

УДК 004.052.32

*Представлено математичні моделі зв'язності структур для статичних і динамічних систем. Даються оцінки Езари-Прошана та Полеського для фіксованих систем, у той час як для динамічних систем ці оцінки визначаються у просторі станів. Аналізується система якості оцінки стану при різних підключеннях компонентів вектора динамічних вузлів. Показано, що базова модель Чеботарьова-Агаєва наближається до процедури стохастичної синхронізації станів*

*Ключові слова: оцінки, збіжність, стійкість, рівняння спостережень, простір станів*

*Представлены математические модели связности структур для статических и динамических систем. Даются оценки Эзари-Прошана и Полесского для фиксированных систем, в то время как для динамических систем эти оценки определяются в пространстве состояний. Анализируется система качества оценки состояния при различных подключениях компонентов вектора динамических узлов. Показано, что базовая модель Чеботарева-Агаева приближается к процедуре стохастической синхронизации состояний*

*Ключевые слова: оценки, сходимост, устойчивость, уравнение наблюдений, пространство состояний*

# МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СТРУКТУР ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

**В. В. Поповский**

Доктор технических наук, профессор  
Кафедра телекоммуникационных систем\*

E-mail: tkc@kture.kharkov.ua

**В. С. Волотка**

Ассистент\*

\*Кафедра телекоммуникационных систем  
Харьковский национальный университет  
радиоэлектроники

пр. Ленина, 14, г. Харьков, Украина, 61166

E-mail: vadim\_pirogov@ukr.net

## 1. Введение

Математической моделью связности системы  $S(x_n)$  является матрица связности  $A = \{a_{ij}\}$ , определяющая длины путей между  $i$  и  $j$  вершинами (узлами) [1]. Связность сетей часто ассоциируют с их надежностью, поскольку представляется логичным утверждение о том, что с увеличением числа связей (ребер) возрастает надежность передачи информации между любыми узлами.

Модель, определяющая надежность в виде матрицы связности  $A = \{a_{ij}\}$ , обычно используют на этапе проектирования или модернизации сети. Поэтому эту модель следует считать априорной характеристикой в отличие от апостериорной, определяемой как процент времени, в течение которого выполняются требования критерия качества функционирования.

Простейшей моделью связности  $A = \{a_{ij}\}$  является бинарная матрица  $a_{ij} \in [0,1]$ , дающая представление о том, что между  $i$  и  $j$  узлами имеется или отсутствует связь.

Большой содержательностью обладает матрица, элементы которой  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $i \neq j$  численно параметризуют те или иные свойства связей: длину линий, вероятность связи, каналную емкость и другие. При вероятностной характеристике связей элементы  $a_{ij}$  являются случайными величинами и известными методами можно вычислить вероятность связности  $P_{ij}$  для любых узлов, особенно если их число составляет единицы. С увеличением  $n$  сложность вычислений возрастает пропорционально  $n!$ . Для получения

численных результатов при больших  $n$  пользуются различными приближенными оценками. К числу таких оценок относятся оценки Эзари-Прошана [2], Полесского [3] и другие. Вычисляемые оценки  $P_{ij}$  характеризуют состояния вероятностей связности для неподвижной (не изменяющейся во времени) случайной системы  $S(x_n)$ .

Большой общностью обладает матрица связности  $A(t)$  динамической системы  $S(x_n(t))$ , элементы которой  $a_{ij}(t)$  представляют уже случайные процессы. При таком представлении матрицы связности удастся отобразить не только структурные, но и функциональные свойства моделируемой системы  $S(x_n(t))$  [4 – 6].

