

УДК 519.6

# МЕТОД СОВМЕСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**В. Л. Бучарский**

Кандидат технических наук, доцент

Кафедра двигателестроения

Днепропетровский национальный университет им.

О.Гончара

пр. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, Украина, 49000

E-mail: bucharsky@mail.ru

*Метод сумісної апроксимації для побудування різницевих схем підвищеного порядку точності узагальнено на випадок багатовимірних квазілінійних гіперболічних рівнянь. Наведено результати побудування різницевих схем до сьомого порядку точності за часовою та просторовою координатам для двовимірного рівняння переносу та двовимірного рівняння Бюргерса. Результати тестових розрахунків підтверджують теоретичні висновки*

*Ключові слова: метод сумісної апроксимації, кінцево-різницеві схеми, високий порядок точності*

*Метод совместной аппроксимации для построения разностных схем повышенного порядка точности обобщен на случай многомерных квазилинейных гиперболических уравнений. Приведены результаты построения разностных схем вплоть до седьмого порядка точности по времени и пространству для двумерного уравнения переноса и двумерного уравнения Бюргерса. Результаты тестовых расчетов подтверждают теоретические выводы*

*Ключевые слова: метод совместной аппроксимации, конечно-разностные схемы, высокий порядок точности*

## 1. Введение

Проектирование сложных технических устройств в настоящее время невозможно без использования математического моделирования. Очевидно, погрешность получаемых при этом результатов определяется как совокупность погрешностей элементов цепочки «физическая модель ↔ математическая модель ↔ вычислительный метод». Поэтому задача разработки численных методов, порождающих малую погрешность (методов высокого порядка точности), является актуальной.

## 2. Анализ исследований и публикаций

В настоящее время в теории численных методов для решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) превалирует идея повышения порядка аппроксимации за счет раздельного повышения порядка малости составляющих невязки, возникающих при аппроксимации производных по различным независимым переменным [1-3]. Это приводит к расширению шаблона конечно-разностной схемы (КРС). Автором был предложен метод построения компактных разностных схем повышенного порядка точности – метод совместной аппроксимации (МСА) [4-6]. В основе этого метода лежит идея повышения порядка аппроксимации за счет совместного повышения порядка малости составляющих невязки, возникающих при аппроксимации исходного ДУЧП.

Ранее все результаты, полученные с помощью МСА, относились только к одномерным квазилинейным ДУЧП.

## 3. Цель работы

Цель настоящей работы состоит в обобщении подхода на основе МСА, предложенного в [6] для построения КРС наперед заданного порядка точности по пространству и времени для решения квазилинейных гиперболических ДУЧП, на случай нескольких пространственных переменных.

## 4. Методика построения КРС МСА в многомерном случае

В дальнейшем будем пользоваться для сокращения записи правилами тензорной алгебры [7]. Кроме того, поскольку все рассуждения проводятся для ортонормированной системы координат, не будем различать ковариантные и контравариантные объекты.

Рассмотрим в качестве исходного следующее многомерное квазилинейное ДУЧП, записанное в консервативной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial q_k(f)}{\partial x_k} = 0. \tag{1}$$

Здесь  $f = f(t, x_k)$  - искомая функция независимых переменных  $t, x_k$ ,  $q_k(f) = q_k$  - составляющие потока величин

ны  $f$  вдоль различных координат, индекс  $k$  пробегает значения от 1 до  $K$ , где  $K$  - количество пространственных переменных.

Отметим, что в случае гиперболичности уравнения (1) существуют действительные функции  $q_k(f) = \frac{\partial q_k}{\partial f}$ , называемые якобианами системы.

В области  $\{0 \leq x_k \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  построим равномерную сетку  $\omega_{ch_k} = \{x_{k_i} = i_k h_k \mid i = 1, N_{x_k}; t_j = n\tau \mid n = 1, N_t\}$ , где  $\tau, h_k$  - шаги дискретизации по временной и пространственным координатам соответственно. В дальнейшем будем полагать  $f_{\{i_k\}}^n = f_{i_1, \dots, i_k}^n = f(t_n, x_{k_{i_j}})$ .

