца. Для доказательства корректности задачи Коши применен метод, основанный на теории ПДО. Использование данного подхода, основанного на теории псевдодифференциальных операторов, позволяет применить результаты Петровского к уравнению теплопроводности, а также заключить, что однородное условие корректности по Петровскому является необходимым и достаточным условием корректности данной задачи в классе медленно растущих распределений, гладко зависящих от времени.

Литература

1. Antinori S., Zona thinning with the use of laser: a new approach to assisted hatching in human // Hum R., -1995. -3.P. 101-105
2. Antinori S., Experience with the UV non contact laser in a assisted hatching in human // J of Assist Reprod and Genet., -1997. 14:5: Abstract.
3. Obruca A., Use of lasers in assisted fertilization and hatching. // Hum R., -1994. -9. P. 1723-1726.
4. Понтрякин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Понтрякин Л. С. - М. : Мир, 1985. - 127 с.
5. Тейлор М., Псевдодифференциальные операторы [Текст] / Тейлор М. - М. : Мир, 1967. - 472 с.
6. Волевич Л. Г., Обобщенные функции и уравнения в свертках [Текст] / Л. Г. Волевич, С. Г. Гиндикин - М. : Наука, 1994. - С. 43-85.
7. Кон Д., Алгебра псевдодифференциальных операторов: [сб. ПДО] / Д. Кон, Л. Ниренберг - М. : Наука, 1967. - С. 43-85.
8. Хермандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными [Текст] / Хермандер Л. - М. : Мир, 1987. - С. 157-211.
9. Макаров А. А. Задача Коши для экспоненциально-корректных псевдодифференциальных операторов / А. А. Макаров, Д. А. Левкин // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна № 990. – Харків, 2012. - С. 42-47. - (Серія: Математика, прикладна математика і механіка ; вип. 64).