## 2. Описание моделей динамических структур

В связи с развитием кибернетики, теории управления, инфокоммуникаций динамические модели систем в пространстве состояний приобрели мощное теоретическое обоснование и широкое практическое применение. Таким образом, в изменяемых условиях конструктивными являются методы, основанные на системах дифференциальных или разностных уравнений, где в качестве переменной  $x_i(t)$  следует рассматривать состояние параметров  $i$ -го узла (нагрузку, длину очереди, запаздывание, джиттер и др.). Модель структуры участка сети, прилегающего к  $i$ -му узлу, определяет соответствующие коэффициенты  $a_{ij}(t)$ , стоящие перед функциями взаимодействия данного узла со всеми смежными  $j$  узлами.

Общее линейное уравнение модели динамики стохастической управляемой системы  $S(x(t), u(t), t)$  имеет вид [7 – 9]:

$$dx_i(t)/d(t) = A(t)x_i(t) + B(t)u_i(t) + G(t)\xi_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $\xi_i(t)$  - вектор виртуального порождающего белого гауссова шума. Размерность матрицы  $A(t)$  соответствует размерности вектора состояния  $x_i(t)$ .

С целью обеспечения наблюдаемости систему уравнений (1) следует рассматривать совместно с системой уравнений наблюдения (измерения)

$$y_i(t) = H(t)x_i(t) + v_i(t), \quad (2)$$

где  $v_i(t)$  - шум в каналах наблюдения от смежных с  $i$ -м узлом, некоррелированный с  $\xi_i(t)$ . Матрица  $H(t)$  определяет масштаб представления векторов состояния  $x_i(t)$ , в частности может быть  $H(t) = I$ .

Очевидно, что в тех частных случаях, когда  $\xi(t) = v(t) = 0$  система  $S(x)$  становится детерминированной и тогда допускается упрощение, облегчая как анализ, так и синтез систем. В общем же случае представления модели (1), (2) являются достаточно универсальными для линейных динамических систем.

Для целостной системы недопустимо полагать, что в уравнении (1) все элементы матрицы связности  $a_{ij}(t) = 0$  при  $i \neq j$ . При этом уравнение (1) становится независимы и система  $S(x(t), t)$  распадается на  $n$ -элементов  $S_i(x_i(t), t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , поскольку именно взаимные связи  $a_{ij}(t)$ ,  $i, j = \overline{1, 2, \dots, n}$  обеспечивают приобретение системой сверхинтегральных свойств эмерджентности. Взаимные связи между компонентами вектора  $x_i$  могут появиться также за счет других недиагональных элементов:  $b_{ij} \in B$  и  $g_{ij} \in G$ , которые также подлежат регламентации. Вместе с тем, допустимо рассматривать модель системы (1), где матрица состояния  $A(t)$  - полная, а матрицы  $B(t)$  и  $G(t)$  - диагональные. Такое допущение оправдано также тем, что при достаточном общих ограничениях за счет матричного  $\sin/\cos$ -преобразования система (1) приводится именно к такому виду.

Известны и другие варианты представления модели динамических систем. Так в многоагентных сетях [5, 7], к которым можно отнести также и телекоммуникационные сети, принято рассматривать базовую дифференциальную модель в виде:

$$dx_i(t)/dt = -\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)(x_i(t) - x_j(t)), \quad i = \overline{1, 2, \dots, n}. \quad (3)$$

Уравнение (3) интерпретируется следующим образом. Состояние  $i$ -го узла  $x_i(t)$  характеризуется вектором с компонентами  $x_{ij}(t)$ , где  $i$  - номер узла,  $j$  - номера смежных узлов. Компоненты  $x_{ij}(t)$  определяют состояние направлений от узла  $i$  к узлам  $j$ .