В соответствии с [6] запишем исходное уравнение (1) в полудискретной форме:

$$\frac{f_{\{i_k\}}^{n+1} - f_{\{i_k\}}^n}{\tau} + \frac{\partial q_k(f)}{\partial x_k} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau^m}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial t^{m+1}} = 0. \quad (2)$$

Здесь по индексу  $m$  суммирование проводится явно. Отметим, что все производные определены в точке  $(t_n, x_{k_{i_j}})$ . Затем выразим производные по времени через производные по пространству, используя Г-форму дифференциального представления (2). В результате имеем следующие выражения для производных по времени от искомой функции:

$$\frac{\partial^{m+1} f}{\partial t^{m+1}} = - \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)^m \left( (-q_\alpha)^m \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right). \quad (3)$$

В выражении (3) степень  $(-q_\alpha)^m$  (тензор ранга  $m$ ) строится на базе тензорного произведения (вектор якобианов  $q_k$  есть тензор первого порядка), а  $\left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)^m$  подразумевает последовательное применение оператора дифференцирования. Например, для  $\frac{\partial^5 f}{\partial t^5}$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial t^5} = - \frac{\partial}{\partial x_p} \left( \frac{\partial}{\partial x_v} \left( \frac{\partial}{\partial x_r} \left( \frac{\partial}{\partial x_s} \left( (q_p q_v q_r q_s) \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right) \right) \right) \right).$$

Подставляя (3) в полудискретную форму (2), получим

$$\frac{f_{\{i_k\}}^{n+1} - f_{\{i_k\}}^n}{\tau} + \frac{\partial q_k(f)}{\partial x_k} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau^m}{(m+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)^m \left( (-q_\alpha)^m \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right) = 0. \quad (4)$$

В (4) все производные берутся по пространственной координате на  $p - m$  временном слое.

Как было показано в [6], для получения разностной схемы порядка точности  $M$  необходимо учесть  $(M-1)$  слагаемых в сумме в уравнении (4). Из вида (4) следует следующая двухшаговая методика построения КРС заданного порядка точности  $M$  для решения уравнения (1).

**Шаг 1.** Строится разностная аппроксимация свертки  $\frac{\partial q_k(f)}{\partial x_k}$  порядка точности  $M$

$$\Phi_{\{i_k\}} = L_{M,k}^1 \left( q_k \left( f_{\{i_k\}}^n \right) \right) = \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \Big|_{\{i_k\}} + O(h_k^M). \quad (5)$$

Здесь  $L_{M,k}^1$  - некоторый разностный оператор, аппроксимирующий производную  $\frac{\partial}{\partial x_k}$  с порядком точности  $M$ .

**Шаг 2.** Значение искомой функции на новом временном слое определяется по следующей зависимости:

$$f_{\{i_k\}}^{n+1} = f_{\{i_k\}}^n - \tau \cdot \Phi_{\{i_k\}} - \sum_{m=1}^{M-1} \frac{\tau^{m+1}}{(m+1)!} (L_{M-m,\alpha}^1)^m \left( (-q_\alpha)^m \Phi_{\{i_k\}} \right). \quad (6)$$

Все соображения по поводу операторов  $L_{M-m,\alpha}^1$ , приведенные [6], справедливы и в рамках настоящего исследования.