При этом далеко не очевидно, каким образом может быть применена непосредственно базовая дифференциальная модель (3), в первую очередь из-за неопределенности, как по нахождению разности состояний  $x_i(t) - x_j(t)$ , так и моделей этих состояний. Придадим компонентам разности физический смысл. Очевидно, что  $x_i(t)$  и  $x_j(t)$  - векторы, формируемые соответственно в  $i$ -ом и  $j$ -ом

узлах и их состояния могут быть известны с точностью до модели (1). Состояния компонент вектора смежных узлов  $x_j(t) = \{x_{ji}(t)\}$  представляют собой данные, поступающие из линий ото всех  $j$ -х узлов в данный  $i$ -ый узел. Этот вектор  $x_j(t)$  подлежит наблюдению (измерению), поэтому в отношении к нему следует выбрать модель (2), где  $v_j(t)$  - шумы в канале измерения, погрешности измерителя и другие факторы, влияющие на точность измерения. При этом более реалистичной может быть иная разность в виде невязки, в которой участвует наблюдаемый вектор измерения  $y_j(t)$ , что соответствует практическому содержанию задачи. Сама же задача становится задачей стохастической аппроксимации [10], которая широко используется в современных телекоммуникационных технологиях. Она используется, например, при определении времени кругового обращения RTT, в технологии TCP, в алгоритмах RED-предотвращения перегрузки буфера маршрутизатора и другие [9]. Известно [9, 10], что оценка, получаемая методом стохастической аппроксимации, является оптимальной по критерию минимума среднего квадрата отклонения (МСКО).

Таким образом, задачу (3) преобразуем в следующую:

$$dx_i(t)/dt = -\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)(x_{ij}(t) - y_{ji}(t)), \quad (4)$$

где разность  $x_{ij}(t) - y_{ji}(t)$  - суть, невязка. В оптимальных процедурах невязка имеет характер обновляющего процесса типа белого шума. Более того, сама невязка  $x_{ij}(t) - y_{ji}(t)$  обычно служит в качестве управляющего сигнала при оценке состояния, при реализации как алгоритмов управления наблюдением, так и при управлении состоянием системы [9].

В задаче (4) необходимо осуществить выбор коэффициентов взаимосвязи  $\alpha_{ij}$  с тем, чтобы оптимизировать систему: минимизировать ошибки оценки, обеспечить приемлемую скорость сходимости процедуры (4) на участках квазистационарности и получить при этом наибольший эффект от системного рассмотрения с учетом взаимосвязей при рассмотрении динамики.

В данном случае (4) не так важно будет ли данная система  $S(x_n(t), t)$  централизована или децентрализована. Для любой из этих структур имеют место соответствующие взаимодействия  $\alpha_{ij}$ , определяющие ее связность. Связность или структурная связность является важнейшей характеристикой любой системы, поскольку с исчезновением связности исчезает и сама система.

Следует отметить также возможность возникновения ложной взаимосвязи между компонентами вектора  $x_i$ , которая может появиться даже при нулевых значениях недиагональных элементов  $\alpha_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$ . Эта взаимная связь между независимыми компонентами  $x_i$  и  $x_j$  может возникнуть за счет появления недиагональных компонент матрицы измерений  $H(k) = [h_{ji}]$  в уравнении (2). Такая ситуация возникает в тех случаях, когда при измерении одного состояния  $x_{ij}$  в данный измерительный канал поступают переходные сигналы от другого  $x_{ji}$ , то есть когда имеются кросс-переходные взаимные помехи. Эта искусственно полученная связность за счет появления компонент  $h_{ji} \neq 0$  носит, как правило, нежелательный характер.

Устранение таких нежелательных связей обычно осуществляется инженерными методами.

В другом крайнем случае, при максимальной связности матрица  $\alpha_{ij} \in A$  может оказаться полной. На практике это может означать, что все узлы сети связаны друг с другом. Очевидно, что в динамических системах, в том числе телекоммуникационных, такой полностью связанный случай – нереальный, ибо на практике связь всех со всеми одновременно, как правило, не нужна. Более реалистичным является случай, когда матрица  $A_{ij}$  будет сильно разреженной.

### 3. Оценка состояния связанных систем

Процедура (4) реализуется обычно в дискретном виде:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(k)[x_j(k) - y_i(k)], \quad (5)$$

где  $y_j(k) = H(k)x_j(k) + v_j(k)$  – система уравнений наблюдения состояния вектора  $x_j(k)$ .

При анализе связности структуры в многомерной динамической системе важным являются не только номинальные значения  $\alpha_{ij}$ , но и число этих недиагональных элементов. Из работ Гарднера, Эшби [8] и других авторов известно, что при определенном числе недиагональных элементов (для сложной 10-мерной дифференциальной системы) возникает неустойчивый режим. Утверждается, что и такая сильно связанная модель при  $k \rightarrow \infty$  расходится. Здесь же [8] представлены данные о существовании критической связности, когда число недиагональных элементов  $\alpha_{ij}$  достигает 13% от их возможного максимального числа  $n \times n$ . При этом неустойчивость модели характерна как для линейных, так и нелинейных динамических систем. Приведем характерные графики устойчивости в зависимости от связности [8] (рис. 1).

В научной и технической литературе уделяется много внимания рекурсивным процедурам фильтрации, получению оценок, статистических выводов и др. [9, 10]. Одномерные процедуры (1) и (4) достаточно хорошо исследованы [9, 10] и их устойчивость обеспечивается соответствующим выбором шаговой постоянной  $\alpha_{ij}$  при достаточно общих ограничениях на свойства статистики  $u \in Y$ .

Вместе с тем, достаточно часто приходится решать задачи нахождения оценки двух- или более мерных процессов  $x^T(k) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n = 2, 3, \dots, n$ , функционально или статистически связанных между собой. В качестве реального примера связности процессов можно указать на процессы управления сетью, на сигналы в соседних антеннах в технологии ММО, на процессы во взаимодействующих маршрутизаторах и др. При сверхкритическом возрастании таких связей следует ожидать нарушения устойчивости, в то же время при слабых связях следует ожидать, что точность оценки каждой из компонент  $x_i$  должна повышаться, поскольку неопределенность в независимой  $n$ -мерной системе выше, чем при наличии указанных зависимостей между переменными в этой системе. Возникает вопрос о том, насколько взаимная информация оказывается полезной и при каких параметрах рекурсивной процедуры (1) или (5), в частности при

наличии ненулевых значений  $\alpha_{ij}$ , имеется выигрыш в точности оценивания.

Другой важной задачей является получение ответа на вопрос о том, как наилучшим образом можно использовать взаимную информацию, определяемую наличием  $\alpha_{ij} \neq 0$ .

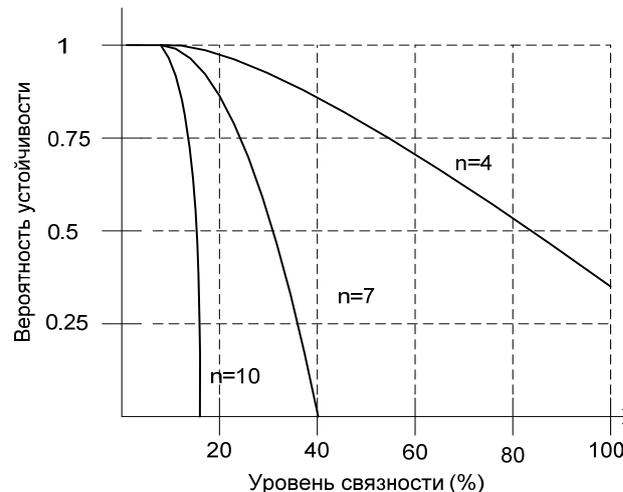


Рис. 1. Графики вероятности устойчивости n-мерной модели в зависимости от уровня связности

Известно [10], что рекурсивные методы позволяют производить вполне состоятельную оценку методом стохастической аппроксимации при достаточно медленно изменяющихся процессах  $x(k)$ . При этом, очевидно, шаг дискретизации  $\Delta t = (k+1) - k$  следует выбирать значительно меньше квазипериода или интервала корреляции этого процесса.