### 5. Пример построения конечно-разностных схем

В соответствии с предлагаемым подходом (5, 6) были построены КРС нечетного порядка точности  $M = \{3, 5, 7\}$  для  $K = 2$ . Для аппроксимации операторов  $\left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^m$  были использованы простейшие центрально-разностные операторы  $L_{c(j),\alpha}^1$  по причинам, изложенным в [3]. При этом на первом шаге для аппроксимации производных  $\frac{\partial}{\partial x^k}$  использовался кососимметричный оператор  $L_{c(M+1),k}^1$ , для аппроксимации производных  $\frac{\partial}{\partial x^k}$  в нечетных степенях  $\left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{2m+1}$  на втором шаге - операторы  $L_{c(M-2m),k}^1$ , а для аппроксимации производных  $\frac{\partial}{\partial x^k}$  в четных степенях  $\left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{2m}$  на втором шаге - симметричные операторы  $L_{c(M-2m+1),k}^1$ .

Для иллюстрации приведем расчетные формулы для КРС третьего порядка точности

**Шаг 1.**

$$\begin{aligned} \Phi_{\{i_k\}} &= L_{c4,k}^1 \left( q_{\{i_k\}}^n \right) = \\ &= \frac{-u_{i_k-2} + 8u_{i_k-1} - 8u_{i_k+1} + u_{i_k+2}}{h_k} = \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \Big|_{\{i_k\}} + O(h_k^4). \end{aligned}$$

**Шаг 2.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_r} \left( -q_r \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right) &= \Delta_r \left( -q_{\{i_k\}} \Phi_{\{i_k\}} \right) + O(h_k^2); \\ \frac{\partial}{\partial x_s} \left( q_r q_s \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right) &= \Delta_r \left( \Delta_s \left( q_{\{i_k\}} q_{\{i_k\}} \Phi_{\{i_k\}} \right) \right) + O(h_k^2). \end{aligned}$$

Здесь оператор  $\Delta_k$  - классический центрально-разностный оператор, аппроксимирующий оператор дифференцирования  $\frac{\partial}{\partial x^k}$  со вторым порядком точности:

$$\Delta_k(u_{\{i_k\}}) = \frac{u_{i_k+1} - u_{i_k-1}}{2h_k}.$$

Анализ устойчивости полученных КРС методом дифференциального приближения [8] показал их условную устойчивость при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви

$$\frac{\tau|\lambda_{\max}|}{\min(h_k)} < 1.$$

Здесь  $\lambda_{\max}$  - максимальная скорость распространения возмущений в решаемой задаче.

### 6. Результаты тестовых расчетов

С целью расчетной проверки приведенных выше построений были решены общепринятые тестовые задачи для линейных и квазилинейных гиперболических уравнений.

При проверке порядка аппроксимации оценка погрешности решения  $\epsilon$  проводилась в конечномерных аналогах норм в  $L_1, L_2, C$  для случая двух пространственных координат:

$$\|u_{i,j}\|_{L_1^{h_k}} = h_1 h_2 \sum |u_{i,j}|,$$

$$\|u_{i,j}\|_{L_2^{h_k}} = \sqrt{h_1 h_2 \sum u_{i,j}^2},$$

$$\|u_{i,j}\|_C = \max |u_{i,j}|.$$

Порядок аппроксимации определялся по экстраполяции Ричардсона [1]. Во всех задачах полагалось  $\sigma_k = \tau/h_k = \{0.5, 0.25\}$ .

*Линейное уравнение переноса.* Уравнение (1) было решено при  $q_k = f$  и начальном условии:

$$f(0, x) = \sin(\pi(x_1 + x_2)), \quad x_k \in [-1, 1]$$

с периодическими граничными условиями [9]. Расчет проводился до момента времени  $t = 2$ . Результаты расчетов представлены на рис. 1.