### 4. Результаты машинного эксперимента

Выбор процедуры. Оптимальной процедурой для оценки состояния случайных процессов  $x(k)$  является фильтр Калмана-Бьюси (ФКБ) [9, 10], однако часто используют более простую процедуру стохастической аппроксимации (СА) [11] в виде:

$$x(k+1) = x(k)(1-\beta) + \beta y(k), \quad (6)$$

являющуюся преобразованным видом классической процедуры

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) - a(\hat{x}(k) - y(k)). \quad (7)$$

Известно [9, 11], что процедура СА (7) является оптимальной для оценки случайных величин  $x$ . Использование ее для оценки состояния случайных процессов приводит к тому, что после каждого изменения  $x(t)$  данная процедура претерпевает переходный режим.

Иными словами: при оценке случайного процесса процедура СА находится в постоянном переходном состоянии, что приводит к ошибкам оценивания. Вместе с тем, эти ошибки можно заметно уменьшить, сокращая шаг дискретизации  $\Delta t = (k+1) - k$  по сравнению с интервалом корреляции  $\tau_{кор}$  случайного

процесса. Практика показывает, что при длине шагов  $\Delta t = (0,01...0,001)\tau_{\text{коп}}$  влияние переходного процесса мало заметно.

Для исследования влияния взаимных связей  $a_{ij}$  достаточно выбрать 2-мерную процедуру:

$$\begin{cases} \hat{x}_1(k+1) = \hat{x}_1(k) + a_{11}(\hat{x}_1(k) - y_1(k)) + a_{12}(\hat{x}_2(k) - y_1(k)); \\ \hat{x}_2(k+1) = \hat{x}_2(k) + a_{21}(\hat{x}_2(k) - y_2(k)) + a_{22}(\hat{x}_1(k) - y_2(k)), \end{cases} \quad (8)$$

где значения  $a_{ii} = \text{const}$ ,  $a_{ij}$  - изменяется от 0 до  $a_{ij}$  и влияние этих зависимостей следует исследовать. Структурная схема алгоритма (8) представлена на рис. 2.

Выбор оцениваемых функций. В качестве оцениваемых функций возьмем две синусоидальные функции  $x_i(k) = u_i \cos \phi_i(k)$  с одинаковыми амплитудами  $u_1 = u_2$  с разными начальными фазами и с шагом  $\Delta \phi_i = \phi_i(k+1) - \phi_i(k) = 4^\circ$ . Уравнение наблюдения выберем в виде:

$$y_i(k) = x_i(k) + v_j(k), \quad (9)$$

где  $v(k)$  - выборка из гауссова белого шума со спектральной плотностью мощности  $N_v(k)$ . Соотношение сигнал/шум  $P_c / N_v$  составляет 5дБ.

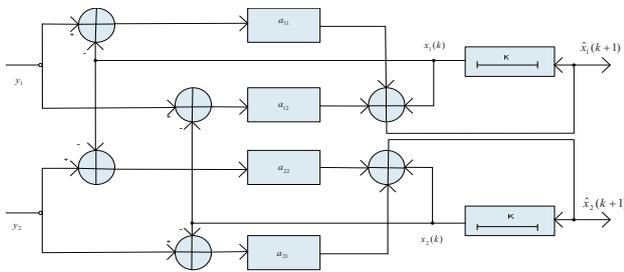


Рис. 2. Структурная схема двумерного алгоритма оценки процесса  $x_i(k)$

В качестве индикаторной функции возьмем выборочное нормированное значение апостериорной дисперсии  $\sigma_{xi}^2$ , вычисляемой по формуле:

$$\sigma_{xi}^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (x_i(k) - \hat{x}_i(k))^2, \quad (10)$$

где  $K$  - объем выборки, составивший значение 10000 отсчетов.