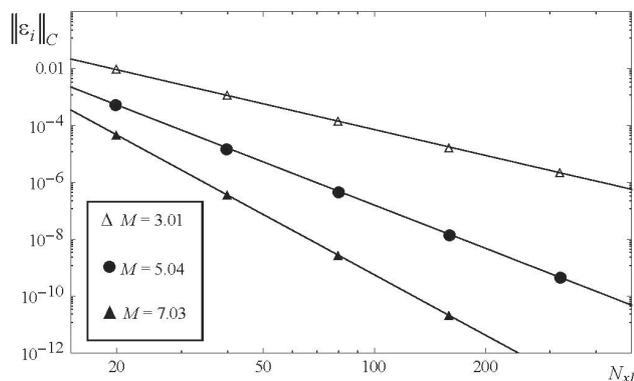


Рис. 1. Зависимость C-нормы погрешности численного решения  $\| \epsilon_{i,j} \|_C$  от числа точек в расчетной области  $N_{x1}$  для линейного уравнения переноса

Здесь и далее  $M$  - оценка порядка аппроксимации, вычисленная по результатам расчетов. Как видно, расчеты подтверждают заявленный порядок аппроксимации предложенных КРС.

На рис.2 приведены зависимости необходимого времени расчета от точности вычислений, определенные при решении представляемой тестовой задачи.

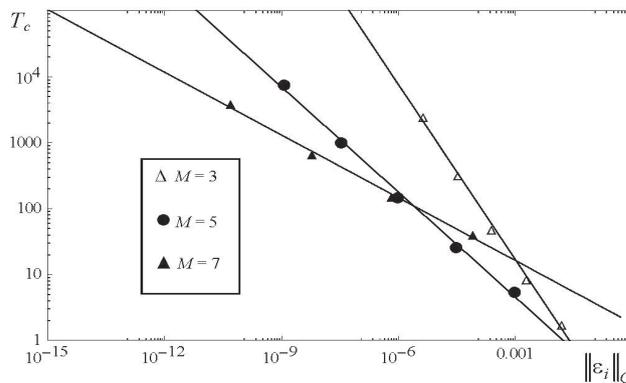


Рис. 2. Зависимость времени расчета  $T_c$  от потребной точности вычислений

Как видно, начиная с  $\| \epsilon_{i,j} \|_C = 10^{-6}$ , при использовании КРС высокого порядка точности потребуется меньше времени для решения этой задачи. Это подтверждает тезис об экономичности КРС высокого порядка точности [6].

*Квазилинейное скалярное уравнение.* Уравнение (1) было решено при  $q_k = f^2/2$  и начальном условии:

$$f(0, x) = 0.5 + \sin(\pi(x_1 + x_2)), \quad x_k \in [-1, 1]$$

с периодическими граничными условиями [10, 11]. Расчет проводился до момента времени  $t = 0.5/\pi$ , когда решение все еще гладкое. Результаты расчетов, представленные на рис. 3, показали, что все предложенные разностные схемы подтвердили заявленный порядок аппроксимации и в случае квазилинейного ДУЧП.

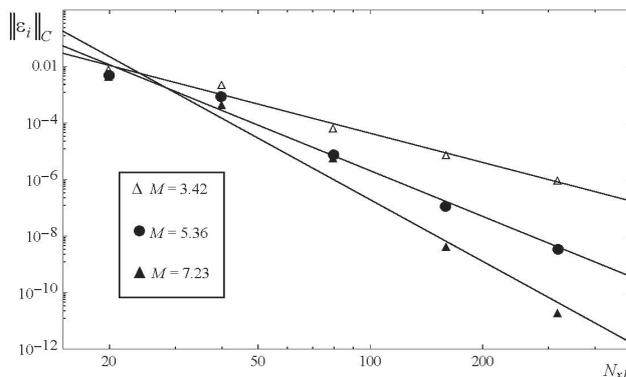


Рис. 3. Зависимость C-нормы погрешности численного решения  $\| \epsilon_{i,j} \|_C$  от числа точек в расчетной области  $N_{x1}$  для квазилинейного скалярного уравнения

### 7. Выводы

Резюмируя, можно сделать следующие выводы:

- в работе приведена и обоснована методика построения двухслойных двухшаговых КРС МСА высокого порядка точности для решения многомерных квазилинейных гиперболических ДУЧП;
- с помощью предложенной методики получены разностные схемы  $M = \{3, 5, 7\}$  порядков аппроксимации по времени и пространству для решения многомерных квазилинейных гиперболических ДУЧП;

• приведенные результаты методических расчетов ряда общепринятых тестовых задач подтверждают заявленную скорость сходимости и экономичность разработанных КРС.