Обсуждение полученных результатов. На рис. 3 представлены три различных графика изменения точности оценки по выборке, удовлетворяющей уравнению (6) в зависимости от числа шагов дискретизации, отсчитанных от момента включения процедуры для различных значений коэффициентов  $a_{ii}$  и  $a_{ij}$ . График №1 дан для сравнения. Он характеризует потенциальные возможности процедуры СА при оценке случайной величины  $x = \text{const}$ . Из графика следует, что с увеличением числа шагов  $k > (50...100)$  апостериорная дисперсия асимптотически уменьшается до нуля. То есть случайную величину  $x$ , наблюдаемую на фоне гауссова белого шума, можно оценивать асимптотически точно:  $\sigma_x^2(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Графики №2 и №3 демонстрируют близкие к предыдущему характеристики,

однако асимптотического обнуления апостериорной дисперсии при  $k \rightarrow \infty$  не наблюдается. Имеет место остаточное значение  $\sigma_{xi}^2$ , что обусловлено влиянием неустановившихся переходных режимов. Основным результатом проведенного эксперимента состоит в том, что апостериорная дисперсия  $\sigma_{xi}^2$  для связанных процессов оказывается несколько, на (5...10)%, ниже, чем для независимых процессов при прочих равных условиях. Соответственно точность оценки для связанных процессов оказывается выше.

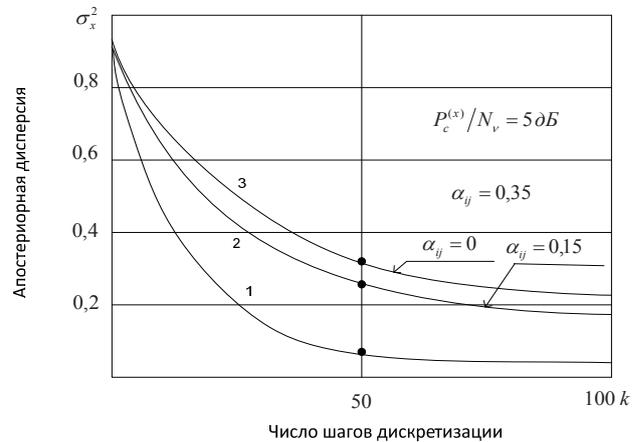


Рис. 3. Графики изменений апостериорной дисперсии в зависимости от числа шагов дискретизации, ошибки оценки  $\tilde{x}_k = (\hat{x}_k - x_k)$  при соотношении сигнал/шум  $P_c^{(x)} / N_v = 5$  дБ. Ошибки оценки постоянной составляющей - 1,  $\alpha_{ij} = 0$ ; синусоидальные функции - 2,  $\alpha_{ij} = 0,15$ ; синусоидальные функции - 3,  $\alpha_{ij} = 0$

На рис. 4 представлены графики апостериорной дисперсии в зависимости от величины коэффициента связи  $a_{ij}$ . График подтверждает предыдущий вывод и показывает, что с увеличением уровня связности точность оценки увеличивается.

В данных исследованиях были использованы относительно слабые связи. С увеличением уровня связности и числа этих связей однозначных выводов сделать не удастся.

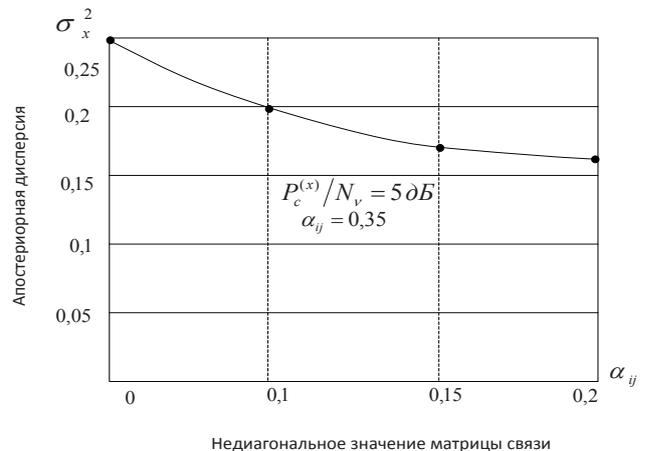


Рис. 4. График изменения апостериорной дисперсии ошибки оценки при различных значениях недиагонального значения  $\alpha_{ij}$  матрицы связности

---

## 5. Выводы

---

1. Наличие связности между элементами систем обеспечивает приобретение ею новых сверхинтегральных свойств: системности, целостности, эмерджентности. Наличие связности в сетевых структурах, типа инфокоммуникационных систем, обеспечивает обретение свойств надежности и живучести сетей.