В дальнейшем предполагается обобщить предложенный подход на случай систем ДУЧП в многомерном случае.

### Литература

1. Encyclopedia of Computational Mechanics Volume 1 Fundamentals [Текст] / Editors Erwin Stein, Rene de Borst, Thomas J. R. Hughes – WILEY, 2004. – 798 p.
2. Drikakis D. Rider W. High-Resolution Methods for Incompressible and Low-Speed Flows – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005 – 622 p.
3. Самарский, А. А. Теория разностных схем. Учебное пособие [Текст] / Самарский А.А. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 616 с.
4. Бучарский, В.Л. Метод совместной аппроксимации построения разностных схем для решения уравнений в частных производных [Текст] / В.Л. Бучарский // Техническая механика. – 2007. – № 1. – с. 50 – 57.
5. Бучарский, В.Л. Симметричные разностные схемы метода совместной аппроксимации для решения линейного уравнения переноса [Текст] / В.Л. Бучарский, Е.М. Калинин // Математичні машини і системи. – 2011. – №4. – с. 161-165.
6. Бучарский, В. Л. Двухшаговые разностные схемы метода совместной аппроксимации для решения квазилинейных одномерных гиперболических уравнений [Текст] / В.Л. Бучарский // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – №2/4 (62). – с. 34-38.
7. Аквис, М.А. Тензорное исчисление: Учеб. пособие [Текст] / Аквис М.А., Гольдберг В.В. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
8. Shokin Y.I. The Method of Differential Approximation / Shokin Y.I. – Springer-Verlag Berlin And Heidelberg GmbH & Co. – 1983. – 224p.
9. Shu, C.-W. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes [Текст] / C.-W. Shu, S.Osher // J. Comp. Phys. – 1988. – v.77. – p.439-471.
10. Qiu, J. Finite-difference WENO schemes with Lax-Wendroff-type time discretizations [Текст] / J. Qiu, C.-W. Shu // SIAM J.Sci. Comput. – 2003. – v.24. – №6. – p.2185-2198.
11. Qiu, J. Hermite WENO schemes with Lax-Wendroff type time discretizations for Hamilton-Jacobi equations [Текст] / J. Qiu // Journal of Computational Mathematics. – 2007. – v.25 – p.131-144.

*Складні об'єкти, як правило, мають спільну рису – у них на скінченній множині «носіїв» розподілено обмежену множинну «ресурсів». Така точка зору на складну систему разом із застосуванням принципу максимуму ентропії може допомогти в з'ясуванні феномену негауссових ступеневих розподілів*

*Ключові слова: гіперболічний розподіл, негауссовий розподіл, ступеневий розподіл, гіперболічний закон розподілу*

*Сложные объекты, как правило, обладают одним общим свойством – у них на конечном множестве «носителей» распределено ограниченное множество «ресурсов». Такой взгляд на сложную систему в сочетании с принципом максимума энтропии может дать ключ к объяснению феномена негауссовых степенных распределений*

*Ключевые слова: гиперболическое распределение, негауссово распределение, степенное распределение, гиперболический закон распределения*

УДК 517.956.3+519.246+519.218.7

## ЭВОЛЮЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

**Н. И. Делас**

Кандидат технических наук, докторант  
Национальный авиационный университет  
пр. Комарова, 1, г. Киев, Украина, 03680  
E-mail: nikolaivad@gmail.com

### 1. Введение

Широко известен феномен негауссова распределения, проявленный как в природе, так и в сфере человеческой деятельности. Есть множество объектов,

которым свойственен степенной (гиперболический) закон распределения.

Иногда он носит имя Дж. Ципфа, обнаружившего этот закон в лингвистике. В экономике – это закон Парето (распределение материальных благ в