2. Для неподвижных (с неизменяемыми во времени параметрами) сетей характер связности отображается матрицей связности, которая может иметь бинарную структуру или состоять из количественных данных, определяющих уровень связности (вероятность, каналность, расстояние и др.). Коэффициент связности или вероятность связности для таких сетей находятся по приближенным методикам Эзари-Прошана, Полесского и др.

3. Для динамических (с изменяемыми во времени элементами связности) сетей значения связности могут быть получены через текущую оценку состояний связности для каждого узла от всех смежных узлов.

Для получения апостериорной в реальном масштабе оценки связности целесообразно использовать модели в пространстве состояний, что позволяет характеризовать динамические как детерминистские, так и стохастические системы. Практика показывает, что для состояния процесса допустимо использовать методы стохастической аппроксимации при условии выбора шага дискретизации  $\Delta t \ll \tau_{\text{кор}}$ .

4. Анализ многомерных дифференциальных систем показывает, что наличие взаимных связей между компонентами системы не может иметь произвольных значений. Большое число связей приводит к появлению неустойчивых режимов. В другом крайнем случае: при отсутствии взаимных связей система теряет свои системные свойства (целостность, эмерджентность).

5. Наличие связи между случайными процессами способствует повышению точности (уменьшению значений апостериорной дисперсии) оценки компонент этих процессов по сравнению с тем, когда данные процесса независимы.

---

## Литература

1. Richard, J. Trudeau. Introduction to graph theory [Text] / J. Richard // Dover publications. – Inc. New York, 1993. – 212 p.
2. Esazy, J. Coherent Structures of Non-Identical Components [Text] / J. Esazy, F. Proshkan // Technometrics. – 1963. – Vol.5, №2. – P. 191–309.
3. Полесский, В. П. Оценки вероятности связности случайного графа [Текст] / В. П. Полесский // Проблемы передачи информации. – 1990. – Т.26, №1 - С. 90–101.
4. Bernstein, P. Middleware: A Model for Distributed System Services [Text] / P. Bernstein // Commun. ACM. – Feb. 1996. – Vol. 39, №2. – P. 87–98.
5. Чеботарев, П. Ю. Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов [Текст] / П. Ю. Чеботарев, Р. П. Агаев // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №3. – С. 136–152.
6. Boyd, S. Linear matrix inequality in system and control theory [Text] / S. Boyd, L. E. Choui, E. Feron, V. Balakrishnan // SIAM. Philadelphia. – 1994.
7. Джунсов, И. А. Синхронизация в сетях линейных агентов с обратными связями по выходам [Текст] / И. А. Джунсов, А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №8. – С. 41–52.
8. Gardner, M. R. Connectance of large dynamic (cybernetic) systems: Critical values stability [Text] / M. R. Gardner, W. R. Assby // Nature. – 1970. – №228. – P. 784.
9. Popovskij, V. Control and Adaptation in Telecommunication Systems. Mathematical Foundations [Text] / V. Popovskij, A. Barkalov, L. Titarenko // Springer-Verlag. Berlin. – 2011. – 173 p.
10. Grewal, M. S. Kalman Filtering: Theory and Practice. [Text] / M. S. Grewal, A. P. Andrews // New Jersey: Prentice-Hall. – 1993. – P. 381.
11. Невельсон, М. Б., Хасьминский, Р. З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание [Текст] / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский. – М. : Наука, 1972. – 298 с.